АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

8423—9392

*

№ 10 1958

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

Рефераты 8423—9392 № 10 Октябрь 1958 г.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

8423. О созыве внеочередного XXI съезда КПСС. Постановление Пленума ЦК КПСС, принятое 5 сентября 1958 года. Газ. «Правда», 1958, 7 сент., № 250, стр. 1

Пленум ЦК КПСС постановил созвать 27 января 1959 г. внеочередной XXI съезд КПСС с повесткой дня: «Контрольные цифры развития народного хозяйства СССР на 1959—1965 гг.».

8424. Сообщение о государственной конференции по вопросам применения математики. Фука (Zpráva o celostátní konferenci o aplikacích matematiky. Fuka Jaroslav), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 4, 491—494 (чешск.)

Конференция проходила 15—18 мая 1956 г. в Праге.

8425. Доклад об Амстердамском международном конгрессе математиков. Киффер (Rapport sur le Congrès international de mathématiques à Amsterdam. Kieffer Lucien), Arch. Inst. Gr.-Ducal Luxembourg. Sec. sci. natur., phys. et math., 1955, 22, 237—242 (франц.)

С конца прошлого века (1897) стали организовываться международные конгрессы математиков. Автор приводит список городов, в которых проходили конгрессы.

2—9 сентября 1954 г. в Амстердаме проходил XII конгресс. Работали 7 секций конгресса по различным разделам математики. Изложена тематика докладов на конгрессе.

Отмечаются две тенденции в современной математике: первая — к расширению объема математики, ко все более и более узкой специализации математиков, к росту количества разделов математики; вторая — к универсализации математики (школа Бурбаки). Автор относится положительно к обоим этим течениям.

Ю. С. Цапин

8426. Математическая конференция в Сегеде. Никольский С. М., Вестн. АН СССР, 1958, № 1, 84—85

Конференция происходила 21—23 сентября 1957 г. в связи с 10-летием Венгерского математического общества. Общество объединяет около 2 тыс. членов. Доклады на пленарных заседаниях: Редеи, О работе общества за 10 лет; Калмар, О новом типе логической электронной машины; Хайош, О точности в геометрии; Алексич, О сходимости ортогональных рядов; Надь, Некоторые новые результаты из теории операторов в гильбертовом пространстве; Редеи, О замечательных точках треугольника; Варга, Новые результаты в теории дифференциально-геометрических пространств; Фукс, Распространение теоремы Хайоша на бесконечные группы; Грелль, О регулярных примиделах; Попович, Об одном вопросе теории обыкновенных дифференциальных уравнений; Никольский, О теоремах вложения для функций, различные частные производные которых различно нормированы. В шести секциях было сделано еще около 90 кратких сообщений.

К. А. Рыбников

8427. XLVI Собрание итальянского Общества прогресса науки. Вклад Национального института прикладной математики (Сицилия, 15—21 сентября 1956 г.) (XLVI Riunione della Società italiana per il progresso delle scienze. Contributo dell'istituto nazionale per le applicazioni del calcolo (Sicilia, 15—21 settembre 1956), Ricerca scient., 1956, 26, № 12, 3752—3753 (итал.)

Сообщение о заседаниях секции математики, посвященных прогрессу численных методов математического анализа вследствие применения вычислительных автоматов. В заседаниях участвовал ряд иностранных математиков. Доклады будут напечатаны в Трудах Собрания.

И. Я. Депман

8428. Объединение математиков городов Тампико и Мадеры (Мексика) (Academia de matematicas de Tampico y ciudad Madero), Rev. Mat., 1957, № 2, 44 (исп.)

Сообщается об издании объединением журнала «Математика» и устройстве конференций для поднятия уровня знаний учащихся.

И. Я. Депман

8429. Бельгийский центр математических исследований. Годо (Le centre belge de recherches mathématiques. Godeaux Lucien), Enseign. math., 1957, 3, № 2, 150—155 (франц.)

В 1948 г. в Бельгии был создан Национальный центр математических исследований. Задача Центра — объединение усилий бельгийских математиков и расширение их связей с зарубежными математиками. Основной формой деятельности Центра была организация конференций по различным отраслям математики с участием иностранных ученых.

В декабре 1949 г. Центром была организована конференция по алгебраической геометрии, в июне 1950 г. — по топологии, в апреле 1951 г. — по дифференциальной геометрии, в июне 1952 г. — вторая конференция по алгебраической геометрии, в марте 1953 г. — конференция по функциям многих переменных.

В 1953 и 1954 гг. состоялись две конференции по уравнениям в частных производных. Затем были проведены конференции по статистике (1954 г.), по геометрии (1955 г.), по теории чисел (1955 г.). В 1956 г. состоялись конференции по алгебраической топологии и по алгебре.

Приведены подробные сведения о составе этих конференций, а также о публикациях Математического центра Бельгии.

Ю. С. Цапин

8430. Институт физики и математики к сороковой годовщине Великой Октябрьской социалистической революции. Тр. Ин-та физ. и мат. АН БССР, 1957, вып. 2, I—IV

Краткий очерк деятельности Института физики и математики АН БССР, организованного в начале 1955 г.

А. А. Гусак

8431. Семинар по математическому анализу и механике при Ростовском государственном университете. Гахов Ф. Д., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 263—266

Сообщается о работе объединенного семинара математиков и механиков РГУ, на заседаниях которого докладываются законченные научные результаты не только работников университета, но и других вузов. Приведен список докладов, сделанных на заседаниях указанного семинара в период 1954—1956 гг.

С. Е. Белозеров

8432. Диалектика и наука. Александров А. Д., Вестн. АН СССР, 1957, № 6, 3—17

8433. Диалектический синтез формализма и интуиционизма. Гуггенхеймер (Dialektische Synthese von Formalismus und Intuitionismus. Guggenheimer Heinrich), Dialectica, 1957, 11, № 1-2, 140—147 (нем.; рез. англ., франц.)

Отмечается ограниченность абсолютного формализма математических положений, на котором основывается весь классический анализ. С другой стороны, часто интуиционистская точка зрения, наряду с известным обоснованием учения о действительных числах, встречается с трудностями в учении о множествах, элементы которых не могут быть определены интуиционизмом изначально. В преодолении этих трудностей и обосновании точки зрения, лишенной односторонности формализма и интуиционизма, автор справедливо видит наиболее существенную проблему в обосновании математических доказательств.

В решении этой проблемы автор сознательно исходит из концепции Гонзета или так называемого диалектического синтеза на высшем горизонте реальности. Он видит известную ограниченность концепции Гонзета в ее формалистичности, т. к. она основана на аксиоматических положениях, однако не замечает ее общей философской несостоятельности, недиалектичности и видит свою задачу лишь в том, чтобы применять эту концепцию, освобождаясь в некоторых случаях даже от ее аксиоматизма.

В заключении автор полагает, что как основные главные (кардинальные), так и обычные (ординальные) порядки (иерархии) в теории множеств могут быть интерпретированы финитистически операционалистским образом без того, чтобы отказаться от какой-либо из фундаментальных черт этой теории.

Эта точка зрения, по мнению автора, имеет заметное преимущество перед строго формалистической, аксиоматической интерпретацией.

Примечание референта. Статья представляет интерес для специалистов в области философии математики, математической логики, теории математических доказательств. П. Е. Сивоконь

8434. О некоторых особенностях развития идеи автоматизации человеческого мышления и математической логики как ее теоретического основания. Чечин М. Н., Уч. зап. Казахск. ун-та, 1957, 32, 84—97

Приведены данные из истории математической логики: логические воззрения Луллия (1235—1315); попытки Джевонса (70-е гг. XIX в.) построить логическую машину; отрицательное отношение к логическому исчислению со стороны Гегеля, Бутру (1845—1921), Пуанкаре (1854—1912); взгляды на соотношение математики и логики Н. И. Лобачевского, Больцано и др. Делается попытка трактовать все эти факты как примеры теоретического обоснования идеи автоматизации человеческого мышления. Этим термином автор обозначает различного рода кибернетические устройства. Попытка свести историю математической логики к проявлению идеи автоматизации человеческого мышления представляется референту неверной, а сама идея автоматизации — неразъясненной. Н. А. Киселева

8435. Актуально-бесконечное в математике. Лоренцен (Das Aktual-Unendliche in der Mathematik. Lorenzen Paul), Philos. natur., 1957, 4, № 1, 3—11 (нем.)

Существование конечной мировой модели в современном естествознании, по мнению автора, подорвало господство актуальной бесконечности. Прототипом любой бесконечности Лоренцен считает потенциальную бесконечность чисел натурального ряда 1, 2, 3. . ., определяемую схемой

1) I, 2) $x \to xI$.

Брауэром показано, что потенциальная бесконечность исключает заключение от высказывания вида $>(\forall x)\,A(x)$ к высказыванию вида $(\exists x) > A(x)$, на котором основываются все косвенные доказательства существования.

Автор считает, что актуальная бесконечность в арифметике имеет геометрическое происхождение и опирается на представления, используемые в «принципе Кавальери». Парадоксальный характер таких бесконечных непрерывных множеств известен со времен Зенона. Естественное продолжение «актуалистской» концепции в виде теории трансфинитных чисел Кантора приводит к парадоксам теории множеств. «Решение» проблемы этих парадоксов путем выбрасывания всех актуально бесконечных множеств автор считает неприемлемым ввиду невозможности отказа от классического анализа, без которого немыслимы важнейшие разделы современной физики.

Выход из создавшегося положения автор видит в поисках «потенциалистского» обоснования всех основных предложений классического анализа. Ядро этой проблемы заключается в замене канторовского множества всех подмножеств множества основных чисел («потенц-множество») собственно потенциально бесконечным множеством. Метод решения этой проблемы указан еще Г. Вейлем: 1) каждое множество основных чисел указывается как множество тех самых чисел, которые выполняют известную форму высказывания $A(x)$, 2) формы высказываний суть конечные фигуры. Таким путем «потенц-множество» конструируется как собственно потенциально бесконечное множество через формы высказываний.

Однако существование многих различных конструкций, отвечающих этой цели, оставляет открытым вопрос об «однозначности» решения всей этой проблемы.

К. Н. Суханов

8436. Современная математика, ее преобразование и значение. Леви (Die zeitgenössische Mathematik, ihre Wandlungen und ihre Bedeutung. Levi Friedrich W.), Universitas, 1958, 13, № 1, 71—78 (нем.)

Основная идея: развитие математики определяется не только внутренней закономерностью ее, но также духовным и материальным движением своего времени или «духом времени», а математика обратно оказывает влияние на него. Характерными чертами современности автор считает: ликвидацию индивидуального в общем (Vermassung), абстрагирование, релятивизм. В математике это проявляется в специализации, ибо невозможно даже прочитать огромное количество публикуемых работ; в усилении значения метода абстрагирования и в действенности выводов математики всегда только в точно определенной системе.

Различие современной математики от математики XIX в. автор видит в том, что математика XIX в. рассматривала почти всегда непрерывные континуумы, ее расцветом явилась теория комплексных функций, ее триумфом стала аналитическая теория чисел, тогда как математика XX в., соответственно новым открытиям естествознания, не укладывающимся в непрерывную картину мира, исследует различные области

Выдающуюся роль играет в ней понятие изоморфизма различных множеств, предметом глубокого изучения стало понятие «порядок» и характерной для наших дней отраслью математики является поэтому топология.

В статье резко подчеркнута тесная связь между развитием современной математики и потребностями естествознания и индустрии, которые нуждаются в математике и дают ей сильные стимулы развития посредством постановки новых проблем.

Референт считает неверным заявление, что математика пифагорейцев имела философское происхождение, поскольку они, будучи недовольны существовавшей тогда религией, искали в числе принцип мира.

Неверно и утверждение, что процесс отображения, посредствующий между экспериментом и теорией в физике, «надо оценивать как акт смелой интуиции».

Н. А. Киселева

8437. Роль логики в кризисе оснований анализа. Лоренцен (Die Rolle der Logik in der Grundlagenkrisis der Analysis. Lorenzen Paul), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, A5, 65—74 (нем.)

Автор считает, что кризис оснований анализа так же стар, как и сам анализ. С момента возникновения анализа до работ Коши предложения и доказательства анализа в общем не согласовались с правилами обычной силлогистики. С появлением работ Коши, положивших начало явному определению основных понятий анализа — непрерывности и сходимости (метод подобных определений автор называет «эпсилонтикой» ввиду употребления в них буквы ε) — доказательства предложений анализа стали вновь проводиться логическими средствами элементарной геометрии. Результатом этой «первой реформы», состоящей во внедрении «эпсилонтики» и так называемой арифметизации является оформление классического анализа.

С именами Кронекера, Пуанкаре, Рассела, Бореля, Вейля, Брауэра и Сколема связывается требование «второй реформы», предъявляющей классическому анализу два критических требования:

(A) в случае бесконечно-многих индивидуумов не должны использоваться все правила классической логики,

(B) в анализе не должна использоваться наивная теория множеств.

В отличие от Брауэра, наложившего произвольный запрет на принцип исключенного третьего, автор считает необходимым дать положительную программу обоснования логики. В этой связи Лоренцен возражает против операции отражения в логике. Он считает, что в арифметике не всегда имеет место ситуация обычной логики, когда положительное суждение $S\varepsilon P$ имеет смысл, если имеет смысл также отрицательное суждение $S\varepsilon' P$. Например, если определить равенство через

$$1=1,$$

$$a=b\to a+1=b+1, \tag{1}$$

то отрицание $a=b$ бессмысленно. Оно впервые получает смысл с определением предиката $\neq$ через

$$a+1\neq 1$$

$$1\neq a+1 \tag{2}$$

$$a\neq b\to a+1\neq b+1.$$

Теперь легко определить отрицание через $\neg a=b\longleftrightarrow a\neq b$ и $\neg a\neq b\longleftrightarrow a=b$ для элементарных высказываний и через $\neg(A\,\&\,B)\longleftrightarrow\neg A\vee\neg B$, $\neg(A\vee B)\longleftrightarrow\neg A\,\&\,\neg B$, $\neg(\exists n)\,A(n)\longleftrightarrow(\forall n)\,\neg A(n)$, $\neg(\forall n)\,A(n)\longleftrightarrow(\exists n)\,A(n)$ для составных высказываний (составленных с помощью $\&$, $\vee$, $\exists$, $\forall$). Для сложных высказываний доказуемо

$$A\vee\neg A \tag{3}$$

и недоказуемо

$$A\,\&\,\neg A. \tag{4}$$

Доказательство принципа исключенного третьего (3) в форме $(\forall n)\,A(n)\vee(\exists n)\,\neg A(n)$ для логики предикатов использует правило позитивной логики

$$(\exists n)\,(A\vee B(n))\to A\vee(\exists n)\,B(n), \tag{5}$$

отвергаемое интуиционизмом, в отличие от соответствующего правила для «маленькой» конъюнкции

$$(A\vee B_1)\,\&\,(A\vee B_2)\to A\vee(B_1\,\&\,B_2). \tag{6}$$

Возникает проблема обоснования правил логики. Правило (6) легко сводится к следующим метаправилам

$$A\to B_1;\ A\to B_2\longleftrightarrow A\to B_1\,\&\,B_2,$$

$$A_1\to B;\ A_2\to B\longleftrightarrow A_1\vee A_2\to B,$$

$$A\underset{n}{\to}B(n)\longleftrightarrow A\to(\exists n)\,B(n), \tag{7}$$

$$A(n)\underset{n}{\to}B\longleftrightarrow(\forall n)\,A(n)\to B,$$

принятым для простоты в качестве «определений». Правилам вида

$$A\to B;\ B\to C\to A\to C \tag{8}$$

консеквенц-логики Лоренцен дает «оперативное» обоснование с помощью интерпретации знака $\to$ как сигнала операции: $A\to B$ понимается как предписание перехода от A к B. В случае (8) символ $\to$ означает предписание перехода от правил $A\to B$ и $B\to C$ к правилу $A\to C$ ($A\to C$ есть «следствие» правил $A\to B$ и $B\to C$ и означает, что от посылки A можно по правилам $A\to B$ и $B\to C$ перейти к выводу C).

На основе консеквенц-логики и (7) легко получить (6), но невозможно получить (5), которое используется для доказательства принципа исключенного третьего в форме

$$(\forall n)\,A(n)\vee(\exists n)\,\neg A(n).$$

Таким образом, (5) нельзя считать обоснованным в одинаковой мере с (6). Это означает, что мы употребляем принцип исключенного третьего лишь как фикцию, которая целесообразна тогда, когда известен способ преобразования фиктивно доказуемых высказываний, или части их, в эффективно доказуемые высказывания.

Взамен наивного понятия множества Лоренцен предлагает принять в качестве множеств лишь «конструктумы», т. е. лишь конструктивно определяемые совокупности индивидуумов (символов). Для построения конструктивного анализа автор считает необходимым не «всеобъемлющее» понятие множества, но лишь понятие множества натуральных чисел. Схематически построение конструктивного анализа выглядит следующим образом. Натуральное число z определяется конструктивно через

$$1\varepsilon z,$$
$$a\varepsilon z\to a+1\varepsilon z.$$

Совокупность S_0 натуральных чисел есть конструктум. Затем конструктивно определяются формы высказываний об S_0. Примитивные высказывания могут определяться подобно (1), (2). Дальнейшие высказывания определяются с помощью символов $\to$, $\&$, $\vee$, $\neg$, $\exists$, $\forall$. Из этих высказываний индуктивно можно определить новые дальнейшие высказывания и т. д.

Такая конструктивно полученная совокупность форм высказываний об S_0 называется элементарным языком $E(S_0)$ об S_0. Если S — конструктум, то $E(S)$ есть также конструктум. Образуя для каждого n

$$S_{n+1} = S_n \cup E(S_n),$$

мы всегда будем получать конструктумы. Объединение всех S_n есть конструктум S и мы можем образовать

$$S_{\omega+1} = S_\omega \cup E(S_\omega).$$

При этом все формы высказываний $S_{\omega+1}$ являются финитными в гильбертовском смысле этого слова. Следовательно, каждый раз мы имеем не наивное, конструктивное понятие множества. Остается лишь вопрос о том, как будет выглядеть анализ, построенный на основе этого понятия множества. Такой анализ, в отличие от интуиционистского, едва ли отклоняется от классического: процесс доказательства может всегда оставаться неизменным, уточняются лишь формулировки предложений через присоединение предиката «финитный» (т. к. каждый раз речь может идти лишь о множествах n-го горизонта, которые «финитны»). В конструктивном анализе Лоренцена доказывается принцип полноты в форме: для каждого финитного множества (т. е. множества n-го горизонта) действительных чисел существует действительное число в качестве нижней границы. Доказывается также предложение о покрытии. Однако вопрос о том, «спасаются» ли в этом анализе все предложения классического анализа, остается пока открытым. Необходима соответствующая проверка каждого классического предложения.

Автор рассматривает свои рассуждения лишь как один из возможных вариантов и считает, что вопрос об окончательной форме анализа еще не может считаться решенным. К. Н. Суханов

8438. **Область машины и область человека. Вернотт** (Le domaine de la machine et celui de l'homme. Vernotte Pierre), Dialectica, 1956, 10, № 4, 347—356. Discuss., 356—365 (франц.)

Автор использует основные положения теории множеств для обоснования аналогии между мышлением человека и работой электронных счетных машин, а также отмечает различие между машиной и человеком. В философской аргументации такого различия автор зачастую склонен все же к идеалистической концепции мышления и самосознания.

В опубликованной вслед за статьей дискуссии Бонзакк (F. Bonsack) выступает против заявления автора о том, что люди в отличие от машин обладают возможностью получать бесконечное множество мыслей и понятий. Вопрос же о прерывности и непрерывности мысли Бонзакк безосновательно вообще относит к области веры.

Возражая Бонзакку, автор справедливо указывает на то, что, хотя человека и окружают конечные предметы, но в его разуме имеется идеал бесконечности. При этом автор обосновывает понятие бесконечности и считает введение актуальной бесконечности в математику «событием номер один в истории мысли и философской реакцией против чрезмерного позитивизма в мире науки» (стр. 364). Что же касается проблемы непрерывности мысли, то автор согласен, что лишь поставил её, но не дал еще полного решения, поскольку математическая непрерывность не может быть проверена экспериментальным путем.

Значение отдельных положений статьи автора отмечает в ходе дискуссии также Руссо (P. F. Russo)
П. Е. Сивоконь

8439. **Кибернетика и некоторые вопросы физиологии и психологии. Бэлэнеску Ион Н.**, Вопр. философии, 1957, № 3, 153—166

8440. **О гипотезе прерывности пространства и времени. Аронов Р. А.**, Вопр. философии, 1957, № 3, 80—92

8441. **Математика — элемент культуры и технического мышления. Думитреску** (Matematica — element de cultură în gîndirea tehnică. Dumitrescu D.), Gaz. mat. şi fiz., 1957, A9, № 4, 169—183 (рум.)

8442. **Основы проекта космического языка. Фрейденталь** (Grundzüge eines Entwurfes einer kosmischen Verkehrssprache. Freudenthal Hans), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch, 1957, A60, № 4, 352—363; Indagationes math., 1957, 19, № 4, 352—363 (нем.)

Описание основных черт языка для общения людей с разумными существами на других небесных телах. Этот язык назван автором «линкос» (lincos — сокращение от латинского lingua cosmica, т. е. космический язык).

Принцип, положенный в основу конструирования этого языка, заключается в возможности сводить семантические отношения между знаками и обозначаемыми предметами к чисто синтаксическим отношениям между знаками. Автор предлагает начать с передачи сигналов об элементарных математических понятиях (для обозначения чисел рекомендуется двоичная система счисления). Вслед за этим считается возможным перейти к элементарным логическим понятиям. С. К. Шаумян

8443. **О роли математики в медицине. Алпатов В. В.**, Вопр. философии, 1957, № 6, 144—147

Замечая, что важные изменения, происходящие сейчас в биологии, отражаются и на медицине, автор выделяет среди этих изменений постепенную, хотя и неравномерную, математизацию наук о природе.

Упоминая, что в процессе этой математизации в медицину внедряются, с одной стороны, методы теории вероятностей и математической статистики, а с другой — дифференциальное и интегральное исчисление, автор приводит примеры этих внедрений и подчеркивает значение ряда проблем (расчет кривых возрастного изменения в зависимости от климатических зон, обработка материалов по медицинской биоклиматологии в связи с вопросами сезонной профилактики, математическая оценка терапевтического воздействия в связи с проблемой стандартизации лекарственных препаратов и т. д.). С. А. Стебаков

8444. **Медицина как точная наука. Алпатов В. В.**, Газ. «За мед. кадры», 1957, 18 ноября. № 33, стр. 4

Статья представляет сокращенное изложение статьи того же автора (реф. 8443).

Добавлен ряд предложений относительно внедрения математики в медицине (создание статистического центра при Академии медицинских наук, преподавание математической статистики в медицинских институтах, предложения, касающиеся издательской деятельности). Приводится библиография по медицинской статистике (4 назв.). Статья печатается в дискуссионном порядке. С. А. Стебаков

8445. **Новые книги (по математике). Невский В. А.**, Матем. в школе, 1957, № 6, 86—88

8446. **Резолюция бюро Объединенного научно-методического семинара кафедр высшей математики втузов г. Москвы.** Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 273—277

Принята 14 ноября 1956 г. по докладам А. Ф. Бермана, В. М. Тепелева, В. Б. Гуревича, Р. С. Гутера, В. В. Зорина о программах и учебниках по математике в средней школе в свете требований втузов.

В резолюции среди критических замечаний содержатся немотивированные отрицательные характеристики. Оценка общего состояния, возможностей и задач советской средней школы не находится в соответствии с мнением научной и педагогической общественности.
К. А. Рыбников

8447. **Об умножении отрезка на число и отношении двух отрезков.** Мацкин М. С., Матем. в школе, 1958, № 1, 1—7

8448 К. **Справочник по математике. Для инж. и учащихся втузов.** Изд. 6-е, стереотип. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. М., Гостехиздат, 1956, 608 стр., илл., 14 р. 30 к.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

8449. **Третий Международный коллоквиум по истории математики в математическом исследовательском институте в Обервольфахе (ФРГ, Швабия, 11—13 апр. 1957 г.).** Гофман Иос. Э. В сб.: Вопр. истории естествозн. и техн. Вып. 5, М., АН СССР, 1957, 220—221

Краткое сообщение руководителя коллоквиума. Упомянуты доклады и сообщения: Буркхардт, О папирусах, содержащих эфемериды; Геллер, О работах Стаматиса в связи с подготовкой к изданию «Начал» Евклида на древне- и новогреческом языках; Гаммер, О ходе работ по изданию сочинений Кеплера; Скриба, О жизни и творчестве Дж. Грегори; Стулов, Эволюция требований, предъявляемых к математической точности; Фогель, Источники задач эйлеровской арифметики; Функ, О двух письмах Эйлера к Лагранжу; Гофман, Анализ математического мышления Эйлера.

8450. **Вклад украинских математиков.** Гнеденко (Вклад українських математиків. Гнеденко Б. В.), Наука і життя, 1957, № 8, 3—5 (укр.)

Популярная статья. Подчеркивается все возрастающая роль математики в жизни современного общества. Указывается на большой вклад советских и, в частности, украинских математиков в общее развитие математики. Кроме старых математических школ в Киеве, Харькове и Одессе, после Октябрьской революции созданы значительные научные коллективы математиков и в других городах Украины. Перечисляются крупнейшие украинские ученые, внесшие большой вклад в разработку важных вопросов алгебры, теории функций, математической физики, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей, геометрии и вычислительных методов математики.
В. Ф. Рогаченко

8451. **Недавние открытия в вавилонской математике. III. Трапеции и квадраты.** Джонс (Recent discoveries in Babylonian mathematics. III. Trapezoids and quadratics. Jones Phillip S., Ed.), Math. Teacher, 1957, 50, № 8, 570—571 (англ.)

Части I и II см. РЖМат, 1958, 1716, 7387.

Автор рассматривает задачу из клинописного текста, опубликованного в работе Таха Бакира (Taha Baqir, Sumer, 1950, 6, 130—148). Требуется найти стороны равнобедренной трапеции, если известна ее площадь, разность оснований, а боковая сторона выражается линейно через сумму оснований.

Автор в заключение утверждает, что вавилоняне умели решать квадратные уравнения.
А. Е. Раик

8452. **Из истории геометрических построений.** Тесленко (З історії геометричних побудов. Тесленко І. Ф.), Доповіді та повідомлення. Львівськ. держ. пед. ін-т, 1957, вип. 2, 14—25 (укр.)

Краткий обзор развития геометрических построений, — преимущественно в работах греческих математиков — от Фалеса до Паппа. Обзору предпосланы некоторые сведения о возникновении геометрических задач, в частности конструктивных, у вавилонян, египтян и китайцев. В конце работы приведены основные факты, относящиеся к развитию геометрических построений одним циркулем в XV—XVIII вв.
В. Ф. Рогаченко

8453. **К выходу в свет первого курса аналитической геометрии в России.** Глатенок В. Д., Уч. зап. Гомельск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 3, 155—166

Период развития аналитической геометрии от работ Ферма и Декарта до работ Ньютона, Бине и Лопиталя автор характеризует «как период развития и совершенствования координатного метода и накопления аналитически изученного геометрического материала». Открытие нового этапа в развитии аналитической геометрии принадлежит Л. Эйлеру, который во II томе «Введения в анализ» (1748 г.) поставил и разрешил широкий круг вопросов аналитической геометрии, включая и вопросы геометрии пространства. В XVIII в. аналитическая геометрия впервые вводится в курсы математики высшей школы в виде глав, содержащих теорию конических сечений и элементы теории прямой. Аналитическая геометрия в пространстве входит в курсы математики высшей школы только в первой четверти XIX в. Первыми работами по аналитической геометрии в пространстве в России были работы С. Е. Гурьева «О разделении поверхностей второго порядка на роды и виды» (1805 г.) и А. Маюрова «Вышняя геометрия в пространстве» (1817 г.). Обе эти работы оказали большое влияние на формирование первых курсов аналитической геометрии в России.

В 1819 г. вышел первый в России систематический курс «Начальные основания аналитической геометрии» Я. А. Севастьянова (1796—1849 гг.). Автор отмечает, что в ряде вопросов этот курс по конкретности, ясности и последовательности изложения выгодно отличается от современных ему иностранных работ Био и Прони. Книга Я. А. Севастьянова была принята Академией наук с «отличным одобрением» и она до 1836 г., т. е. до выхода курса аналитической геометрии Брашмана, была единственным курсом аналитической геометрии в России.
Е. С. Шатунова

8454. **Сравнение коммерческой математики Востока и Запада в XVI в.** Такэда, Кагакуси кэнкю, J. History Sci., Japan, 1956, № 36, 17—22; № 38, 10—16; № 39, 7—14 (японск.)

8455. **В чем содержание «Новой науки» Тартальи?** Натуччи (Che cosa contiene la «Nova Scientia» di Tartaglia? Natucci Alpinolo), Giorn. mat. Battaglini, 1956, 84, № 2, 261—271 (итал.)

Одна из многих статей, посвященных четырехсотлетию со дня смерти Тартальи (13 декабря 1557 г.; дата рождения неизвестна). Главными трудами Тартальи являются: Della nuova scientia, 1537; Quesiti et inventioni diverse, 1546; General trattato di numeri et misure, 1556—1560.

Первые две части «Новой науки» содержат попытку изложения основ механики по образцу евклидовых «Начал». Многие определения и постулаты являются тавтологиями. В третьей части рассматриваются вопросы прикладной геометрии, применяемой автором к решению вопросов стрельбы. В статье воспроизведены некоторые приборы Тартальи для определения высоты предметов и расстояния до них. Книга в целом является ранней попыткой создания руководства по механике.
И. Я. Депман

8456. **Вычисления с радикалами у Николо Тартальи.** Натуччи (Il calcolo dei radicali in Nicolò Tartaglia. Natucci Alpinolo), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 4, 594—598 (итал.)

Приводятся примеры вычислений Тартальи с радикалами, находящиеся в V книге «General trattato di numeri et misure» (1556—1560).

Все выкладки, несмотря на неуклюжие обозначения, показывают, что Тарталья вполне владел способами вычисления радикалов и оперирования с ними.

И. Я. Депман

8457. **Архивное дело о жизни Марина Геталдича. Павлович** (Архивска грађа о животу Марина Геталдића. Павловић Драгољуб), Зб. радова. Српска АН, 1957, кн. 55, 77—87 (сербохорв.; рез. франц.)

На основании материалов архива Дубровницкого государства автор уточняет биографические данные Геталдича: год рождения — 1568 г., новые данные о его образовании, занятиях на государственной службе, посещении Рима и Константинополя, а также сведения о семье. Математическое творчество Геталдича не освещено.

Э. Кольман

8458. **Марин Геталдич — математик, физик и астроном. Стипанич** (Marin Getaldić — Dubrovački Matematičiar, fizičar i astronom. Stipanić Ernest), Настава мат. и физ. средньој школи, 1953, 2, № 3, 159—168 (серб.)

8459. **По поводу лицея Ферма. Итар** (A propos du lycée Fermat. Itard Jean), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1957, 37, № 187, 25—28 (франц.)

15 января 1957 г. Тулузский лицей был переименован в лицей Ферма. В связи с этим автор излагает ряд фактов из жизни и деятельности Ферма. Отличительной чертой Ферма является то, что он почти не публиковал своих работ. Поэтому очень трудно исследовать влияние его творчества на развитие математики.

Основная цель автора — доказать, что Ферма одновременно с Кавальери и независимо от него пришел к понятию неделимых. Этот факт подтверждал Паскаль в своем «Трактате о порядках чисел» (1654).

Ю. С. Цапин

8460. **Готфрид Вильгельм Лейбниц — многогранный гений** (Goffredo Guglielmo Leibniz: genio multiforme), Sci. giov., 1957—1958, 7, № 1-2, 1—7 (итал.)

Обзор жизни и творчества Лейбница, изложенный для школьников с использованием лишь самых начальных понятий анализа бесконечно малых. И. Я. Депман

8461. **К 250-летию со дня рождения Леонарда Эйлера.** Укр. матем. ж., 1957, 9, № 2, 119

Информация о юбилейных мероприятиях в Ленинграде, Москве, Киеве и Берлине и об изданиях, посвященных юбилею.

8462. **Жизнь и научная деятельность Даниила Бернулли (к 175-летию со дня смерти). Путята** (Життя та наукова діяльність Даніїла Бернуллі (до 175-річчя з дня смерті. Путята В. Й.), Прикл. механіка, 1957, 3, № 4, 485—487 (укр.)

Краткий очерк жизни и деятельности Д. Бернулли (1700—1782). В основном рассматривается Петербургский период его жизни. Очерк содержит беглую характеристику работ Бернулли по математическому анализу и его приложениям к мореплаванию и физиологии, по теории вероятностей, математической физике и механике и более подробную — по гидродинамике.

С. Н. Киро

8463. **К вопросу об идентичности взглядов Н. И. Лобачевского и К. Маркса на главный пункт оснований дифференциального исчисления. Новак И. П.,** Уч. зап. Казахск. ун-та, 1957, 32, 64—70

Автор поставил цель: показать роль идентичности научных открытий как одной из форм проявления объективности науки. Тема не раскрыта. Идентичность взглядов Лобачевского и Маркса не доказана. Вопрос о главном пункте оснований дифференциального исчисления изложен ошибочно.

Н. А. Киселева

8464. **Н. И. Лобачевский как инициатор введения приближенных вычислений в среднюю школу. Лобанов И. Б.,** Матем. в школе, 1958, № 2, 8—16

Дается анализ методов приближенных вычислений в книге Н. И. Лобачевского «Алгебра или вычисление конечных». Приводится много конкретных примеров: понятие о точности вычисления, определение иррационального числа через его рациональные приближения, теорема о возможности представления числа с любой степенью точности при помощи десятичной дроби, приближенное вычисление корней, приближенное решение уравнений и др.

Делается вывод о необходимости использования наследия Лобачевского в практике преподавания.

Е. В. Вандышева

8465. **Коши в Турине. Терначини** (Cauchy a Torino. Terracini Alessandro), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 2, 290—298 (итал.)

Коши (1789—1857), уехавший из Франции в Турин (Италия) после июльской революции 1830 г., был назначен 5 января 1832 г. профессором кафедры высшей физики, пустовавшей после смерти Авогадро. Уже в следующем 1833 г. Коши уехал в Прагу. К Туринскому периоду жизни Коши относятся его работы о сходимости ряда Тейлора и начала его теории аналитических функций. Коши был связан с моденским математиком Руффини, с туринским математиком Феличе Кио (Chio), которого он поддержал в споре с Менабреа о ряде Лагранжа (1846 г.) и Фаа ди Бруно, учившимся у Коши в Париже в период между 1849 и 1857 гг.

Эта статья Терначини опубликована также в Rend. Semin. Mat. Univ. e Politecn. Torino, 1956—1957, 16, 159—168, где к ней добавлены обширные примечания (стр. 168—203) и 10 фотокопий рукописей Коши.

И. Н. Веселовский

8466. **Об одном замечании М. В. Остроградского по поводу первой аксиомы геометрии. Хильквич Э. К.** В сб.: Вопр. истории естествозн. и техн. Вып. 5, М., АН СССР, 1957, 162—164

Автор комментирует замечание Остроградского, приведенное в «Руководстве начальной геометрии» (1855), касающееся «вещественности или идеальности» предположения о существовании линий, определяемых условием прохождения через две данные точки, и соответствующего характера геометрии. Последняя во втором случае «была бы чистым умозрением без всяких практических приложений, что, впрочем, нисколько не уменьшило бы ее достоинства, ни ее важности, как упражнение умственное, изощряющее наши способности и доставляющее пищу для самых глубоких рассуждений». Это замечание сопоставляется с известным высказыванием Лобачевского о широких возможностях аналитических применений его новой геометрии, если даже она «и не существует в Природе».

Б. Л. Лаптев

8467. **К вопросу о работах П. Л. Чебышева по астрономии. Прудников В. Е.** В сб.: Истор.-матем. исследования, вып. 10., М., Гостехиздат, 1957, 639—648

Отмечается интерес П. Л. Чебышева к математическим проблемам, важным для астрономии. Проявлением этого интереса был, в частности, доклад Чебышева «Об определении орбиты планет по многим наблюдениям», сделанный на V съезде русских естествоиспытателей и врачей (Варшава, 1876). Предложенный в этом докладе метод интерполирования имеет, как показал О. А. Баклунд, большие преимущества перед методом наименьших квадратов.

В последние годы жизни Чебышев интересовался вопросом о разложении пертурбационной функции. В 1892 г. он разработал способ разложения главной части этой функции, основанный на формуле, выведенной самим Чебышевым в мемуаре «О приближенных выражениях квадратного корня с помощью простых дробей» (1884). Однако работы по этому вопросу Чебышев не опубликовал и среди его рукописей она не обнаружена. О своих результатах Чебышев лично сообщал Эрмиту, который оценил способ Чебышева (в письме ему от 23 ноября 1893 г.) как «великое и прекрасное открытие». Баклунд изложил этот способ в статье (Astron. Nachr., 1894, 135, № 3223), в которой показал практическую ценность способа. Приводится (стр. 644—648) русский перевод указанной статьи Баклунда. Ю. Г. Перель

8468. **Из переписки П. Аппеля, Ж. Адамара, Г. Буркхардта, В. Вольтерра, П. Дюгема, С. Жордана, А. Пуанкаре и Н. Радо с академиком А. М. Ляпуновым. Смирнов В. И.**, Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1957, 19, 690—719

Публикация в хронологическом порядке на языке оригинала (французском) и в переводе на русский язык пяти писем Аппеля, трех писем Адамара, одного письма Буркгардта, одного письма Вольтерра, четырех писем Дюэма, одного письма Жордана, трех писем Пуанкаре и двух писем Радо к Ляпунову. Письма охватывают 1885—1914 гг. и касаются в основном магистерской диссертации Ляпунова «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости», его докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения», а также работ, как непосредственно связанных с этими диссертациями, так и относящихся к теории потенциала.

Письма свидетельствуют о большом интересе иностранных ученых к работам Ляпунова и содержат весьма высокую оценку ими этих работ. Признается, что в ряде случаев результаты Ляпунова опережали достижения ведущих зарубежных ученых (Пуанкаре и Дюэма — по теории фигур равновесия вращающейся жидкости, Адамара — по теории устойчивости).

Письма снабжены примечаниями.

Публикации предпослан краткий очерк, содержащий основные биографические сведения о Ляпунове и общую характеристику тех его работ, которые упоминаются в письмах.

Опечатки: в названии сообщения должно быть Ж. Жордана; на стр. 690, 2-я строка снизу — Д. К. Былева. С. Н. Киро

8469. **Александр Михайлович Ляпунов.** Укр. матем. ж., 1957, 9, № 2, 119—120

Памятная заметка об исполнившемся в 1957 г. столетии со дня рождения А. М. Ляпунова (6 мая 1857 г.— 3 октября 1918 г.). Особо упомянуты его заслуги в развитии математики на Украине.

8470. **Математика на съездах русских естествоиспытателей и врачей. Киро С. Н.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 231—232

8471. **Из истории развития физико-математических наук в Белоруссии. Фёдоров, Супруненко, Некрашевич** (З гісторыі развіцця фізіка-матэматычных навук у Беларусі. Фёдараў Ф. І., Супруненка Д. А., Некрашэвіч І. Г.), Весці АН БССР. Сер. фіз.-тэхн. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. н., 1957, № 3, 17—20 (белорусск.)

Краткий очерк развития физико-математических наук в Белоруссии. А. А. Гусак

8472. **Математические исследования Узбекского государственного университета. Сабиров М. С., Искандеров Р. И.**, Тр. Узб. ун-та, 1957, вып. 76, 101—124

Обзор развития математики в Узбекском государственном университете за весь период его существования (основан в 1933 г.). Дана подробная характеристика научной деятельности проф. И. С. Куклеса и проф. Н. П. Романова (с 1952 г. работает в САГУ) и их учеников. Однако, отсутствует упоминание об учебной, научной и организационной деятельности доц. Сабирова М. А., который в течение ряда лет работал доцентом и деканом физико-математического факультета УзГУ. Т. А. Сарымсаков

8473. **Эварист Галуа.** Укр. матем. ж., 1957, 9, № 2, 120

Памятная заметка об исполнившемся 31 мая 1957 г. 125-летии со дня смерти Э. Галуа (1811—1832).

8474. **Политические и социальные взгляды Бернарда Больцано. Сейдлерова** (Politické a sociální názory Bernarda Bolzana. Seidlerová Irena), Čas. pěst. mat., 1956, 81, № 4, 388—390 (чешск.)

Краткий обзор политических и социальных взглядов Больцано; автор приходит к выводу, что учение Больцано по своему содержанию и по форме примыкает к социалистическим утопиям XVIII в.; больше всего оно похоже на учение Мабли (Mably). O. Vejvoda

8475. **Бернхард Риман. Андерс** (Bernhard Riemann. Anders G.), Wiss. und Fortschr., 1957, 7, № 7, 259 (нем.)

8476. **Владимир Иванович Смирнов. (К семидесятилетию со дня рождения). Александров П. С., Векуа И. Н., Келдыш М. В., Лаврентьев М. А.** Список печатных работ В. И. Смирнова. Успехи матем. наук, 1957, 12, № 6, 197—205

8477. **Гурий Николаевич Савин. (К пятидесятилетию со дня рождения). Ишлинский А. Ю., Парасюк О. С., Шевело В. Н.**, Укр. матем. ж., 1957, 9, № 2, 225—229

8478. **Александр и Вера Миллер. Моисил** (Alexandru şi Vera Myller. Moisil Gr. C.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, A7, № 4, 185—189 (рум.)

Статья, посвященная 75-летию румынских математиков профессора Веры Миллер-Лебедевой (родилась в 1880 г.) и академика Александра Миллера (родился в 1879 г.).

8479. **Александр и Вера Миллер. Попа** (Alexandru şi Vera Myller. Popa Ilie), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR. Fil. Jaşi, 1955, Ser. 1, 6, № 1-2, 1—12 (рум.)

См. также реф. 8478.

8480. **Пауль Функ (род. 1886). К 70-летию со дня рождения. Баш** (Paul Funk. Zum 70. Geburtstag. Basch A.), Österr. Ingr-Arch., 1956, 10, № 2-3, 117—119 (нем.)

8481. **70-летие (26 июня 1955 г.) профессора Франтишека Кадержавека. Меншик** (Prof. Ing. Dr techn. František Kadeřávek sedmdesátníkem (26.6. 1955) Menšik Miroslav), Mat. ve škole, 1955, 5, № 8, 498—500 (чешск.)

8482. **Жизнь и деятельность А. А. Чупрова. Карпенко Б. И.**, Уч. зап. по статист., 1957, 3, 282—317

Работа содержит главы: I. Детство и годы учения (1874—1901); II. Петербургский период жизни (1902—1916); III. Заграничный период жизни (1917—1926); IV. А. А. Чупров как ученый и как человек; V. Признание идеи А. А. Чупрова и их влияние на науку у нас и за границей.

Подчеркивается заслуга А. А. Чупрова в математическом (теоретико-вероятностном) обосновании статистического метода исследований. Кратко разобраны основные работы А. А. Чупрова. Л. Е. Майстров

8483. **Памяти члена-корреспондента Михаила Чиполла. Сансоне** (Commemorazione del corrispondente Michele Cipolla. Sansone Giovanni),

Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 21, № 6, 507—523 (итал.)

Чиполла (1880—1947) был с 1911 г. профессором алгебры в Катании и с 1923 г. — в Палермо и членом нескольких итальянских академий. В статье указано, что работы его по арифметике и теории чисел соприкасаются с работами И. М. Первушина и И. М. Виноградова, алгебраические — с идеями Эйлера и Кэли, а исследования по теории конечных групп (основные достижения его) шли параллельно с работами Хёлдера и Бианки. Много внимания Чиполла уделял основаниям математики, ее истории и вопросам преподавания. К статье приложен список работ Чиполла: 90 мемуаров и 13 курсов лекций; упомянуты 32 выпуска руководств для школ. И. Я. Депман

8484. **Памяти Бертрана Гамбье** (In memoria di Bertrand Gambier), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 4, 599—607 (итал.)

Оценка трудов французского математика Гамбье (1879—1954) дана Винченсини (РЖМат, 1956, 102, 7833). В настоящей статье дается перечень трудов Гамбье (свыше 200), печатавшихся в изданиях разных стран. Работы Гамбье в основном геометрические. И. Я. Депман

8485. **Эрнест Вильям Барнс (1874—1953). Уиттекер** (Ernest William Barnes, 1874—1953. Whittaker Edmund T.), Obit. Notices Roy. Soc. London, 1954, 9, 15—25 (англ.)

8486. **Некролог проф. д-ра Ладислава Зейферта (1883—1956). Клапка** (Prof. dr Ladislav Seifert zemřel. Klapka Jiří), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 3, 370—376 (чешск.)

6 февраля 1956 г. умер Ладислав Зейферт, профессор Университета в Брно. Его работы (список их дается) относятся к геометрии.

8487. **Некролог профессора Карела Чупра (1886—1956). Балада** (Profesor PhDr Karel Čupr zemřel. Balada Fr.), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 4, 494—495 (чешск.)

8488. **Джон Уишарт (1898—1956). Некролог. Эруин** (Dr. John. Wishart. Obituary. Irwin J.O.), Nature, 1956, 178, № 4528, 294 (англ.)

8489. **Борец за материалистическую науку. К годовщине со дня смерти О. Ю. Шмидта. Щербаков Д. И., Левин Б. Ю.**, Природа, 1957, № 9, 40—46

8490. **Памяти Ростислава Николаевича Бончковского. (Редактор первой серии сб. «Матем. просвещение»)**, Матем. просвещение, вып. 1, 1957, 7—8

8491. **О матери Анри Пуанкаре. Белливье** (Autour de la mère d'Henri Poincaré. Bellivier André) Rev. univ., 1957, 66, № 4, 214—217 (франц.)

8492. **Библиография трудов профессора В. П. Ермакова. Агафонова А. К.**, Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 401—407

8493 К. **Прикладные методы анализа у Эйлера. Симонов Н. И. М.**, Гостехиздат, 1957, 167 стр., 6 р. 15 к.

Автор считает все научное наследие Л. Эйлера в области математического анализа развитием в той или иной форме прикладных методов. В работе рассматривается лишь одна сторона этого наследия, а именно эйлеровские методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Основное внимание уделяется наименее известным прикладным методам Эйлера в этой ветви анализа, так как ряд таких методов не нашел до сих пор надлежащего освещения как в специальной, так и в историко-математической литературе. Во введении указан ряд вопросов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, вклад Эйлера в которые недостаточно изучен и изложен в литературе; характеризуются четыре направления в развитии теории дифференциальных уравнений в XVIII в. Одно из них — теория особых решений — в книге не затрагивается, каждое из остальных составляет предмет отдельной главы книги.

Гл. I — «Методы интегрирования некоторых классов нелинейных уравнений» — дает общую характеристику основных направлений исследований Эйлера в этой области с указанием задач механики и геометрии, которые были стимулом для этих исследований. Затем подробно рассмотрено интегрирование уравнения Риккати с помощью цепных дробей, интегрирование некоторых нелинейных уравнений с помощью понижения порядка и применение метода интегрирующего множителя к уравнениям порядка выше первого. В заключение кратко рассмотрены малоизвестные работы Миндинга об определении частных интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений, как развивающие некоторые методы Эйлера.

Гл. II — «Методы интегрирования некоторых классов линейных уравнений с переменными коэффициентами» — кроме обзора основных направлений работ Эйлера в этой области, содержит обзор исследований Эйлера по уравнениям второго порядка с коэффициентами частного вида с указанием связи этих работ с теорией ряда специальных функций (на эту связь указывал Д. А. Граве в работах, оставшихся, по-видимому, неизвестными автору: «Об уравнениях Эйлера и их применении в теории упругости», Изв. АН СССР, 1926, 917—947 особ. стр. 919 и сл.; «Функции математической физики и гипергеометрический ряд» Ж. Ин-ту матем. ВУАН, 1934, № 3-4, 3—23), изложение эйлеровского метода интегрирования с помощью определенных интегралов и забытой работы Эйлера по теории сопряженного уравнения.

В гл. III — «Методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений» — рассмотрены результаты Эйлера по усовершенствованию его же метода ломаных, развитие в его работах метода степенных рядов, применение в ранних работах Эйлера разложений по степеням малого параметра и вариации произвольного постоянного, приближенное интегрирование с помощью тригонометрических рядов. Заглавие последнего параграфа главы — «Приближенное решение некоторых краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка» — не совсем точно, так как по сути там рассматриваются только некоторые методы Эйлера приближенного решения трансцендентных уравнений.

Автор неоднократно указывает, что его изложение является далеко не полным, однако ему удалось установить принадлежность Эйлеру многого, что обычно в литературе связывалось с другими именами, а также, что важнее, приблизить многие результаты к современной математике. Необходимость пересмотра классического наследства в области приближенного анализа с учетом современных вычислительных возможностей, о чем автор говорит во вступлении к третьей главе, не подлежит сомнению. Библ. 76 назв.

И. Б. Погребысский

8494 К. **Род Эйлер—Шёльпи. История одной старой фамилии. Эйлер** (Das Geschlecht Euler-Schölpi. Geschichte einer alten Familie. Euler Karl. Giessen, Wilhelm Schmitz. Verlag, 1955, 320 S., 10 Taf., 16 Bl. Abb.) (нем.)

Подробное генеалогическое исследование о фамилии Эйлер-Шёльпи, к которой принадлежал Леонард Эйлер. Автор находит истоки этой фамилии в XIII в. в окрестности г. Линдау на Боденском озере. Приведены материалы о различных ветвях фамилии, вплоть до настоящего времени.

На 16 отдельных листах приведены портреты некоторых членов фамилии Эйлер и отдельные документы, в частности фотокопия подлинного письма Л. Эйлера

от 18 мая 1754 г. Л. Эйлеру и его наследникам посвящен последний, десятый, раздел книги (стр. 252—297), снабженный как и все предыдущие, подробным генеалогическим деревом. Общее число упомянутых членов фамилии Эйлер-Шёльпи составляет около семисот пятидесяти.

При составлении книги, законченной в основном перед второй мировой войной, автор использовал многочисленные архивные источники в Германии и Швейцарии. Им обнаружено много новых материалов о предках Л. Эйлера и предложены новые, правдоподобные соображения о происхождении фамилии. Сведения о наследниках Л. Эйлера, живших в XIX в. по большей части в России и проживающих, частично, в СССР, приведены без использования русских архивных материалов и потому не обладают исчерпывающей полнотой. Однако они значительно полнее приведенных Тирше (Thiersch H., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Phil—Hist. Kl., 1930, Heft 3).

Книга снабжена подробными именным (до полутора тысяч имен, кроме членов фамилии Эйлер-Шёльпи) и библиографическим (свыше 120 назв.) указателями.

Г. К. Михайлов

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

8495. **О серии «Популярные лекции по математике».** Б е с к и н Н. М., Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 275—290

Обзор 22 брошюр, изданных ГТТИ (ныне Государственное издательство физико-математической литературы) в 1950—1956 гг. под указанным общим заглавием. И. Я. Депман

8496. **Учитель математики и естествознания в недалеком будущем.** З а н т (The mathematics and science teacher of tomorrow. Z a n t J a m e s H.), Math. Teacher, 1957, 50, № 6, 426—431 (англ.)

Статья посвящена вопросу обучения математике в США. Указывается, что в Советском Союзе растет число хорошо обученных математиков, физиков, инженеров, в то время как в США количество их резко уменьшается. Отмечается в качестве основной причины слабая подготовка учителей.

Автор останавливается на возможностях введения в преподавание элементов современной математики и предлагает меры по повышению квалификации учителей математики. Н. П. Бибикова

8497. **Многообещающая практика в подготовке учителей математики.** Б р а у н (Promising practices in mathematics teacher education. B r o w n J o h n A.), School Sci. and Math., 1958, 58, № 1, 25—40 (англ.)

Приводятся высказывания восьми преподавателей университетов и учительских колледжей различных городов США о математической подготовке учителей средней школы в учительских колледжах. Отмечается, что в системе подготовки учителей математики имеются большие недостатки. В числе их, например, такие: студенты недостаточно хорошо понимают основные идеи современной математики, иногда допускается недостаточная строгость логических доказательств, в учебных планах колледжей отсутствуют предметы, важные для будущего учителя как с теоретической, так и с практической точки зрения (в том числе математическая статистика). Указывается, что распространенные представления о геометрии устарели и студентам следует прививать новый взгляд на геометрию. Некоторые авторы приводят проекты той части учебного плана, которая относится к математическим дисциплинам. В эти планы включаются, например, алгебра, тригонометрия, аналитическая геометрия, математический анализ, основания арифметики, история математики, теория чисел, математическая статистика.

Е. В. Вандышева

8498. **Математика и конкретное.** П у ч-А д а м (Les mathématiques et le concret. P u i g - A d a m P e d r o), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1957, 37, № 187, 31—33 (франц.)

Резюме сообщения, с которым член Испанской Академии наук Пуч-Адам выступил в Мадриде 21 апреля 1957 г. Автор критикует тех, кто ограничивает преподавание математики изложением только динамики операций, так как такая концепция приводит к забвению реального мира. Он указывает, что каждой математической задаче предшествует абстрагирование от некоторой физической задачи и что каждая решенная задача путем конкретизации находит применение в физике.

В преподавании математики необходимо стараться довести до сознания ученика эти два процесса — абстрагирование от реального мира и возвращение к нему путем конкретизации математических истин. Это сделает математику интересной для всех учащихся и пробудит в них чувство контроля по отношению к физически абсурдным результатам. Ю. С. Цапин

8499. **Перемены и постоянство в преподавании математики в немецких университетах с начала XIX в.** Б е н к е (Wandel und Beständigkeit im mathematischen Unterricht an den deutschen Universitäten seit Beginn des 19. Jahrhunderts. B e h n k e H e i n r i c h), Math.-phys. Semesterber., 1956, 5, № 1-2, 20—33 (нем.)

Исторический очерк о связях между научными исследованиями и преподаванием математики в немецких университетах и в средней школе. Написан на основе исследований немецкого историка математика Лорея (W. Lorey, 1873—1955) и посвящен его памяти.

Приведенный фактический материал, по мнению автора, показывает, что в течение указанного времени преподавание математики в университетах все теснее связывалось с задачами научного исследования. В то же время углублялся разрыв между школьным и университетским преподаванием математики. Этот разрыв не смогли устранить усилия Клейна, Вебера и других ученых и к настоящему времени он принял недопустимые размеры. А. В. Дорофеева

8500. **Программа курса математики и обзор учебников алгебры французской школы второй ступени.** М и л о в а н о в а Л. Н., Матем. в школе, 1958, № 1, 60—72

В статье содержатся краткие сведения о структуре общеобразовательной средней школы во Франции, программы преподавания математики для различных отделений и последовательных классов этой школы, таблица учебного времени, отводимого на изучение математики в разных классах, и обзор принятых во французской школе учебников алгебры проф. А. Бенуа (издания 1947—1954 гг.). Автором статьи использованы материалы XIX Международной конференции по народному образованию состоявшейся в Женеве в 1956 г., а также «Nouveaux horaires et programmes de l'enseignement du second degré» (Paris, 1955). Сделано несколько частных критических замечаний методического характера. Отмечена «исключительная доступность изложения» в рассмотренных учебниках и высказано мнение, что знакомство с ними могло бы принести немалую пользу и советским учителям. Ю. М. Гайдук

8501. **По страницам журнала «Mathematik und Physik in der Schule» (1955—1956).** Г а й д у к Ю. М., Математика в школе, 1958, № 1, 52—59

Обзор материалов за 1955—1956 гг., Журнал выходит в ГДР ежемесячно, редактор — Ридель. Обзор касается вопросов об учебных планах и программах,

об учебниках, о подготовке преподавателей математики; вопросов политехнизации курса математики, методики изучения в средней школе функций и элементов высшей математики и др. С. Н. Киро

8502. **О профессиональной и политехнической подготовке учителя на физико-математическом факультете педагогических институтов. Суворов Н. П.,** Изв. Акад. пед. наук РСФСР, 1955, вып. 74, 171—183

8503. **Советы студентам относительно проведения докладов на математические темы. Форсайт** (Suggestions to students on talking about mathematics papers. Forsythe G. E.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 1, 16—18 (англ.)

8504. **Как изучать математику? Митринович** (Kako prići matematici? Razgovori o učenju matematike. Mitrinović D. S. 4 str. (poseban otisak)), Repr.-Mat.-fiz. list., 1956, 6, № 2, 41—43 (сербо-хорв.)

Беседа для поступающих в университет об отличии занятий математикой в высшей школе от занятий в гимназиях и техникумах. И. Я. Депман

8505. **В секции средней школы Московского математического общества. Дорф П. Я.,** Матем. в школе, 1958, № 1, 82—86

8506. **В секции средней школы Московского математического общества (1956—1957). Дорф П. Я.,** Матем. в школе, 1958, № 2, 90—92

8507. **К вопросу об изучении анализа бесконечно малых в средней школе. Рёйтер** (Zur Behandlung der Infinitesimalrechnung in der Oberschule. Reuter Dietrich), Math. und Phys. Schule, 1958, 5, № 1, 44—53 (нем.)

Статья в рамках дискуссии, ведущейся с 1955 г. на страницах журнала Math. und Phys. Schule по вопросам постановки курса исчисления бесконечно малых в двенадцатилетней полной средней школе ГДР (так называемой «обершуле»).

Автор присоединяется к критике методики «параллельного» прохождения основных операций дифференциального и интегрального исчислений. Он считает также необходимым пересмотреть установленный общий порядок прохождения частей курса (первая часть дифференциального исчисления, первая часть интегрального исчисления, вторая часть дифференциального исчисления, аналитическая геометрия, вторая часть интегрального исчисления), особенно настаивая на том, чтобы аналитическая геометрия была поставлена в самом начале курса.

Основное содержание статьи составляют замечания (методического и научного характера) относительно «узловых моментов» курса. Автор указывает на желательность более точной и полной трактовки в школьных учебниках понятий предела, непрерывности (последнее оказалось особенно неудачным в стабильных учебниках) и дифференцируемости. Более подробно останавливается автор на проблеме введения в интегральное исчисление, склоняясь к требованию начинать изучение последнего с понятия определенного интеграла: этот путь должен позволить учащимся «пережить всю историю открытия анализа». Подчеркнута необходимость раскрытия учащимся роли непрерывности функции в вопросе о связи между интегрируемостью и дифференцируемостью. Попутно отмечено, что во многих германских высших школах в больших курсах анализа для начинающих уже рассматривается понятие интеграла Лебега.

Подчеркнуты задачи воспитания у школьников в процессе обучения математике критического и абстрактного мышления.

Примечание референта: Говоря (стр. 47) об «известных со времени Вейерштрасса примерах непрерывных нигде не дифференцируемых функций», автор статьи не отмечает приоритета Больцано.

Ю. М. Гайдук

8508. **Преподавание теории пределов в 9-м классе средней школы. Тихомиров Р. И.,** Уч. зап. Краснодарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 15, 59—69

Автор указывает, что в IX классе средней школы должно быть дано четкое понятие о пределе числовой последовательности. Из 19 часов, отведенных в курсе алгебры на тему «Последовательности чисел», автор считает возможным на изучение предела последовательности израсходовать 9—10 час. В статье рассматривается примерный план занятий, содержание каждого занятия и даются некоторые доказательства, которые автор считает наиболее рациональными для учащихся средней школы. Методической разработки темы автор не дает. Е. С. Шатунова

8509. **Понятие непрерывности функции в средней школе. Севбо В. И.,** Докл. и сообщ. Ужгородск. ун-та. Сер. физ.-матем. и хим., 1957, № 1, 10—12

Чтобы подготовить учащихся к изучению в X классе средней школы элементов дифференциального исчисления, автор считает необходимым предварительное ознакомление их с понятием непрерывности функции. В VIII классе при изучении иррациональных чисел целесообразно показать, что множество действительных чисел образует «непрерывную (сплошную) прямую линию — числовую ось». Сосредоточить внимание учащихся на непрерывности (сплошности) линий он советует и при изучении графиков: линейной функции и трехчлена 2-й степени. В IX классе после изучения понятия о пределе переменной величины необходимо ознакомить учащихся с аналитическим признаком непрерывности функции.

Рассмотрев графики непрерывных и разрывных функций, надо показать, что в точках непрерывности графика $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, и затем исследовать на непрерывность знакомые функции, например: $y = ax + b$ и $y = \sin x$. Е. С. Шатунова

8510. **О графическом изображении сумм квадратов. Аскович** (On the graphic representation of sums of squares. Askovitz Samuel I.), School Sci. and Math., 1958, 58, № 1, 67—70 (англ.)

Для одного частного случая геометрически истолковывается равенство

$$\sum x_i^2 - Nm^2 = \sum (x_i - m)^2 = \sum d_i^2, \qquad (1)$$

где x_i — значения некоторой величины ($i = 1, 2, \ldots, N$), среднеарифметическое которых равно m, $d_i = x_i - m$, $x_i \geqslant 0$, и обращается внимание на то, что это истолкование может быть понято как своего рода доказательство равенства (1) в этом случае. Затем возникшее геометрическое рассуждение записывается при помощи алгебраических символов в общем виде как доказательство (1). Отмечается, что новое рассуждение имеет методический интерес, хотя и не претендует заменить общеизвестное доказательство (которое значительно проще нового). А. Д. Горбунов

8511. **Критические замечания по поводу одной задачи из учебника математики для 12-го класса. Либерт** (Kritische Bemerkungen zu einer Aufgabe aus dem Lehrbuch der Mathematik, 12. Schuljahr. Liebert Fritz), Math. und Phys. Schule, 1957, 4, № 7, 394—396 (нем.)

Рассматривается решение задачи об отыскании кратчайшего расстояния между двумя точками сферической поверхности с условием, чтобы путь не пересекал заданную параллель. Задача приведена в учебнике математики для 12-го класса средней школы ГДР. Исправляется ошибка, допущенная в учебнике при объяснении решения этой задачи. Е. В. Вандышева

8512. Постановка преподавания статистики у А. А. Чупрова. Виноградова Н. М., Уч. зап. по статист., 1957, 3, 318—324

На основании изучения педагогической деятельности А. А. Чупрова в Петербургском политехническом институте (1902—1917) изложены его методы преподавания. Эти методы содержат много прогрессивного: привлечение студентов к исследовательской работе, изложение математической статистики при чтении курсов общей статистики, введение практических занятий по статистике и др. Л. Е. Майстров

8513. Освещение роли отечественных ученых в развитии математики на уроках математики в средней школе. Юдина Н. В., Тр. Пржевальского пед. ин-та, 1954, вып. 3, 173—183

8514. К вопросу об использовании таблиц на уроках математики. Белый Б. Н., Матем. в школе, 1958, № 1, 8—11

8515. Задачи и упражнения в русской учебной литературе по тригонометрии XIX и начала XX века. Грибулин В. А., Уч. зап. Смоленского гос. пед. ин-та, 1957, вып. 4, ч. 1, 152—155

8516. Обзор литературы по вопросам преподавания математики, вышедшей в 1956 году. Шустеф Ф. М., Матем. в школе, 1958, № 1, 73—80

8517. Обзор литературы во вопросам преподавания математики, вышедшей в 1956 г. Шустеф Ф. М., Матем. в школе, 1958, № 2, 84—88

8518. Указатель диссертаций по методике преподавания математики, защищенных в 1937—1956 гг. Больсен Е. М., Матем. в школе, 1958, № 1, 87—91

8519 К. Лекция по курсу «Основания геометрии». Геометрия Лобачевского и опыт. Значение творчества Лобачевского. Хилькевич Э. К., Тюменск. гос. пед. ин-т. Тюмень, Книгоиздат, 1956, 16 стр., илл., беспл.

Описывается материалистический подход Лобачевского к геометрии, его отношение к опыту, как к критерию истины, признание им объективности реального мира—природы, его гениальное предвидение зависимости геометрических свойств пространства от материи, нашедшее подтверждение в современных физических теориях.

Рассмотрены основанные на астрономических расчетах попытки Лобачевского доказать пригодность евклидовой геометрии для приближенных практических измерений в пределах земных расстояний.

Отмечена роль открытия Лобачевского в философской борьбе материализма с кантианством, влияние этого открытия на взгляды Пуанкаре и Гельмгольца, отказавшихся от кантовского априоризма в вопросе об аксиомах геометрии. Дана критика попыток идеалистов использовать геометрию Лобачевского в своих целях.

В заключение сжато охарактеризовано влияние работ Лобачевского на развитие аксиоматического метода и вообще на последующее развитие математики.

Примечание референта: Гипотеза о сумме углов треугольника, имеющая место в эллиптической геометрии, как известно, противоречит аксиомам порядка, принятым в евклидовой геометрии (незамкнутость прямой). Между тем, автор указывает лишь на противоречие с аксиомой Архимеда, которое является следствием первого противоречия и может быть устранено при соответствующем переоформлении аксиом непрерывности. Б. Л. Лаптев

8520 К. Элементы высшей математики. Сем. 6-й и 7-й. Изд. 2-е. Пенчальский (Elementy matematyki wyższej. Sem. 6 i 7. Wyd. 2. Pęczalski Marian. Warszawa, Państw. Wydawn. Szkoln. Zawod, 1957, 83 s., il., 3.20 zł.), Przew. bibliogr., 1957, 13, № 18, 270 (польск.)

8521 К. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. Задачи по комбинаторике и теории вероятностей. Задачи из разных областей математики. Яглом А. М., Яглом И. М. М., Гостехиздат, 1954, 543 стр., с черт., 10 р. 15 к.

8522. Д. Развитие навыков самоконтроля в связи с активизацией процесса обучения математике. Эрдниев П. М. Автореф. дисс. канд. пед. н., Н.-и. ин-т методов обучения Акад. пед. наук РСФСР, М., 1957

8523 Д. Иррациональные алгебраические функции и уравнения над полем комплексных чисел и методика их преподавания. Томашев Б. И. Автореф. дисс. канд. пед. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1958

См. также: 8529, 8532, 8533, 8562, 8563 К, 8564, 8584 К, 8836, 8881 К, 8910, 8919 К, 9054 К, 9102 К,—9104 К, 9125, 9237.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, А. С. Есенин-Вольпин*

8524. Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп. Адян С. И., Тр. Моск. матем. о-ва, 1957, 6, 231—298

Пусть F_0 — произвольная конечно-определенная группа (к.-о. г.). Проблема изоморфизма для группы F_0 заключается в следующем: требуется найти алгоритм, позволяющий для любой к.-о. г. определять, изоморфна она группе F_0 или нет. В работе доказана неразрешимость этой проблемы для всякой к.-о. г. F_0.

Свойство α группы F_0 называется инвариантным, если всякая группа F_1, изоморфная группе F_0, также обладает этим свойством. Свойство β группы F_0 называется наследственным, если всякая группа F_1, изоморфная некоторой подгруппе группы F_0, также обладает этим свойством. Проблема распознавания выполненности свойства α ставится следующим образом: требуется найти алгоритм, определяющий для каждой к.-о. г. F, выполнено в ней свойство α или нет. Наследственное свойство β_0 называется нетривиальным наследственным свойством, если этим свойством не обладает свободная группа с двумя образующими.

Автором доказано, что если существует к.-о. г., в которой выполнено свойство $(\alpha \& \beta)$, где α — произвольное инвариантное свойство, β — некоторое нетривиальное наследственное свойство, то проблема распознавания свойства $(\alpha \& \beta)$ неразрешима.

Отсюда получается, в частности, невозможность алгоритма, определяющего для каждой к.-о. г., является она или нет единичной, свободной, абелевой, конечной порядка k, периодической, нильпотентной класса k, разрешимой и т. д.

Инвариантное свойство α_0 называется специальным инвариантным свойством, если оно не выполнено ни в одной группе с неразрешимой проблемой тождества.

Если существует к.-о. г., в которой выполнено специальное инвариантное свойство, α_0, то проблема распознавания выполненности свойства α_0

неразрешима. Отсюда вытекает неразрешимость так называемой метапроблемы тождества теории групп.

В последней теореме 4 доказана неразрешимость проблемы распознавания выполненности для следующих свойств групп: 1) иметь свободную подгруппу ранга k, 2) быть простой группой.

Доказательство вышеперечисленных результатов проводится по следующей схеме. Строится система групп $\mathfrak{A}_{qAB}$ на основе группы $\mathfrak{A}_P$ с неразрешимой проблемой тождества, построенной П. С. Новиковым (РЖМат, 1956, 112) для каждой пары слов специального вида A и B из группы $\mathfrak{A}_P$ (A и B — это такие слова, для которых невозможен алгоритм, проверяющий, равны они в группе $\mathfrak{A}_P$ или нет). Для групп $\mathfrak{A}_{qAB}$ доказывается следующая лемма: Если $A=B$ в группе $\mathfrak{A}_P$, то $\mathfrak{A}_{qAB}$ единичная группа; если $A\neq B$ в группе $\mathfrak{A}_P$, то группа $\mathfrak{A}_P$ является подгруппой $\mathfrak{A}_{qAB}$. Отсюда сразу следует невозможность алгоритма, определяющего для любой к.-о. г., является она единичной или нет. Остальные результаты получаются аналогично из этой же леммы при помощи некоторых построений. В доказательствах используется аппарат проходных букв, созданный П. С. Новиковым, и введенное автором новое понятие квазипроходной буквы.

Примечание референта. В работе обнаружены следующие опечатки: 1) стр. 257, строка 12 сверху, вместо $A=B$ следует читать $A\neq B$; 2) стр. 259, строка 10 сверху, вместо § 2 следует читать § 1; 3) стр. 285, строка 15 снизу, и стр. 294, строка 4 снизу, вместо «по лемме 2» следует читать «по лемме 2′».

К. А. Михайлова

8525. Упорядоченные структуры и связанные с ними понятия. Робинсон (Ordered structures and related concepts. Robinson Abraham), Math. Interpretation Formal Systems, Amsterdam, N. V. Noord-Holl. Uitg., 1955, 51—56 (англ.)

Через K обозначается непустое и непротиворечивое множество формул узкого исчисления предикатов, содержащего некоторые фиксированные предикаты R_i и, быть может, индивидуальные постоянные, а через M — модель K. Для простоты предполагается, что элементы модели принадлежат K. Полная диаграмма N модели M определяется как совокупность всех формул $R_i(a_1, \ldots, a_n)$, если предикат R_i имеет место в M для набора индивидуальных постоянных $a_1, \ldots, a_n$, и всех формул $\sim R_i(a_1, \ldots, a_n)$, если R_i не имеет места в M для $a_1, \ldots, a_n$. В этих обозначениях K называется модельно полным, если для каждой M множество $K \cup N$ является полным в обыкновенном смысле (т. е. из него можно вывести каждую формулу, содержащую лишь индивидуальные и предикатные постоянные из M, или отрицание такой формулы).

Основная теорема: Непустое и непротиворечивое множество формул K не является модельно полным тогда и только тогда, когда для K существуют такие модели M и их расширения M' и формула X, содержащая только постоянные и предикаты из M, что X выполняется в M', но не выполняется в M.

Модельная полнота, вообще говоря, не влечет обыкновенную, и наоборот. Но модельная полнота влечет обыкновенную, если K обладает простой моделью (т. е. если каждая модель изоморфна расширению одной модели).

Результаты применяются к некоторым модельно полным алгебраическим понятиям. Так, система аксиом для упорядоченного и алгебраически замкнутого поля (сформулированная в терминах равенства, сложения и умножения) модельно полна и обладает простой моделью. Поэтому она полна в обыкновенном смысле — результат, установленный раньше другим путем Тарским (A. Tarski, McKinsey J.C.C., A decision method for elementary algebra and geometry, Santa Monica, 1948) и автором (A. Robinson, On the metamathematics of algebra, Amsterdam, 1951). В. К. Детловс

8526. Полнота и устойчивость в теории моделей. Робинсон (Completeness and persistence in the theory of models. Robinson Abraham), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1956, 2, № 1, 15—26 (англ.)

Автор рассматривает различные видоизменения понятия полноты, предложенные им самим и другими авторами за последние годы. Непустое и непротиворечивое множество выражений K называется, как известно, полным, если каждое выражение X без свободных переменных, не содержащее никаких констант, кроме тех, которые входят в некоторое выражение, принадлежащее K, разрешимо в K, т. е. X или $\sim X$ является теоремой K. Множество K называется модельно-полным (model-complete), если для любой модели M множества K полно множество $K \cup N$, где N обозначает диаграмму множества K (Robinson A., On the metamathematics of algebra, Amsterdam, 1951, p. 74). Если Γ — множество констант, то множество K называется Γ-полным, если каков бы ни был предикат Q такой, что $Q(a)$ является теоремой K для произвольного $a\in\Gamma$, выражение $(x)Q(x)$ является теоремой в K. Предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$ называется устойчивым в K, если из истинности $Q(a_1, \ldots, a_n)$ в какой-либо модели M множества K следует истинность этого утверждения во всякой модели, являющейся расширением M. Все эти понятия уже были введены Робинсоном, за исключением определения Γ-полноты, которое принадлежит Хенкину (РЖМат, 1956, 1925).

Автор вводит следующие вспомогательные понятия: а) Множество K называется предполным (pre-complete), если каждое универсальное выражение (т. е. которое в нормальной форме содержит только кванторы общности) устойчиво в K. б) Множество K называется n-полным, если каждое замкнутое предложение, имеющее n чередующихся групп кванторов общности и существования, разрешимо в K (примером 1-полного, но не 2-полного множества служит множество аксиом теории упорядочения бесконечного множества).

Основным результатом статьи служит теорема, что если множество K предполно, то каждый предикат устойчив в K. Доказательство основано по существу на одной лемме, доказанной Лоссом (РЖМат, 1958, 1765) и автором (РЖМат, 1958, 7442), утверждающей, что каждый предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$, устойчивый в K, эквивалентен в силу аксиом множества K некоторому предикату вида $(Ey_1)\ldots(Ey_m)R(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$. Пользуясь этой леммой, автор применяет индукцию по отношению к числу перемен кванторов, встречающихся в нормальной форме выражения Q, и сводит доказательство к случаю, когда приставка Q содержит либо только кванторы существования (в этом случае устойчивость Q очевидна), либо только кванторы общности (в этом случае устойчивость Q следует из предположения о предполноты множества K).

Из этого основного результата автор извлекает ряд следствий. Укажем только некоторые из них: 1) Множество, являющееся предполным и 1-полным, является полным. 2) Множество является модельно-полным тогда и только тогда, когда оно предполно. 3) Множество K является модельно-полным в том и только в том случае, если для каждой из его моделей M является 1-полным множество $K \cup N$, где N

означает диаграмму M (автор получил этот результат другим способом (реф. 8525). Не пользуясь основным результатом, автор доказывает, что 4) Множество K является модельно-полным в том и только в том случае, если для каждой модели M множества K последнее является Γ_M-полным, где Γ_M означает множество констант, означающих элементы модели M (так что для каждого элемента M существует константа, которая обозначает этот элемент в Γ_M).

A. Mostowski

8527. Некоторые проблемы определимости в узком исчислении предикатов. Робинсон (Some problems of definability in the lower predicate calculus. Robinson A.), Fundam. math., 1957, 44, № 3, 309—329 (англ.)

В статье последовательно рассматриваются: понятие относительной модельной полноты, некоторые вопросы определимости в узком исчислении предикатов и приложения результатов.

Определения (см. также книгу автора: Complete theories, Amsterdam, 1956): аксиомой называется формула узкого исчисления предикатов без свободных переменных; элементарной аксиомой — формула вида $(\exists y_1) \ldots (\exists y_n) Z(y_1, \ldots, y_n)$, $n \geqslant 0$, где Z не содержит кванторов и есть конъюнкция атомистических формул и (или) их отрицаний. Множество K аксиом называется полным, если для всякой аксиомы X, определенной в K, или X или его отрицание $\sim X$ выводимо из K. Диаграммой N K-модели M называется множество формул $R_t(a, b, \ldots, c)$ или $\sim R_t(a, b, \ldots, c)$ (где R_t — основные предикаты в K, а $a, b, \ldots, c \in M$), которые истинны на M. Если для всякой K-модели M множество $K \cup N$ полно, то K называется модельно полным. Множество аксиом K^* называется ассоциированным с K, если (2, 1) K^* не содержит других отношений и констант, кроме тех, которые содержатся в K, (2, 2) K^* модельно совместно с K, т. е. всякая K-модель вложима в некоторую K^*-модель, (2. 3) всякая K^*-модель, являющаяся K-надмоделью, сама есть K-модель. Наконец, если K совместна и K^* модельно совместна с K, то K^* называется модельно полным относительно K, когда для всякой K-модели M множество $K^* \cup N$, где N — диаграмма M, полно.

Доказывается следующий критерий: Пусть K^* и K — непустые, совместные множества аксиом и K^* ассоциировано с K. Чтобы K^* было модельно полным относительно K, необходимо и достаточно, чтобы для каждой K-модели M, с диаграммой N, и для всякой элементарной аксиомы X, определенной на M, или X или $\sim X$ было выводимо из $K^* \cup N$ (теорема (2. 5)). Дается одно достаточное условие модельной полноты относительно K, когда K модельно полно (теорема (2. 7)). Далее устанавливается: Если K_1^* и K_2^* ассоциированы с K и модельно полны относительно K, то класс K_1^*-моделей, являющихся K-надмоделями, совпадает с классом K_2^*-моделей, являющихся K-надмоделями (теорема (2. 8)).

В § 3 изучаются некоторые вопросы определимости в узком исчислении предикатов. Аксиома X^*, определенная в K^*, называется инвариантной относительно K^* над K, если для всякой K-модели M либо X^* истинна на всех K^*-моделях, являющихся расширениями M, либо ни на одной из них. Аналогично предикат $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, определенный в K^*, называется инвариантным относительно K^* над K, если для всякого множества констант $a_1, \ldots, a_n$, принадлежащих K-модели M, или $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$, или $\sim Q^*(x_1, \ldots, x_n)$ выполняется во всех расширениях модели M, являющихся K^*-моделями.

Доказывается: Если K^* и K удовлетворяют (2. 1) и (2. 2), X^* определена в K^* и инвариантна относительно K^* над K, то существует такая аксиома X, определенная в K, что X истинна на каждой данной K-модели M тогда и только тогда, когда X^* истинна на всех K^*-моделях, являющихся расширениями M (теорема (3. 1)). Аналогично: Если дан предикат $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$, определенный в K^* и инвариантный относительно K^* над K, то существует такой предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$, определенный в K, что для всякой K-модели M, содержащей константы $a_1, \ldots, a_n$, $Q(a_1, \ldots, a_n)$ выполняется в M тогда и только тогда, когда $Q^*(a_1, \ldots, a_n)$ выполняется во всех K^*-моделях, являющихся расширениями M (теорема 3. 4)).

Аксиома X (соответственно предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$), которая определена однозначно, называется проекцией X^* (соответственно $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$), из K^* на K. Наконец, теорема (3. 5) утверждает: Если K^* и K удовлетворяют (2. 1) и (2. 2) и K^* модельно полно относительно K, то всякая аксиома X^*, определенная в K^*, обладает проекцией из K^* на K; аналогично, всякий предикат $Q^*(x_1, \ldots, x_n)$, определенный в K^*, обладает проекцией из K^* на K.

§ 4 посвящен приложениям к теории полей. Подробно рассматривается известная теорема Гильберта-Нетто. В § 5 полученные результаты применяются к теории упорядоченных полей. Доказаны, в частности следующие утверждения: (5. 9). Пусть M-конечное, формально-вещественное расширение упорядоченного поля M. Тогда всякий вполне положительный элемент $\beta \in M'$ может быть представлен в форме (5. 10)

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i^2, \quad c_i \geqslant 0, \quad c_i \in M, \quad \gamma_i \in M', \quad i = 1, \ldots, r.$$

Число r зависит только от степени M' над M и не зависит от частного выбора M, или M', или β. (5. 11) Следствие. Если существует положительное целое ρ такое, что всякий положительный элемент из M представляется как сумма ρ квадратов элементов $\in M$, то (5. 10) можно заменить на

$$\beta = \sum_{i=1}^{s} \gamma_i^2, \quad \gamma_i \in M', \quad i = 1, \ldots, s,$$

где s (т. е. $s = r\rho$), возможно, теперь зависит от M, но не от M' или β.

Д. А. Захаров

8528. О полноте элементарной евклидовой геометрии. Швабхёйзер (Über die Vollständigkeit der elementaren euklidischen Geometrie. Schwabhäuser Wolfram), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1956, 2, № 3, 137—165 (нем.)

Строится некоторая аксиоматическая система (DEG) элементарной трехмерной евклидовой геометрии, содержащая первые 4 группы аксиом Гильберта и несколько ослабленную аксиому непрерывности. Доказывается полнота системы (DEG). При этом автор использует построенную Тарским (Tarski A., A decision method for elementary algebra and geometry, 2. Aufl., Berkeley und Los Angeles, 1951) аксиоматическую систему арифметики действительных чисел (ARZ) и опирается на полноту (ARZ), которая была доказана Тарским в той же работе. В качестве модели для (ARZ) используется поле действительных чисел R, а для (DEG) — построенная на базе R обычная аналитическая геометрия G_R. Указывается алгоритм, перерабатывающий любую формулу H системы (DEG) в такую формулу $Rdz(H)$ системы (ARZ), что выполнено: 1) Формула

H общезначима в G_R тогда и только тогда, когда $Rdz(H)$ общезначима в R. (Формализм (DEG) в основном совпадает с формализмом евклидовой геометрии, который был построен Тарским в приведенной выше работе, а указанный алгоритм — с соответствующим алгоритмом Тарского, который там же был использован Тарским для решения проблемы разрешения в построенном им формализме евклидовой геометрии.)

Автор, кроме того, строит алгоритм, перерабатывающий любую формулу S системы (ARZ) в некоторую такую формулу $Rdg(S)$ системы (DEG), что: 2) Если S доказуема в (ARZ), то $Rdg(S)$ доказуема в (DEG); 3) Формула H доказуема в (DEG) тогда и только тогда, когда в (DEG) доказуема формула $Rdg(Rdz(H))$. Пусть теперь формула H общезначима в G_R. Тогда по 1) $Rdz(H)$ будет общезначима в R, в силу полноты (ARZ) формула $Rdz(H)$ будет доказуема в (ARZ), в силу 2) формула $Rdg(Rdz(H))$ будет доказуема в (DEG), откуда по 3) получаем, что формула H также доказуема в (DEG). Этим доказана теорема о полноте системы (DEG). В заключение автор приводит ряд простых следствий из доказанной теоремы. С. И. Адян

8529. **Определение числа. Гудстейн** (The definition of number. Goodstein R. L.), Math. Gaz., 1957, 41, № 337, 180—186 (англ.)

Популярная статья, в которой рассматриваются понятия натуральных чисел (определение Фреге—Рассела с помощью равномощных конечных множеств, а также аксиомы Пеано), целых и рациональных чисел (методом пар), комплексных чисел (в виде остатков по модулю ξ^2+1 в кольце действительных многочленов) и действительных чисел (приводятся некоторые определения и результаты из теории конструктивных действительных чисел).

Подчеркивается, что доказательство Кантора о несчетности множества действительных чисел при конструктивном подходе оказывается относительным и, точно говоря, доказывает только невозможность перенумеровать действительные числа в той же формальной системе, в которой они строятся. Вывод же о несчетности этого множества мог бы быть сделан только, если было бы известно, что соответствующая формальная система полна, но этого-то как раз нет. В. К. Детловс

8530. **Теорема о вложенных сегментах, теорема Коши и теорема Ролля в конструктивном анализе. Цейтин Г. С.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 186—187

Резюме доклада. Рассматриваются конструктивные аналоги классических теорем о вложенных сегментах, Коши и Ролля. При конструктивном истолковании суждений для доказательства каждой из этих теорем требуется построить алгорифм, дающий по записи любого объекта некоторого типа (конструктивной последовательности вложенных сегментов, конструктивной функции с определенными свойствами) запись конструктивного вещественного числа, находящегося в определенном отношении к этому объекту. Такие алгорифмы для всех трех теорем оказываются невозможными. Тем не менее ни одну из них невозможно опровергнуть на примере. Это следует из справедливости этих теорем в некоторой измененной формулировке. Н. М. Нагорный

8531. **Булевы алгебры и исчисление высказываний. Нолен** (Algèbres de Boole et calcul des propositions. Nolin Louis), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 15, 1999—2002 (франц.)

Дается схема алгебраического доказательства теоремы полноты классического исчисления высказываний. Выявляется алгебраическая природа ранее известных доказательств этой теоремы. Ю. А. Шиханович

8532. **О различных взглядах на современную математическую логику. Лахути Д. Г., Стяжкин Н.И.**, Вопр. философии, 1957, № 3, 208—211

Подробное резюме доклада проф. С. А. Яновской в Институте философии АН СССР 20 декабря 1956 г. Критикуя два «крайних» взгляда на соотношение предметов математики и логики (1) чистая математика целиком сводима к логике (Рассел) и 2) логика есть лишь часть математики (Карри, Лоренцен)), докладчик противопоставляет им свою точку зрения: логика изучает формы мышления, методы, с помощью которых люди в действительности производят выводы, связь логических форм с языком; математическая же логика занимается построением вспомогательных логических аппаратов, которые изучаются средствами математики и применяются прежде всего также к математике. В докладе показывается несостоятельность попытки Лоренцена предпослать «онтологической» (опирающейся лишь на самое себя) логике «оперативную» логику, возникающую из своеобразной «математической игры». А. А. Зыков

8533. **Рассуждение и возникновение идеи в математике. Ван-дер-Варден** (Einfall und Überlegung in der Mathematik. Van der Waerden B. L.), Elem. Math., 1953, 8, № 6, 121—129; 1954, 9, № 1, 1—9 (нем.)

См. также: 8437, 8442, 8524, 8525, 8527, 8528

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

8534. **Распределение квадратичных вычетов и невычетов. Берджесс** (The distribution of quadratic residues and non-residues. Burgess D. A.), Mathematika, 1957, 4, № 8, 106—112 (англ.)

В работе уточняется известное неравенство Виноградова—Пойа $\left|\sum_{n=N}^{N+H}\left(\frac{n}{p}\right)\right| < p^{\frac{1}{2}}\log p$. Доказывается теорема: Пусть δ и ε — произвольно фиксированные положительные числа, N — целое, H — натуральное число, p — достаточно большое простое число. Тогда $\left|\sum_{n=N+1}^{N+H}\left(\frac{n}{p}\right)\right| < \varepsilon H$ при условии $H > p^{\frac{1}{4}+\delta}$. Теорема доказывается методом от противного. Гипотеза $\left|\sum_{n=N+1}^{N+H}\left(\frac{n}{p}\right)\right| \geqslant \varepsilon H$ после замены $n = -tp + qz$, где q — некоторое простое число из интервала $\frac{1}{2}p^{\frac{1}{4}} < q < p^{\frac{1}{4}}$, приводит к неравенству $\sum_{t=0}^{q-1}\left|\sum_{z\subset J(q,t)}\left(\frac{z}{p}\right)\right| \geqslant \varepsilon H$, где $J(q,t)$ означает интервал $(N+tp)q^{-1} < z \leqslant (N+H+tp)q^{-1}$. Суммируя по всем q и разбивая сумму по t на сумму по тем t,

которые соответствуют непересекающимся интервалам $J(q, t)$, и на сумму по остальным t, автор получает

$$\sum_q \sum_{t\in T(q)} \left| \sum_{x\in J(q,\,t)} \left(\frac{x}{p}\right)\right| > \frac{1}{2}\varepsilon HQ, \qquad (1)$$

где $T(q)$ означает совокупность t, обеспечивающих при данном q непересекаемость интервала $I(q, t)$ с другими интервалами $I(q, t)$ для всех q; Q — количество значений q.

После преобразования левой части неравенства (1) оно приводится к виду $\sum_J \sum_{n\in J} |S_h(n)|^{2r} > \left(\frac{1}{12}\varepsilon\right)^{2r} HQh^{2r}$, причем $S_h(n) = \sum_{m=1}^{h} \frac{n+m}{p}$, h и r — натуральные числа, $h = \left[\frac{1}{8}\varepsilon H p^{-\frac{1}{4}}\right]$, J означает совокупность всех непересекающихся интервалов $J(q, t)$. На основании результатов Давенпорта, Эрдёша и А. Вейля

$$\sum_x |S_h(x)|^{2r} < (2r)^r ph^r + r\left(2p^{\frac{1}{2}} + 1\right)h^{2r}, \qquad (3)$$

где суммирование проводится по полной системе вычетов mod p. При достаточно большом p неравенство (2) противоречит (3), что доказывает ошибочность гипотезы.

В заключительной части работы автор применяет доказанную теорему к усовершенствованию асимптотической оценки И. М. Виноградова для наименьшего положительного квадратичного невычета d по модулю p и получает $d = O(p^{\alpha})$ для любого фиксированного $\alpha > \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}}$.

Н. В. Гордеев

8535. О гармоническом среднем делителей натурального числа. II. Канольд (Über das harmonische Mittel der Teiler einer natürlichen Zahl. II. Kanold Hans-Joachim), Math. Ann., 1958, 134, № 3, 225—231 (нем.)

Пусть A — множество всех натуральных чисел u, для каждого из которых среднее гармоническое всех натуральных делителей, выражающееся формулой

$$H(u) = u\tau(u)/\sigma(u)$$

($\tau(u)$ — количество натуральных делителей числа u, $\sigma(u)$ — их сумма), является несократимой дробью. Пусть $U(x)$ — количество всех $u \in A$ с условием $u \leqslant x$.

В работе доказывается существование таких двух положительных констант c_1 и c_2, для которых $c_1 < U(x)\, x^{-\frac{1}{2}} \times (\log x)^{\frac{1}{2}} < c_2$ при всех $x \geqslant 2$.

Н. В. Гордеев

8536. О числе простых множителей целых чисел. II. Танака (On the number of prime factors of integers. II. Tanaka Minoru), J. Math. Soc. Japan, 1957, 9, № 2, 171—191 (англ.)

Первую часть работы см. РЖМат, 1957, 4567. Пусть $\pi_1, \ldots, \pi_k$ — непересекающиеся множества простых чисел, таких что ряды $\sum_{p\in\pi_i} p^{-1}$ $(i = 1, \ldots, k)$ расходятся. Обозначим через $\omega_i(n)$ число различных простых делителей натурального n, принадлежащих π_i,

$$y_i(n) = \sum_{p_i \leqslant n} p_i^{-1},$$

где суммирование ведется по всем простым p_i из π_i, n_0 — наименьшее натуральное число, выполняющее условие $y_i(n_0) > 0$ $(i = 1, \ldots, k)$,

$$u_i(n) = (\omega_i(n) - y_i(n))/\sqrt{y_i(n)} \quad (n > n_0),$$

E — ограниченное или неограниченное измеримое по Борелю множество в k-мерном пространстве; $A(x, E)$ — число натуральных n, $n_0 \leqslant n \leqslant x$, для которых точка $(u_1(n), \ldots, u_k(n)) \in E$. Методом решета доказывается, что

$$x^{-1}A(x, E) \to (2\pi)^{-k/2} \int_E \exp\left\{-(u_1^2 + \ldots + u_k^2)/2\right\} \times$$

$$\times\, du_1 \ldots du_k.$$

Приводится ряд частных случаев. И. П. Кубилюс

8537. О теореме, относящейся к простым числам. Эда (On the prime number theorem. Eda Yoshikazu), Sci. Rep. Kanazawa Univ., 1953, 2, № 1, 23—33 (англ.)

Элементарное доказательство теоремы, относящейся к простым числам, данное Сельбергом, «детрансцендентализуется» путем замены функции $\log x$ функцией $\Sigma_{n\leqslant x} 1/n$. Хотя эта статья по существу совпадает по смыслу со статьей Фогелса (Fogels, Latvijas PSR Zinātņu Akad. Fiz. Mat. Inst. Raksti, 1950, 2, 14—45), детали здесь доведены до конца значительно более подробно. H. N. Shapiro

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 587.

8538. О неравенстве Сельберга. Эда (On the Selberg's inequality. Eda Yoshikazu I), Sci. Rept. Kanazawa Univ., 1953, 2, № 1, 7—13) (англ.)

Тождество Сельберга

$$\theta(x)\log x + \sum_{p\leqslant x} \theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p = 2x\log x + O(x)$$

может рассматриваться как перевод на язык простых чисел равенства

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\mu(n)}{n}\log^2\frac{x}{n} = 2\log x + O(1).$$

Это последнее было обобщено референтом следующим образом:

$$V_k(x) = \sum_{n\leqslant x} \frac{\mu(n)}{n}\log^k\frac{x}{n} =$$

$$= k\log^{k-1} x + \sum_{j=1}^{k-2} k_j \log^j x + O(1).$$

В этой статье константы k_j определяются с помощью некоторых «эйлеровых констант». Обобщение тождества (1) в этом случае получается благодаря выражению $V_k(x)$ на языке простых чисел.

H. N. Shapiro

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 587

8539. Разбиения на k различных простых чисел. Гупта (Partitions into exactly k distinct primes. Gupta Om Prakash. Res. Bull. Panjab Univ., 1957, № 107, pp. 283—290) (англ.)

Дана таблица числа разбиений чисел от 1 до 300 на $k = 1, 2, \ldots, 14$ различных простых чисел. Кратко сообщается о методе составления таблицы. В. А. Голубев

8540. О лакунарности в смысле Хартмана последовательности всех простых чисел. Серпинский (Sur la lacunarité au sens de S. Hartman de la suite de tous les nombres premiers. Sierpiński W.), Matematiche, Catania, 1955, 10, 67—70 (франц.)

В терминах предыдущего реферата, автор дает независимое доказательство того, что последовательность простых чисел удовлетворяет условию лакунарности Хартмана. Он осуществляет это с помощью установления следующей теоремы: Для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $\mu = \mu(\varepsilon)$ такое, что $\pi(n+k) - \pi(n) < k\varepsilon$ при $k > \mu$, $n = 1, 2, \ldots$ Доказательство элементарно и результат легко приводит к заключению, что последовательность простых чисел не удовлетворяет условию (P). H. Halberstam

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 586

8541. **О почти простых числах. Дюпарк** (On almost primes. Duparc H. J. A.), Rapp. Math. centrum, 1955, № 012, 1—4 (англ.)

Доказывается бесконечность числа почти простых чисел, т. е. сложных чисел m, удовлетворяющих сравнению

$$a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m},$$

где $a > 1$ — целое.

Результат является обобщением теоремы Жардена (Jarden D. Riveon lemat., 1950, 4, 65—67), которая доказана для случая $a = 2$.

Рассматриваются примеры почти простых чисел. В. М. Архангельская

8542. **О почти простых числах второго порядка. Дюпарк** (On almost primes of the second order. Duparc H. J. A.), Rapp. Math. centrum, 1955, № 013, 1—13 (англ.)

Эта статья является продолжением статьи автора (реф. 8541), где рассматривались почти простые числа первого порядка.

Рассматриваются две рекуррентных последовательности второго порядка для заданных целых $a > 0$ и $b > 0$:

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \quad (1)$$

$$v_0 = 2,\ v_1 = a,\ v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \quad (2)$$

$D = a^2 + 4b$ — дискриминант характеристического многочлена $f(x) = x^2 - ax - b$. Доказывается, что для любого простого $p \nmid b$ имеют место свойства: A. $u_p - \left(\frac{D}{p}\right) \equiv 0 \pmod{p}$, B. $v_p \equiv a \pmod{p}$, C. $u_p \equiv \left(\frac{D}{p}\right) \pmod{p}$.

Вводится определение: Почти простым числом второго порядка относительно последовательности (1) называется сложное число, удовлетворяющее по крайней мере одному из неравенств A, B или C.

Рассматриваются условия, достаточные для существования почти простых чисел; доказывается существование этих чисел для последовательности Фибоначчи; составлена таблица почти простых чисел, уловлетворяющих условию B. В. М. Архангельская

8543. **О некоторых свойствах целых многочленов. Ван Юань** (On some properties of integral valued polynomials. Wang Yuan), Шусюэ цзиньчжань, 1957, 3, № 3, 416—423 (кит.; рез. англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть $F(x)$ — неприводимый целый многочлен степени k с каким-либо фиксированным простым делителем. Пусть $\pi(N; F(x))$ означает число простых чисел, представимых $F(x)$, когда $x = 1, 2, \ldots, N$. Тогда

$$\pi(N; F(x)) \leqslant 2 \prod_p \frac{\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \frac{N}{\log N} + O\left(\frac{N}{\log N}\right),$$

где $\omega(m) = h_m(k!\ m)/k!$ и $h_m(k!\ m)$ означает число решений сравнения $F(x) \equiv 0 \pmod{m}$ $(0 \leqslant x \leqslant k!\ m)$.

Этот результат немного лучше, чем результат, принадлежащий Хейльбронну и Риччи. При доказательстве используется метод Селберга.

Также рассматриваются аналогичные проблемы для приводимых $F(x)$. Резюме автора

8544. **Сравнения для коэффициентов модулярных форм и некоторые новые сравнения для функции разбиения. Ньюман** (Congruences for the coefficients of modular forms and some new congruences for the partition function. Newman Morris), Canad. J. Math., 1957, 9, № 4, 549—552 (англ.)

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} p_r(n) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^r$, тогда справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть r — четно, $4 \leqslant r \leqslant 24$, p — простое, большее трех и такое, что $\delta = \frac{r(p-1)}{24}$ — целое, пусть $R = Qp + r$, тогда

$$p_R(np + \delta) \equiv p_r(\delta)\, p_{Q+r}(n) \pmod{p}.$$

Теорема 2. Для $n \equiv 6 \pmod{13}$

$$p(13^2 n - 7) \equiv 6p(n) \pmod{13}.$$

Здесь $p(n) = p_1(n)$ — функция разбиения.

При специальных значениях a и b справедливо сравнение

$$p(a\Delta_n + b) \equiv 0 \pmod{13},$$

где $\Delta_n = \frac{13}{24}(13^{2n} - 1)$. Б. В. Левин

8545. **Заметка об иррациональном модулярном уравнении седьмого порядка. Карлиц** (A note on the irrational modular equation of order seven. Carlitz L.), Nieuw arch. wiskunde, 1957, 5, № 3, 143—145 (англ.)

Опираясь на иррациональное, модулярное уравнение седьмого порядка (R. Fricke, Die elliptische Funktionen und ihre Anwendungen, vol. 2, 1922, 525), автор получает ряд соотношений, связывающих функции $\Phi(q)$, $\psi(q)$, $\psi_r(q)$, $\Phi_0(q)$, $\Phi_r(q)$, где, например,

$$\Phi(q) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + q^{2m}}{1 + q^{2m-1}}, \qquad \psi(q) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2m-1}}{1 + q^{2m-1}}.$$

Аналогичные соотношения могут быть получены, если исходить из уравнения третьего порядка. Найдены некоторые тождества, вытекающие из уравнения 23-го порядка. К соотношениям, подобным последним, приводят уравнения 5-го и 11-го порядков. И. Г. Мельников

8546. **О некоторых суммах, обобщающих суммы Дедекинда, и их законе взаимности. Микола́ш** (On certain sums generating the Dedekind sums and their reciprocity laws. Mikolás M.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 2, 1167—1178 (англ.)

Рассматриваются обобщенные суммы Дедекинда вида

$$f_{m,n}\begin{pmatrix} a & b \\ c & \end{pmatrix} = \sum_{v=0}^{c-1} P_m\left(\frac{\lambda a}{c}\right) P_n\left(\frac{\lambda b}{c}\right).$$

Здесь $(a, c) = (b, c) = 1$, $c > 0$, $P_n(u)$ — периодизированный многочлен Бернулли.

Кроме того, автор рассматривает также суммы вида

$$\mathfrak{D}_c^{a,b}(w, z) = \sum_{\lambda=1}^{c-1} \zeta\left(w, \left\{\frac{\lambda a}{c}\right\}\right) \zeta\left(z, \left\{\frac{\lambda b}{c}\right\}\right),$$

где $\zeta(s, u)$ — дзета-функция Гурвица. Доказывается, в частности, что трехчленная формула для обобщенной таким образом суммы Дедекинда имеет вид

$$\mathfrak{D}_c^{a,b}(w, z) = (c^{w+z}-1)\zeta(w)\zeta(z) + \pi^{-1}(2c\pi)^{w+z-1} \times$$

$$\times \Gamma(1-w)\Gamma(1-z)\left\{\cos\frac{\pi}{2}(w-z)\,\mathfrak{D}_c^{b,a}(1-w,\right.$$

$$\left. 1-z) - \cos\frac{\pi}{2}(w+z)\,\mathfrak{D}_c^{b,-a}(1-w,\ 1-z)\right\}.$$

При $c=2$ $\mathfrak{D}_2^{a,b}(w, z) = (2^w-1)(2^z-1)\zeta(w)\zeta(s)$ и последнее равенство превращается в функциональное уравнение для функции $\zeta(u)$. Б. В. Левин

8547. **О суммах степеней комплексных чисел. Касселс** (On the sums of powers of complex numbers. Cassels J. W. S.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 7, № 3—4, 283—289 (англ.; рез. русск.)

Пусть $z_1, \ldots, z_k$ — комплексные числа, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ — положительные, ν — натуральное. Работа содержит следующие результаты.

1. Пусть $s_\nu = z_1^\nu + \ldots + z_k^\nu$, $\max|z_j| \geqslant 1$ $(j=1\ldots k)$. Тогда $\max|s_\nu| \geqslant 1$ для $\nu = 1, 2, \ldots, 2k-1$; эту оценку нельзя улучшить.

2. $\sigma_\nu = b_1 z_1^\nu + b_2 z_2^\nu + \ldots + b_k z_k^\nu$. Существуют такие b_j, z_j $(j=1, \ldots, k)$, что $\operatorname{Re}\sigma_\nu < 0$ для $\nu = 1, \ldots, 3^k-1$. Этот пример показывает, что невозможно улучшить классическую теорему Дирихле об аппроксимации системы действительных чисел.

3. Пусть $|z_1| = \max|z_j|$; $\beta = b_1^{-1}(b_2+b_3+\ldots+b_k)$. Тогда $\max \operatorname{Re}\sigma_\nu > 0$ для $\nu = 1 \ldots N$, где $N = 2[\beta^2 + 6\beta] + 7$. Заключительная часть работы содержит доказательство ослабленной теоремы Дирихле с помощью тригонометрических сумм, при этом существенно используется положительность ядра Фейера. Н. Г. Чудаков

8548. **Заметка о нормальных числах. Лонг** (Note on normal numbers. Long Calvin T.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 2, 1163—1165 (англ.)

Число α называется просто нормальным (simply normal) относительно основания r, если в записи α в r-ичной системе счисления каждая цифра повторяется с асимптотической частотой $1/r$. Оно называется нормальным относительно основания r, если каждое из чисел $\alpha, r\alpha, r^2\alpha, \ldots$ является просто нормальным относительно каждого из оснований $r, r^2, r^3, \ldots$. Пиллай (Pillai S. S., Proc. Indian Acad. sci., sect. A., 1940, 12, 179—184) показал, что число α нормально относительно основания r тогда и только тогда, когда оно просто нормально относительно каждого из оснований $r, r^2, r^3, \ldots$. Автор доказывает усиление этой теоремы: для нормальности α относительно основания r необходимо и достаточно существование последовательности натуральных чисел $m_1 < m_2 < \ldots$ таких, что α просто нормально относительно каждого из оснований $r^{m_1}, r^{m_2}, \ldots$. При этом оказывается, что конечного множества чисел m вообще недостаточно для нормальности α. И. П. Кубилюс

8549. **О диофантовых приближениях линейных форм. Обрешков** (Sur l'approximation diophantienne des formes linéaires. Obrechkoff Nikola), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 2, 204—205 (франц.)

Пользуясь известным методом Дирихле, автор доказывает теорему: Существуют такие целые числа

$$x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \ldots, x_{n_\nu}^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p),$$

образующие линейную форму

$$f = \sum_{\mu=1}^{n_1} a_{1\mu}x_\mu^{(1)} + \sum_{\mu=1}^{n_2} a_{2\mu}x_\mu^{(2)} + \ldots + \sum_{\mu=1}^{n_p} a_{p\mu}x_\mu^{(p)},$$

где $a_{1\mu}, a_{2\mu}, \ldots, a_{p\mu}$ — любые действительные числа, а $n_1, n_2, \ldots, n_p$ — целые положительные числа и можно подобрать такое целое число y, что имеет место неравенство

$$|f-y| \leqslant \frac{1}{M},$$

$$M = (n_1 \cdot m_1 + 1)(n_2 m_2 + 1)\ldots(n_p m_p + 1),$$

$$x_\mu^{(\nu)} \leqslant m_\nu,\ 1 \leqslant \mu \leqslant n_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant p.$$

А. К. Леваков

8550. **Ограниченные представления положительных значений неопределенных квадратичных форм. Лотон** (Bounded representations of the positive values of an indefinite quadratic form. Lawton B.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, 54, № 1, 14—17 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}x_i$, x_j — целочисленная неопределенная квадратичная форма ненулевого определителя; $F = \max\{|f_{ij}|\}$; тогда найдется такая постоянная c_n, зависящая только от n, что $f(x_1, \ldots, x_n) > 0$ разрешимо в целых числах $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию

$$\max|x_i| < c_n F^{n/2} \tag{1}$$

На примере показано, что в неравенстве (1) показатель степени $n/2$ является наилучшим. А. В. Малышев

8551. **Однородные формы нечетной степени с большим числом переменных. Берч** (Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables. Birch B. J.), Mathematika, 1957, 4, № 8, 102—105 (англ.)

Обобщая результаты Льюиса (Mathematika, 1957, 4, № 8, 97—101), автор доказывает следующую теорему: Пусть h и m — целые положительные, а $r_1, \ldots, r_h$ — нечетные положительные числа; пусть K — конечное расширение поля рациональных чисел; тогда найдется такое число $\psi = \psi(r_1, \ldots, r_h; m; K)$, что если $n \geqslant \psi$, а $f_{r_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{r_h}(x_1, \ldots, x_n)$ — любые формы над K степеней $r_1, \ldots, r_h$ соответственно (неудачное обозначение: может быть $r_i = r_j$, но $f_{r_i} \neq f_{r_j}$), от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, то найдется m-мерное линейное пространство $\{(x_1, \ldots, x_n)\}$ над K, для которого

$$f_{r_1}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_{r_h}(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

В частности, форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ нечетной степени r с целыми рациональными коэффициентами представляет нетривиально 0 (т. е. найдутся целые $x_1, \ldots, x_n$, не равные одновременно нулю, для которых $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, если n достаточно велико: $n \geqslant \psi(r)$. А. В. Малышев

8552. **Некоторые свойства тернарных кубических форм $x^3+my^3+m^2z^3-3mxyz$. Угрин-Шпарац** (Some properties of ternary cubic forms $x^3+my^3+m^2z^3-3mxyz$. Ugrin-Šparac Dimitrije), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1957, 12, № 1—2, 23—29 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Указанная в заглавии форма представляет норму числа $\alpha = x + y\sqrt[3]{m} + z\sqrt[3]{m^2}$.

Элементарно доказываются некоторые свойства чисел α и их норм. Основной результат работы — доказательство того, что в поле $R(\sqrt[3]{2})$ имеет место алгоритм Евклида. В. Д. Подсыпанин

8553. **Кубические формы над полем алгебраических чисел.** Льюис (Cubic forms over algebraic number fields. Lewis D. J.), Mathematika, 1957, 4, № 8, 97—101 (англ.)

Пусть K — поле алгебраических чисел степени d, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — кубическая форма над полем K. Доказаны три теоремы о существовании нетривиальных нулей формы f или системы форм. Простейшая из них гласит, что существует число $\psi(d)$ такое, что если $n \geqslant \psi(d)$, то форма имеет нетривиальные нули. В. Д. Подсыпанин

8554. **О круговых числах шестнадцатого порядка.** Уайтман (The cyclotomic numbers of order sixteen. Whiteman Albert Leon), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 86, № 2, 401—413 (англ.)

Пусть p — нечетное простое число и e — делитель $p-1$, g — первообразный корень по mod p, $p-1 = ef$. «Круговым» числом $(i, j) = (i, j)_e$ автор называет число величин y, $1 \leqslant y \leqslant p-2$, для которых

$$y \equiv g^{es+i}, \quad 1 + y \equiv g^{et+j} \pmod{p}, \qquad (1)$$

s и t выбираются из 0, 1, 2, ..., $f-1$.

Диксон показал, что в случае $e = 8$ число $64(i, j)_8$ будет линейной комбинацией с целыми коэффициентами p, x, y, a и b, где

$$p = x^2 + 4y^2 = a^2 + 2b^2 \ (x \equiv a \equiv 1 \pmod 4).$$

Известны и другие работы в этом направлении.

В статье даны три леммы и две теоремы, выражающие некоторые свойства (i, j). Теорема 2 утверждает: Если $p = x^2 + 4y^2 = a^2 + 2b^2$ — простое число формы $16f+1$ и 2 — вычет 8 степени mod p, то $2^{\frac{p-1}{16}} \equiv (-1)^{y/8+b/8} \pmod p$.

Упомянутые свойства использованы для вычисления некоторых разложений чисел $256(i, j)_{16}$ в виде линейных форм.

В приложении даны 6 таблиц.

Таблицы 1, 2 и 3 дают представление чисел $256(k, 0)_{16}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, 15$) при f четном, соответственно для $m \equiv 0, 2, 4 \pmod 8$.

Таблицы 4, 5 и 6 дают представление чисел $256(l, 0)_{16}$ ($l = 0, 1, 2, \ldots, 7$) при f нечетном, соответственно для $m \equiv 0, 2, 4 \pmod 8$. Библ. 10 назв. П. Н. Романов

8555. **Решение в целых числах неопределенного уравнения $x^4+11y^4=3z^2$.** Горская З. Д., Тр. Ростовск.-н/Д. ин-та с.-х. машиностр., 1957, вып. 8, ч. 1, 339—355

Все целочисленные решения уравнения $x^4 + 11y^4 = 3z^2$ разбиваются на 3 класса. В решениях 1-го класса $x \equiv 1 \pmod 2$, 2-го класса $x \equiv 2 \pmod 4$ и 3-го класса $x \equiv 0 \pmod 4$. Решения каждого класса могут быть получены по различным формулам из двух решений (1, 1, 2) и (2, 1, 3).

Доказательство этого утверждения проведено методом бесконечного спуска. В. Д. Подсыпанин

8556. **Об уравнении $A^{2n} + B^2 = C^{2n} + D^2$.** Мёснер (Über die gleichung $A^{2n} + B^2 = C^{2n} + D^2$. Moessner Alfred), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1957, **12**, № 1—2, 21—22 (нем.; рез. сербо-хорв.)

Указан способ решения в целых числах уравнения $A^{2n} + B^2 = C^{2n} + D^2$ и уравнения $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$. Приведены примеры. В. А. Голубев

8557. **О вычислении числа решений некоторых трехчленных сравнений.** Лемер, Вандивер (On the computation of the number of solutions of certain trinomial congruences. Lehmer Emma, Vandiver H. S.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, 4, № 4, 505—510 (англ.)

Рассматривается вопрос о нахождении числа решений сравнения:

$$1 + ax^c \equiv by^l \pmod p, \qquad (1)$$

в котором p — нечетное простое вида: $p = cl + 1$ и $xy \not\equiv 0 \pmod p$. Если ввести первообразный корень g по модулю p, то сравнение (1) приводится к виду

$$1 + g^{i+cr} \equiv g^{j+ls} \pmod p, \qquad (2)$$

где i и j — некоторые фиксированные числа, соответственно взятые из $0 \leqslant i \leqslant c-1$ и $0 \leqslant j \leqslant l-1$. Следовательно, для решения (1) надо в (2) найти такие r и s, которые содержатся соответственно среди чисел 0, 1, ..., $l-1$ и 0, 1, ..., $c-1$. Для вычисления числа решений (2) (которое обозначается авторами символом $[i, j]$ при фиксированных c и l) применяются вычислительные машины.

Авторы приводят две таблицы для $[i, j]$: при $l = 5$ и $p = 31, 41, \ldots, 971$ и при $l = 7$ и $p = 29, 43, 71, \ldots, 1009$. Библ. 3 назв. П. Н. Романов

8558. **Замечание к «сообщению ZW 1955-013».** Дюпарк (A remark to «rapport ZW 1955-013». Duparc H. J. A), Rapp. Math. centrum, 1956, № 008, 1—2 (англ.).

Доказывается, что существует бесконечно много составных чисел m, делящих $v_m - a$, где $v_0, v_1, \ldots$ — рекуррентная последовательность, для которой $v_0 = 2$, $v_1 = a$, $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$ ($n = 0, 1, \ldots$), причем a — произвольное целое, а $b = \pm 1$ (В «сообщении ZW 1955—013» эта теорема была доказана для случая $a = b = 1$). Н. Н. Воробьев

8559. **Ним-арифметика.** Уолл (Nim-arithmetic. Wall C. T. C.), Eureka, 1955, № 18, 3—7 (англ.)

Автор устанавливает одно-однозначное соответствие между неотрицательными рациональными целыми числами и полиномами в $GF[2, x]$ посредством

$$\sum a_i 2^i \rightleftarrows \sum a_i x^i \ (a_i = 0, 1).$$

Он развивает далее значительное число известных результатов, относящихся к арифметике $GF[2, x]$, в частности простую формулу для числа неприводимых полиномов степени n. L. Carlitz

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 347

8560. **Некоторые циклотомические детерминанты.** Карлиц (Some cyclotomic determinants. Carlitz L.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, **49**, № 1, 49—51 (англ.)

Пусть $p \geqslant 3$ — простое, $k > 1$ — делитель $p-1$, g — фиксированный первообразный корень по модулю p, α — фиксированный корень k-й степени от 1. Определяем:

$$\left(\frac{r}{p}\right)_k = \begin{cases} \alpha^{\operatorname{ind} r}, & \text{если } p \nmid r, \\ 0, & \text{если } p \mid r, \end{cases}$$

где $\operatorname{ind} r$ — индекс по основанию g.

Выводится выражение детерминанта порядка $p-1$

$$D_k = \left|\left(\frac{r-s}{p}\right)_k\right| \quad (r, s = 0, 1, \ldots, p-2)$$

в виде $D_k = p^{t-1}(\psi_1(\alpha)\ldots\psi_{k-2}(\alpha))^t$, где $\psi_r(\alpha) = \sum_{s=1}^{p-1} \alpha^{\operatorname{ind} s - (r+1)\operatorname{ind}(s+1)}$, $kt = p-1$.

Рассматривается детерминант $\Delta_k = |\eta_{r-s}|$ ($r, s = 0, 1, \ldots, k-1$), где $\eta_r = \sum_{s=0}^{l-1} \varepsilon^{gr+sk}$ ($r = 0, 1, \ldots, k-1$). В. А. Голубев

8561. Об одном сравнении. Митринович (Sur une congruence. Mitrinović Olga), Билтен Друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1956, 7, 20—23 (франц.; рез. сербо-хорв.)

8562. Признаки делимости чисел. Сергеев (Ознаки подільності чисел. Сергеев С. О.), Наук зап. Херсонськ. держ. пед. ін-та, 1956, вип. 7, 49—57 (укр.)

8563 К. Упражнения по арифметике; теория и практика. Тире (Exerçicios de aritmetica; teóricos e praticos. 22 ed. Thire Cecil. Rio de Janeiro, Liv Francisco Alves, 1957, 247 p., 80,00 cruz.), Bol. bibliogr brasil., 1957, 5, № 2, 78 (порт.)

См. также: 8529, 8547

АЛГЕБРА

Редакторы *А. И. Ширшов, Г. Н. Поваров*

8564. Научно-исследовательский семинар кафедры алгебры Московского университета. Курош А. Г., Скорняков Л. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 5, 261—269

Обзор деятельности основного алгебраического центра в Советском Союзе, объединяющего (и объединявшего) практически всех советских математиков, работающих в области абстрактной алгебры.

М. М. Постников

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

8565. Комбинаторика. Мамузич (Kombinatorika. Mamuzić P.), Mat. bibliot., № 6, Beograd, Nolit, 1957, 122 s., il.) (сербо-хорв.)

8566. Некоторые случаи явного решения одного уравнения n-й степени. Данги (Quelques cas de résolution explicite d'une équation de degré n. Dangu y Louis), Mathesis, 1955, 64, № 3—5, 115—117 (франц.)

Решение уравнения

$$\begin{vmatrix} d+x & c & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a & b+x & c & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & b+x & c & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a & b+x & c \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a & f+x \end{vmatrix} = 0$$

находится в виде

$$x = -\frac{1}{\alpha}(a + b\alpha + c\alpha^2),$$

где α должно удовлетворять условию

$$\alpha^{n-1}[-\alpha + (d-b)\alpha][-\alpha + (f-b)\alpha] - \alpha^{2n}c^{n-1}(-c\alpha + f - b)(-c\alpha + d - b). \quad (1)$$

В случаях, когда $ac = (d-b)(f-b) \neq 0$ или $ac = (d-b)^2 = (f-b)^2$, условие (1) принимает вид

$$(-c\alpha + f - b)(-c\alpha + d - b)(\alpha^{n-1} - c^{n-1}\alpha^{2n}) = 0,$$

позволяющий получить для α, а следовательно, и для x явные выражения. А. Г. Школьник

8567. О перестановочных полиномах. Якобсталь (Über vertauschbare Polynome. Jacobsthal Ernst), Math. Z., 1955, 63, № 3, 243—276 (нем.)

Полиномы $f(x)$ и $g(x)$ называются перестановочными, если $f(g(x)) = g(f(x))$. Суперпозиция $f(g(x))$ сокращенно записывается fg. Для суперпозиций выполняется закон ассоциативности: $f(gh) = (fg)h$. Для последовательных итераций ($f^0 = x$, $f^1 = f$, $f^2 = ff$, $f^3 = fff$, ...) имеет место равенство

$$f^n f^m = f^m f^n = f^{n+m} (m, n_s = 0, 1, 2\ldots), \quad (1)$$

справедливость чего при $m = 0$ вытекает из того, что всякий полином $f(x)$ перестановочен с x (доказывается, что x — единственный полином, обладающий этим свойством).

Собственным значением полинома $f(x)$ называется корень уравнения (Шредера) $f(x) = x$. У полинома x любое число является собственным значением; полином $x + b$ ($b \neq 0$) не имеет собственных значений; в остальных случаях полином n-й степени имеет n собственных значений (считая каждое с учетом его кратности). Единственными постоянными, с которыми перестановочен полином, являются его собственные значения. У полинома $f(x) \equiv x$ все его итерации совпадают с ним; напротив у полинома $f(x) = x + b$ ($b \neq 0$) все итерации $f^n = x + nb$ между собою различны и не имеют собственных значений. Если $f(x) = ax + b$ ($a \neq 1$), то итерации $f^n = a^n(x - x_0) + x_0$, где $x_0 = b/(1-a)$ — собственное значение полинома $f(x)$; при этом, если a не есть корень из единицы, то все полиномы f^n различны, а x_0 служит для них единственным собственным значением; если же a — первообразный корень r-й степени из единицы, то $f^k = f^l$ при $k \equiv l \pmod r$; x_0 служит собственным значением для f^n при условии $n \not\equiv 0 \pmod r$. Во всех остальных случаях (когда степень $f(x) \geqslant 2$) все итерации $f(x)$ различны; при этом любое собственное значение $f(x)$ является собственным значением f^n, причем кратное собственное значение полинома $f(x)$ является собственным значением полинома f^n той же кратности; простое же собственное значение x_0 $f(x)$ является кратным собственным значением для f^k в том и только том случае, если $(f'(x_0))^k = 1$; при этом кратность эта не меньше 3.

Если полиномы $f(x)$ и $g(x)$ перестановочны и x_0 — собственное значение полинома $f(x)$, то и $g(x_0)$ также является собственным значением полинома $f(x)$. Если полином $f(x)$ перестановочен с полиномами $h(x)$ и $g(x)$, то он перестановочен с полиномами gh и hg. Все линейные полиномы, перестановочные с линейным полиномом $g(x) = ax + b$ ($a \neq 1$), имеют вид $f(x) = C(x - x_0) + x_0$, где C — произвольная постоянная, а x_0 — собственное значение полинома $g(x)$. Если полином $f(x)$ не перестановочен с $ax + b$, то

$$f_1(x) = \frac{f(ax+b) - b}{a} \neq f(x). \quad (2)$$

Полином $f_1(x)$ получен из $f(x)$ путем двукратной суперпозиции $f_1(x) = L^{-1}fL(x)$, где $L(x) = ax + b$,

которую будем называть преобразованием подобия: если x_0 — собственное значение полинома $f(x)$, то $(x_0 - b)/a$ — собственное значение полинома $f_1(x)$. Полиномы $f_1(x)$ и $g_1(x)$, полученные из перестановочных полиномов $f(x)$ и $g(x)$ путем одного и того же преобразования подобия, перестановочны между собой. У полинома $f(x)$ степени $n (\geqslant 2)$ не более n постоянных и не более $n-1$ полиномов каждой степени m, перестановочных с ним. В частности, у полинома второй степени существует не более одного перестановочного с ним полинома степени $m (\geqslant 1)$. Отсюда выводится, что два полинома, перестановочные с одним и тем же полиномом 2-й степени, перестановочны между собой (в общем случае этого утверждать нельзя).

Последовательность перестановочных между собою полиномов всех положительных степеней автор называет V-цепью. V-цепь содержит по одному полиному каждой степени и, наряду с полиномами g и h, содержит и gh. V-цепь является полной: не существует других полиномов, перестановочных со всеми элементами V-цепи. V-цепь, у которой полином второй степени — двучлен вида $x^2 + b$, называется основной V-цепью. Существуют две основные V-цепи, с $b = 0$ и $b = -2$:

$$\text{(I)}\quad x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots \tag{3}$$

$$\text{(II)}\quad x,\ x^2 - 2,\ x^3 - 3x,\ x^4 - 4x^2 + 2, \tag{4}$$

$$f_n = xf_{n-1} - f_{n-2}.$$

Все остальные V-цепи получаются из (3) или (4) путем преобразований подобия, разделяясь таким образом на V-цепи первого и второго класса. В частности, ко второму классу принадлежит последовательность полиномов Чебышева.

Доказывается, что у двучленного полинома $g(x) = x^r + a$ $(r \geqslant 2;\ a \neq 0)$ не существует других перестановочных полиномов, кроме итераций g^n. Единственное исключение представляет двучлен $x^2 - 2$, для которого итерации составляют лишь часть V-цепи (4) полиномов, перестановочных с $x^2 - 2$. Квадратичный полином $g(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ тоже, вообще говоря, не имеет других перестановочных полиномов, кроме итераций. Исключение составляют случаи, когда $I = a_1^2 - 4a_0a_2 - 2a_1$ равно 0 или 8. В этих случаях существуют перестановочные с $g(x)$ полиномы любой степени m; при $I = 0$ это полином V-цепи первого класса, при $I = 8$ — второго. А. Г. Школьник

8568. О локализации нулей полиномов. Пародн (Sur la localisation des zéros des polynomes. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 16, 1093—1096 (франц.)

Используя понятия предыдущей статьи (РЖМат, 1957, 2907), автор уточняет область расположения нулей многочлена n-й степени. Доказывается теорема: Пусть $f(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$, $|a_1| > 1 + nA$, $A > \frac{1}{n-1}$. Тогда многочлен $f(z)$ имеет $n-1$ нулей в единичном круге и только один нуль в круге с центром $b - a_1$ и радиуса $r = \frac{1}{2}\left[|a_1| - \sqrt{|a_1|^2 - 4nA}\right]$. Доказывается, что этот радиус меньше единицы.

Г. Н. Веселая

8569. О локализации характеристических чисел матриц и приложения к полиномам. Пародн (Sur la localisation des valeurs caractéristiques des matrices et application aux polynomes. Parodi Maurice), Bull. sci. math., 1957, **81**, № 1, 32—37 (франц.)

Совпадает по содержанию со статьями автора: РЖМат. 1957, 2907; реф. 8568.

8570. Об одном методе локализации характеристических чисел некоторых матриц. Пародн (Sur une méthode de localisation des valeurs caractéristiques de certaines matrices. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 12, 1597—1598 (франц.)

Известно, что характеристические числа матрицы $A = (a_{ij})$ расположены в области (D_1), являющейся объединением n кругов $|a_{ii} - \omega| \leqslant \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}|$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Автор рассматривает матрицы, в каждой строке которых имеется недиагональный преобладающий элемент $a_{il}\left(|a_{il}| > \sum_{j=1,\ j\neq l,\ i}^{n} |a_{ij}|\right)$, причем все преобладающие элементы расположены в разных столбцах. Для этих матриц областью расположения характеристических чисел будет пересечение областей D_1 и D_2, где D_2 — объединение n областей $|a_{ii} - \omega| \geqslant |a_{il}| - \sum_{k=1,\ k\neq i,\ l}^{n} |a_{ik}|$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Г. Н. Веселая

8571. О числе корней с положительной действительной частью алгебраических уравнений. Дервидюэ (Sur le nombre des racines à partie réelle positive des équations algébriques. Derwidué L.). Mathesis, 1957, 66, № 4-6, 144—151 (франц.)

Используется установленное Бюкнером (Bückner H., Quart. Appl. Math., 1952, **10**) представление уравнения

$$f_n \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

в виде

$$H_n \equiv \begin{vmatrix} 1 + \frac{c_0}{c_n}x - 1 & & & & \\ 1 & \frac{c_1x}{c_n} - 1 & & & \\ & 1 & \frac{c_2x}{c_n} - 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \frac{c_{n-2}}{c_n}x - 1 \\ & & & & 1 \quad \frac{c_{n-1}}{c_n}x \end{vmatrix}$$

где

$$\frac{c_0}{c_n} = \frac{a_0}{a_1},\ \frac{c_1}{c_n} = \frac{a_1^2}{D_2},\ \frac{c_k}{c_n} = \frac{D_k^2}{D_{k-1}D_{k+1}}\ (k = 2, \ldots, n-1),$$

а D_k — определители Гурвица

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1a_0 & & & \\ a_3a_2a_1a_0 & & & \\ a_5a_4a_3a_2 & & & \\ \ldots & & & \\ a_{2k-1}a_{2k-2}a_{2k-3}a_{2k-4}\ldots a_k & & & \end{vmatrix},\ a_j = 0 \text{ при } j > n$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Коэффициенты уравнения предполагаются действительными.

Доказывается, что число корней с положительной действительной частью равно числу перемен знаков в ряду

$$a_0,\ a_1,\ b_2,\ c_3,\ d_4,\ \ldots,\ a_n, \tag{1}$$

где $a_1, b_2, c_3, \ldots, a_n$ — элементы главной диагонали преобразованного к треугольному виду определителя D_n.

Вычисления элементов (1) производятся по так называемой схеме Рауса (Routh), которая (для $n=7$) имеет следующий вид:

$$\begin{array}{r|llll} & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ -a_0/a_1 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ -a_1/b_2 & b_2 & b_4 & b_6 & \\ -b_2/c_3 & c_3 & c_5 & a_7 & \\ -c_3/d_4 & d_4 & d_6 & & \\ -d_4/e_5 & e_5 & a_7 & & \\ & f_6 & & & \end{array}$$

Первые две строки — исходные коэффициенты; третья получена из первой и второй путем их сложения с предварительным умножением второй строки на соответствующий множитель (чтобы исключить первый коэффициент); аналогичным образом четвертая строка получается из второй и третьей, и т. д.

А. Г. Школьник

8572. Обобщение одной теоремы об определителях. Дьиреш (Eine Verallgemeinerung eines Kroneckerschen Determinantensatzes. Gyires B.), Publs mat., 1955, 4, № 1—2, 43—48 (нем.)

С помощью знакопеременной алгебры Грассмана доказываются две теоремы, являющиеся обобщением теорем Кронекера, Радо и автора. Ограничиваемся формулировкой первой теоремы: Матрицы $A^{\alpha}_{ij} \equiv \underset{(\alpha)}{a^{ij}_{st}}$, содержащие каждая q строк и p столбцов ($i=1, \ldots, s$; $j=1, \ldots r$; $\alpha=1, \ldots, m$; $z=1, \ldots, q$; $t=1, \ldots, p$), и матрицы $B^{\beta}_{kl} \equiv \left(\underset{(\beta)}{b^{kl}_{uv}}\right)$, содержащие каждая p строк и q столбцов ($k=1, \ldots, m$; $l=1, \ldots, n$; $\beta=1, \ldots, r$; $u=1, \ldots, p$; $v=1, \ldots, q$), используются в предположении, что $s:r=n:m=p:q$, для построения двух квадратных блочных матриц: $A_{\alpha} \equiv \left(A^{\varkappa}_{\varepsilon\delta}\right)$ и $B_{\beta} \equiv \left(B^{\beta}_{\rho\sigma}\right)$, порядок которых равен соответственно $pr\,(=sq)$ и $mp\,(=nq)$, а также для построения блочных матриц

$$C_{jk} \equiv \begin{pmatrix} A^{j}_{11}B^{r}_{jk} \ldots A^{j}_{1r}B^{r}_{j\lambda} \\ A^{j}_{s1}B^{r}_{jk} \qquad A^{j}_{sr}B^{r}_{jk} \end{pmatrix}$$

(содержащих каждая mq строк и rq столбцов), из которых в свою очередь составляется квадратная блочная матрица $C \equiv (C_{\lambda\mu})$ порядка $ms\,(=nrq)$. Доказывается, что $|C| = |A_1| \ldots |A_m|\,|B_1| \ldots |B_r|$, где $|M|$ означает определитель матрицы M. А. М. Лопшиц

8573. Общая аксиоматическая теория определителей. Стоякович (Une théorie générale axiomatique des déterminants. Stojaković Mirko), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1954, 6, № 1—2, 40—55 (франц.; рез. серб.)

Рассматривается кольцо K квадратных матриц порядка n над полем K. Ищется отображение δ кольца R на поле K, дистрибутивное как относительно сложения строк или столбцов матриц, так и относительно умножения матриц. Эта функция δ и называется определителем. Доказывается, что $\delta(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta(J_i)$, где суммирование распространено на все матрицы J_i, получаемые из единичной матрицы I некоторой перестановкой строк, p_i — произведение элементов матрицы X, занимающих те же места, что и единицы в J_i, $\delta(J_i)=1$ или -1 в зависимости от того, четным или нечетным числом перестановок получена J_i из I. Далее автор обобщает функцию δ на прямоугольные матрицы. Пусть A — некоторая $(l \times k)$-матрица. Положим

$$\varphi_n(A) \equiv \begin{cases} 0, \text{ если } n > \min(l, k), \\ \sum \det A_i, \end{cases}$$

где A_i пробегает всевозможные миноры порядка n матрицы A, если $n \leqslant \min(l, k)$.

Исследуются свойства функции φ_n. Определителем матрицы A считается $\varphi_n(A)$, где $n=\min(l, k)$. Для этих определителей оказываются справедливыми теоремы, аналогичные теореме Лапласа, теореме о линейной зависимости строк или столбцов, теореме о разложении по строке.

А. И. Курочкина, Л. А. Скорняков

8574. Циклическая матрица и соответствующий детерминант. Кастальдо (Matrici cicliche e relativi determinanti. Castaldo Domenico), Ricerca, 1956, 7, 29—40 (итал.)

Пусть $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$; $a_1, \ldots, a_n$ — две последовательности чисел; A^{r}_{s} — произведение r последовательных чисел a_i, начиная с s, причем их индексы считаются расположенными в циклическом порядке, $A^{0}_{i}=1$.

Тогда циклическая матрица $M = \|m_{ij}\|^{n}$, где $m_{ij} = u_{j-i}A^{j-i}_{i}$ при $j \geqslant i$ и $m_{ij} = u_{n+j-i}A^{n+j-i}_{i}$ при $J < i$, может быть представлена в виде $M = u_0E + u_1B + \ldots + u_{n-1}B^{n-1}$, где $B = \|b_{ij}\|^{n}_{1}$, $b_{i,\,i+1} = a_i$ при $i=1, 2, \ldots, n-1$; $b_{n1}=a_n$; $b_{ij}=0$ в остальных случаях. Для $n=3$ доказывается, что определитель $|M|$ равен произведению $S_1 \ldots S_n$, где $S_k = \sum_{j=0}^{n-1} u_j \omega^j \varepsilon^{j(k-1)}$, причем $\omega^n = a_1 \ldots a_n$, а ε = первообразный корень n-й степени из единицы. Указывается, что этот результат справедлив для любого n. Циклические матрицы M с фиксированными $a_1, \ldots, a_n$ и переменными $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ образуют алгебру.

Э. Апарисио

8575. Метрический критерий для нормальности комплексных матриц, порядок которых меньше 5. Асплунд (Metric criteria of normality for complex matrices of order less than 5. Asplund Edgar), Arkiv mat., 1958, 3, № 5, 441—447 (англ.)

Показывается, что из тождества $\|(A-\lambda I)^2\| = \|A-\lambda I\|$ следует нормальность матрицы A (т. е. $AA^* = A^*A$) только тогда, когда матрица A имеет порядок $n \leqslant 4$. Для $n=5$ строится опровергающий пример. Здесь A — $n \times n$-матрица, I — единичная матрица, $\|A\| \neq \sup_{f \neq 0} \|Af\| - \|f\|^{-1}$ $f=(f_1, \ldots, f_n)$ — вектор и $\|f\| = \sqrt{\sum |f_i|^2}$.

Ф. Р. Гантмахер

8576. О параметризации Кэли. Перл (On Cayley's parameterization. Pearl M. H.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 4, 553—562 (англ.)

Устанавливается теорема: Если A — симметрическая и Q — кососимметрическая матрицы и $\det(A+Q) \neq 0$, то матрица $P = (A+Q)^{-1}(A-Q)$ является автоморфизмом для матрицы A, т. е. $P'AP = A$, $\det P = 1$ и пространства строк у матриц A и $I+P$ совпадают. Обратно, если P есть автоморфизм для A, $\det P = 1$ и строки матриц $I+P$ и A порождают одно и то же пространство, то существует такая кососимметрическая матрица Q, что $P = (A+Q)^{-1}(A-Q)$. Исследуется множество матриц Q, отвечающих данному автоморфизму P. Сформулированная теорема является

обобщением теоремы Кэли и переходит в последнюю в случае $\det A \neq 0$. Ф. Р. Гантмахер

8577. Отделяющие преобразования над квадратными матрицами. Медоуз, Дашер (Separation transformations for square matrices. Meadows H. E., Dasher B. J.), IRE Trans. Circuit Theory, 1957, 4, № 4, 111—116 (англ.)

Транспонирование квадратной матрицы, переход к комплексно-сопряженной матрице и ряд других операций над матрицами, применяемых в теории электрических цепей, авторы объединяют под названием отделяющих преобразований, определяя последние с помощью 5 постулатов: $(Z_1 + Z_2)_s = Z_{1s} + Z_{2s}$; $(Z_s)_s = Z$, $(cI)_s = cI$, $0_s = 0$, всегда выполняется одно из двух равенств: $(Z_1Z_2)_s = Z_{1s}Z_{2s}$, $(Z_1Z_2)_s = Z_{2s}Z_{1s}$. По отношению к отделяющему преобразованию рассматриваются «симметрическая» и «кососимметрическая» части матрицы $\frac{1}{2}(Z + Z_s)$ и $\frac{1}{2}(Z - Z_s)$, и эти матрицы связываются с аналогичными матрицами для обратной матрицы Z^{-1}. Исследуется аналог ортогональной матрицы.

В качестве приложения дается обобщение инварианта Мэзона для 2-полюсника $U = |Z_{21} - Z_{12}|^2/4(R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21})$ на случай n-полюсника. Ф. Р. Гантмахер

8578. Неравенства для нормальных и эрмитовых матриц. Мирский (Inequalities for normal and Hermitian matrices. Mirsky L.), Duke Math. J., 1957, 24, № 4, 591—599 (англ.)

Продолжение статьи автора (РЖМат, 1957, 7643). Для $n \times n$-матрицы A с комплексными элементами a_{rs} и характеристическими числами $\omega_1, \ldots, \omega_n$ исследуется величина $s(A) = \max\limits_{r,\,s} |\omega_r - \omega_s|$ и устанавливаются неравенства:

1. Для эрмитовой матрицы A

1) $s(A) = 2\sup\limits_{u,\,v} |u^*Av|$, где u, v — ортонормированные векторы,

2) $s(A) \geqslant 2\max\limits_{r \neq s} |a_{rs}|$,

3) $s(A) \geqslant \max\limits_{r \neq s} [(a_{rr} - a_{ss})^2 + 4|a_{rs}|^2]^{1/2}$.

В неравенстве 2) знак $=$ достигается.

2. Для нормальной матрицы A

4) $s(A) = \sup\limits_{u,\,v} |u^*Au - v^*Av|$, где u, v — ортонормированные векторы;

5) $s(A) \geqslant \sqrt{3}\sup\limits_{u,\,v} |u^*Av|$, где u, v — ортонормированные векторы;

6) $s(A) \geqslant \sqrt{3}\max\limits_{r,\,s} |a_{rs}|$.

При $n \geqslant 3$ в неравенствах 5) и 6) знак $=$ достигается.

7) $s(A) \geqslant \max\limits_{r \neq s} [(\operatorname{Re} a_{rr} - \operatorname{Re} a_{ss})^2 + |a_{rs} + \bar{a}_{sr}|^2]^{1/2}$;

8) $s(A) \geqslant \max\limits_{r \neq s} [|a_{rr} - a_{ss}|^2 + (|a_{rs}| - |a_{sr}|)]^{2^{1/2}}$;

9) $s(A) \geqslant \max\limits_{r \neq s} (|a_{rs}| + |a_{sr}|)$;

10) $s(A) \geqslant \max\limits_{r \neq s} \frac{1}{\sqrt{2}} [|a_{rr} - a_{ss}|^2 + |(a_{rr} - a_{ss})^2 + 4a_{sr}a_{rs}| + 2|a_{rs}|^2 + 2|a_{sr}|^2]^{1/2}$.

Определяется символ

$$M\begin{bmatrix} a_1, & \ldots, & a_n \\ t_1, & \ldots, & t_n \end{bmatrix} = \max_{\pi} |t_{\pi 1}a_1 + \ldots + t_{\pi n}a_n|,$$

Пробегает все перестановки из индексов $1, \ldots, n$. В этом символе нижние числа t_i предполагаются всегда вещественными.

Для нормальной матрицы устанавливаются соотношения:

$$11)\ M\begin{bmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{nn} \\ t_1, & \ldots, & t_n \end{bmatrix} \leqslant M\begin{bmatrix} \omega_1, & \ldots, & \omega_n \\ t_1, & \ldots, & t_n \end{bmatrix},$$

$$12)\ M\begin{bmatrix} \omega_1, & \ldots, & \omega_n \\ t_1, & \ldots, & t_n \end{bmatrix} = \sup |t_1u_1^*Au_1 + \ldots + t_nu_n^*Au_n|,$$

где $u_1, \ldots, u_n$ — произвольная ортонормированная система векторов. Ф. Р. Гантмахер

8579. О границах характеристических чисел произведений произвольных и положительно определенных матриц. Исхак (Sur les bornes des valeurs caractéristiques de certains produits des matrices. et des matrices définies positives. Ishaq Mohammad), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 5, 480—483 (франц.)

Приводятся некоторые оценки для характеристических чисел произведения матриц. Ф. Р. Гантмахер

8580. О границах для характеристических чисел произведения матриц. Маратхе (On bounds for characteristic values of a product of matrices Marathe C. R.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 9, 648 (англ.)

Если $A = \|a_{ij}\|_1^n$, то $S_i(A) = \sum_k |a_{ik}|$, $T_i(A) = S_i(A^*)$, $S(A) = \max\limits_i S_i(A)$, $T(A) = S(A^*)$.

Устанавливаются следующие неравенства для характеристических чисел $\lambda(AB)$ произведения двух квадратных матриц A и B:

$$|\lambda(AB)| \leqslant \{S(A)S(B)\}^{\alpha}\{T(A)T(B)\}^{1-\alpha},$$

$$|\lambda(AB)| \leqslant S(B)^{\alpha}T(A)^{1-\alpha}\max_i \{S_i(A)^{\alpha}T_i(B)^{1-\alpha}\},$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Ф. Р. Гантмахер

8581. Заметка о характеристических числах произведения двух матриц. Маратхе (A note on characteristic values of products of two matrices. Marathe C. R.), Quart. J. Math., 1957, 8, № 32, 291—294 (англ.)

Пусть A и B — произвольные комплексные соответственно $n \times m$- и $m \times n$-матрицы. Через $\lambda(Q)$ обозначается характеристическое число матрицы Q. Устанавливаются неравенства

$$\lambda[(AB)^*AB] \leqslant \lambda_{\max}(A^*A)\lambda_{\max}(B^*B), \qquad (1)$$

$$\lambda[(AB)^*AB] \geqslant \lambda_{\min}(A^*A)\lambda_{\min},$$

$$\lambda_{\min}(A^*A)\lambda_{\min}(B^*B) \leqslant |\lambda(AB)| \leqslant \lambda_{\max}(A^*A)\lambda_{\max}(B^*B),$$

$$|\lambda(AB)| \leqslant \min\{S(A)S(B), T(A)T(B)\},$$

где

$$S(A) = \max \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|,\ T(A) = S(A^*).$$

Неравенство (1) устанавливается и для более общего случая, когда A — $n \times m$-матрица, а B — $m \times p$-матрица. Для случая квадратных матриц эти неравенства были установлены Роем, Ханом и др. (РЖМат, 1956, 1980; 1957, 5346). Ф. Р. Гантмахер

8582. Некоторые неравенства для нормы квадратных матриц. Хан (Some norm inequalities for square matrices. Khan Nisar A.), Ganita, 1955, 6, № 1—2, 9—14 (англ.)

Доказывается, что для неотрицательно эрмитовой матрицы A

$$N[pA+(1-p)1] \geqslant pN(A) \text{ при } 0 \leqslant p \leqslant 1,$$

$$N[pA+(1-p)1] \leqslant N(A^p) \text{ при } p=0, 1, 2, 3, \ldots,$$

где $N(A)=\left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$.

Кроме того, автор пытается доказать, что для произвольной квадратной матрицы A порядка n

$$n^{1/2}N[pA+(1-p)1] \geqslant p|\operatorname{tr} A| \quad (1)$$

и что для двух эрмитовых матриц A, B одного порядка, где A неотрицательно определена, B положительно определена,

$$N[pA+(1-p)B] \leqslant cN^p(A). \quad (2)$$

Однако доказательство неравенства (1) основывается на неверном неравенстве $|p\lambda_2+1-p| \geqslant |p\lambda_2|$ (не имеющем, например, места при $p=\frac{1}{3}$, $\lambda_2=-2$) и само это неравенство (1) также неверно для произвольной матрицы A, в чем можно убедиться, полагая, например, $n=1$, $p=\frac{1}{3}$, $A=(-2)$. Неравенство (2) фактически не является оценкой, ибо множитель c, полученный из приведенного автором доказательства, существенно зависит от A, B и p.

М. А. Наймарк

8583. **Характеристические векторы окаймленных матриц бесконечной размерности. Уигнер** (Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. Wigner Eugene P.), Ann. Math., 1955, 62, № 3, 548—564 (англ.)

Окаймленной матрицей автор называет сумму диагональной матрицы K и окаймляющей матрицы V, удовлетворяющей условиям $V_{mn}=0$, $V_{mn}=0$ при $|m-n|>N$. В дальнейшем рассматриваются следующие 2 случая:

1) K, V — бесконечные матрицы, диагональными элементами матрицы K являются . . ., —2, —1, 0, 1, 2, . . ., V_{mn} вещественны и $|V_{mn}|=V$; m, $n=$ . . —2, —1, 0, 1, 2, . . .;

2) $k=0$, $V=\|V_{mn}\|$, m, $n=-N$, $-N+1$, . . ., N, — симметричная вещественная матрица размерности $2N+1$ и $|V_{mn}|=V$. В случае 1) при $N=1$ доказывается, что собственными значениями матрицы являются все целые числа и что собственный вектор $\psi^{(k)}=\{\psi_l^{(k)}\}$, отвечающий собственному значению k, определяется формулами $\psi_l^{(k)}=\psi_{l-k}$, $\psi_l=J_l(2v)$, где J_l — функция Бесселя. Кроме того, решаются следующие две задачи. Рассмотрим сумму $\sum(\psi_0^{(\lambda)})^2$, распространенную на собственные значения матриц $k+v$, находящиеся в интервале $(x, x+\delta)$, а затем при фиксированных k и v среднее значение этой суммы, отвечающее случайному равномерному распределению знаков чисел V_{mn}; требуется в случаях 1) и 2) определить предел $\sigma(x)$ отношения этого среднего значения к δ при $\delta \to 0$. Эти задачи возникают при изучении волновых функций настолько сложных квантово-механических систем, что к ним применимы статистические методы (РЖФиз, 1957, 16536). Доказывается, что в случае 2)

$$\sigma(x)=\begin{cases} \dfrac{(8Nv^2-x^2)^{1/2}}{4\pi Nv^2} & \text{при } -(8N)^{1/2}v<x<(8N)^{1/2}v. \\ 0 & \text{для остальных значений } x. \end{cases}$$

в случае же 1) для $\sigma(x)$ получается интегральное уравнение, а также асимптотическая формула при $N \to \infty$, $v \to \infty$ и фиксированном $q=v^2N^{-1}$.

М. А. Наймарк

8584 К. **Линейная алгебра для студентов последнего курса. Мердок** (Linear algebra for undergraduates. Murdoch David Carruthers. New York, Wiley; London, Chapman and Hall, 1957, XI, 239 pp., ill., 44 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957 № 415, 13 (англ.)

ГРУППЫ

8585. **Группы, допускающие любую перестановку факторов композиционного ряда. Берман С. Д., Любимов В. В.,** Успехи матем. наук, 1957, 12, № 5, 181—183

Основными результатами являются следующие предложения: 1. Если G — группа с композиционным рядом

$$G=G_1 \supset \ldots \supset G_{s+1}=1$$

конечной длины, и ни один из факторов G_i/G_{i+1}, где $i<k$, не изоморфен фактору G_j/G_{j+1} при $j \geqslant k$, то подгруппа G_k является нормальным делителем группы G.

2. Группа G с композиционным рядом конечной длины тогда и только тогда допускает любую перестановку факторов композиционного ряда (т. е. обладает композиционным рядом с любым наперед заданным расположением композиционных факторов), когда она представляется в виде прямого произведения групп с изоморфными композиционными факторами.

Второе из этих предложений, как отмечают и сами авторы, обобщает известное предложение о нильпотентности конечных разрешимых групп, допускающих любую перестановку факторов композиционного ряда.

С. Н. Черников

8586. **О сопряженности силовских p-подгрупп локально нормальной группы. Каргаполов М. И.,** Успехи матем. наук, 1957, 12, № 4, 297—300

Известно, что из конечности хотя бы одного класса сопряженных силовских p-подгрупп произвольной группы следует сопряженность всех силовских p-подгрупп этой группы. В реферируемой работе показано, что для локально нормальных групп верна обратная теорема: Если все силовские p-подгруппы локально нормальной группы сопряжены, то число их конечно.

Для счетных локально нормальных групп это утверждение доказано Бэром (Baer R., Duke Math. J., 1940, 6, 598—614).

П. А. Гольберг

8587. **Характеристика некоторых метациклических групп. Шенкман** (A characterization of some metacyclic groups. Schenkman Eugene), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 4, 664—667 (англ.)

Пусть G — разрешимая группа, $G(k)$ — подгруппа, порожденная k-ми степенями всех ее элементов (k — фиксированное натуральное число). Доказывается, что тогда и только тогда всякая подгруппа группы G, являющаяся членом некоторого ее нормального ряда, совпадает с одной из подгрупп $G(k)$, когда или G — циклическая группа, или G — конечная метациклическая группа, в которой коммутант и факторгруппа по коммутанту есть циклические группы взаимно простых порядков. Если требование разрешимости группы G отбросить, утверждение перестает быть верным.

А. П. Мишина

8588. **Об одной проблеме, которую поставили Б. Х. и Х. Нейман. Гашюц** (Zu einem von B. H. und H. Neumann gestellten Problem. Gaschütz Wolfgang), Math. Nachr., 1955, 14, № 4—6, 249—252

Дается утвердительный ответ на вопрос, поставленный Б. Х. и Х. Нейман:

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа, порождаемая n элементами; $\mathfrak{F}_n$ — свободная группа, порождаемая n свободными образующими; $\mathfrak{N}$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{S}$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{F}_n$, причем $\mathfrak{F}_n/\mathfrak{S} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Можно ли утверждать, что $\mathfrak{S}$ содержит такой нормальный делитель $\mathfrak{T}$ группы $\mathfrak{F}_n$, что $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{F}_n/\mathfrak{T}$?

Доказаны также теоремы:

1. Пусть группа $\mathfrak{G}$ порождается n элементами; $\mathfrak{N}$ — конечный нормальный делитель этой группы. Тогда каждой системе образующих $\mathfrak{E}_i\mathfrak{N}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ соответствует система образующих $\mathfrak{E}_i \in \mathfrak{E}_i\mathfrak{N}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ группы $\mathfrak{S}$.

2. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — конечные нормальные делители однородной группы $\mathfrak{G}$ и пусть $\bar{\alpha}$ — изоморфизм между фактор-группами $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Тогда существует такой автоморфизм α группы $\mathfrak{G}$, что $(G\mathfrak{M})^{\alpha} = (G\mathfrak{N})^{\bar{\alpha}}$ для любого G из $\mathfrak{G}$. (Группа $\mathfrak{G}$ называется однородной, если для некоторого целого положительного n (определяемого строением группы $\mathfrak{G}$) группа $\mathfrak{F}_n$ имеет лишь один такой нормальный делитель $\mathfrak{S}$, что $\mathfrak{F}_n/\mathfrak{S} \cong \mathfrak{G}$).

3. Конечная группа $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots \times \mathfrak{G}_s$ порождается n элементами в том и только в том случае, если каждая из групп $\mathfrak{G}_i$ и $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_i)$ $(i=1, 2, \ldots, s)$ порождается n элементами. Автор через $\mathfrak{N}(\mathfrak{X})$ обозначает пересечение всех максимальных нормальных делителей группы $\mathfrak{X}$.

4. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}_{11} \times \mathfrak{E}_{12} \times \ldots \times \mathfrak{E}_{1s_1} \times \mathfrak{E}_{21} \times \ldots \times \mathfrak{E}_{ts_t}$, причем $\mathfrak{E}_{ik} \cong \mathfrak{E}_{i'k}$ в том и только в том случае, если $i=i'$. $\mathfrak{G}$ порождается n элементами в том и только в том случае, если для любого i $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_{i1} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{is_i}$ порождается n элементами. Если группа $\mathfrak{G}_i$ разрешима, то она порождается n элементами в том и только в том случае, если $s_i \leqslant n$.

В. К. Туркин

8589. **О строении групп с конечными классами сопряженных элементов. Черников С. Н.**, Докл. АН СССР, 1957, 115, № 1, 60—63

Получены интересные результаты, устанавливающие связь смешанных групп, все классы сопряженных элементов которых конечны, с локально нормальными группами.

Основной результат: группа G тогда и только тогда не имеет бесконечных классов сопряженных элементов, когда либо она локально нормальна, либо в ее центре содержится такая подгруппа A без кручения, что фактор-группа G/A локально нормальна. Из доказательства этой теоремы выводится, что если непериодическая группа G является расширением своего центра с помощью локально конечной группы, то ее элементы конечного порядка составляют (инвариантную) подгруппу. Фактор-группа группы G по этой подгруппе является абелевой группой без кручения.

Как следствие из этих результатов показано, что в непериодической группе G, все классы сопряженных элементов которой конечны, 1) элементы конечного порядка составляют подгруппу R и 2) фактор-группа G/R является абелевой группой без кручения. В частности, коммутант группы G является периодическим и при $R=E$ группа G будет абелевой.

П. А. Гольберг

8590. **Исправления и добавления к работе «Возрастающие ряды коммутантов». Неймaн** (Corrigendum and addendum to «Ascending derived series». Neumann B. H.), Compositio math., 1957, 18, № 2, 128 (англ.)

См. РЖМат, 1957, 7660. Приводится построенный Хигманом пример взамен ошибочного примера из указанной работы. Формулируется также замеченное Хигманом следующее следствие теоремы 7.3: Группа с конечным числом образующих изоморфна некоторому члену своего ряда коммутантов только тогда, когда она совпадает с ним.

Б. И. Плоткин

8591. **Конечные факторы в бесконечных возрастающих рядах коммутантов. Бомслаг** (Finite factors in infinite ascending derived series. Baumslag Gilbert), Math. Z., 1958, 68, № 5, 465—478 (англ.)

С помощью интересных конструкций строятся примеры бесконечных возрастающих рядов коммутантов с бесконечным числом конечных факторов (РЖМат, 1957, 7660).

Б. И. Плоткин

8592. **Группы с малым числом автоморфизмов. Брис, Миранда** (Groups with a small number of automorphisms. Vries H. de, Miranda A. B. de), Math. Z., 1958, 68, № 5, 450—464 (англ.)

Изучаются группы, у которых группа всех автоморфизмов содержит не более восьми элементов. Доказывается, что для любого r с условием $2 \leqslant r \leqslant \aleph$ существует абелева группа без кручения ранга r (разложимая в прямое произведение и неразложимая) такая, что ее группа автоморфизмов изоморфна $C_2 \times C_2$, где C_n — циклическая группа n-го порядка. Если G — абелева группа без кручения и $A(G)$ — ее группа автоморфизмов, причем $A(G) \approx C_4$, то G неразложима, и ее ранг является четным, причем любой четный ранг $\leqslant \aleph$ возможен.

Существуют разложимые и неразложимые абелевы группы без кручения всех рангов с условием $3 \leqslant r \leqslant \aleph$, для которых $A(G) \approx C_2 \times C_2 \times C_2$ или $A(G) \approx C_2 \times C_4$. Случай $r=2$ здесь невозможен.

Группа автоморфизмов абелевой группы без кручения не может быть изоморфной симметрической группе третьей степени $\mathfrak{S}_3$, группе диэдра D или C_{8n}, где n — любое целое положительное число. Если G — смешанная абелева группа и порядок группы $A(G)$ не более восьми, то $A(G) \approx C_2 \times C_2$ или $A(G) \approx C_2 \times C_2 \times C_2$ и периодическая часть группы G в обоих случаях изоморфна группе C_2.

Каждая не абелева группа, кроме $\mathfrak{S}_3$, имеет группу автоморфизмов порядка $\geqslant 8$. Если G не абелева и порядок $A(G)$ равен 8, то или $G \approx D$ или G бесконечная и $A(G) \approx C_2 \times C_2 \times C_2$.

Б. И. Плоткин

8593. **К теории групп. VI. Грюн** (Beiträge zur Gruppentheorie. VI. Grün Otto), Math. Nachr., 1957, 16, № 5—6, 271—280 (нем.)

Предыдущие части см. J. reine und angew. Math., 1935, 174, 1—14; 1948, 186, 165—169; Math. Nachr., 1948, 1, 1—24; 1950, 3, 77—99; РЖМат, 1956, 7886. По содержанию работа совершенно не зависит от предшествующих статей автора, вышедших под таким же общим заголовком.

Пусть $W(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{\nu}\left(\prod_{\mu=1}^{n} x_{\mu}^{\alpha_{\mu,\nu}}\right)$ — слово в свободных образующих $x_1, \ldots, x_n$ свободной группы, $\sum_{\nu} \alpha_{\mu,\nu} = m_{\mu}$, $\mu = 1, \ldots, n$. Множество всех неединичных слов разбивается на три класса $\mathfrak{C}_i(W): W \in \mathfrak{C}_1$ если $m_1 = \ldots = m_n = 0$; $W \in \mathfrak{C}_2$, если $(m_1, m_2, \ldots, m_n) = 1$, и $W \in \mathfrak{C}_3$, если $(m_1, \ldots, m_n) = k > 1$ (k — произвольное). В любой группе G все возможные элементы вида $W(g_1, \ldots, g_n)$ при фиксированном W, $g_i \in G$, порождают некоторую подгруппу, обозначаемую через G_W. Доказано, что $G_{W_1} \subseteq (G, G)$, $G_{W_2} = G$ и $G(k) \subseteq G_{W_3} \subset G(k)(\ldots, G)$, где $W_i \in \mathfrak{C}_i$, а $G(k)$ — подгруппа, порожденная k-ми степенями всех элементов из G. Основной целью работы является выяснение необходимых и достаточных условий, при которых G_W совпадает с G ($W \in \mathfrak{C}_1$ или $\mathfrak{C}_3$). Используется представление G в виде фактор-группы свободной группы. В пер-

вых двух параграфах подробно рассмотрен наиболее интересный частный случай, когда $W_1 = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ и, следовательно, $G_{W_1} = (G, G)$. А. И. Кострикин

8594. Структурные изоморфизмы свободной метабелевой группы. Садовский Л. Е., Матем. сб., 1957, 42, № 4, 445—460

Как известно, свободная нильпотентная группа определяется структурой своих подгрупп. Естественно предположить, что каждый структурный изоморфизм двух таких групп является следствием некоторого изоморфизма между самими группами. Этот вопрос в работе решен отрицательно. Здесь находятся все такие взаимно однозначные соответствия между циклическими подгруппами двух свободных метабелевых групп, которые индуцируются структурными изоморфизмами групп.

Среди этих соответствий имеются такие, которые не индуцируются никакими изоморфизмами групп. Отсюда следует существование структурных изоморфизмов свободных метабелевых групп, не индуцируемых групповыми изоморфизмами. Б. И. Плоткин

8595. Полупрямые произведения с достаточными гомоморфизмами. Хеймо (Semi-direct products with ample homomorphisms. Haimo Franklin), Phys. Rev., 1957, 106, № 1, 401—425 (англ.)

Если H и K — любые две группы и $\varphi \in \mathrm{Hom}(K, \mathfrak{A}(H))$, где $\mathfrak{A}(H)$ — группа автоморфизмов группы H, то множество пар (h, k) с умножением $(h, k) \times (h_1, k_1) = (h\varphi_k(h_1), kk_1)$ образует группу $G = (H, K; \varphi)$ — полупрямое произведение групп H и K относительно φ. Большая часть свойств полупрямых произведений, установленных автором при различных дополнительных предположениях, имеет место, когда φ — достаточный гомоморфизм, т. е. группа внутренних автоморфизмов $I(H)$ содержится в $\varphi(K)$. Специальный параграф посвящен «полупрямым произведениям с включением», когда или K содержит H в качестве нормального делителя, или же K является подгруппой в H. Выяснены необходимые и достаточные условия существования композиции гомоморфизмов $\alpha \wedge \beta \in \mathrm{Hom}(G, \varphi(K))$, где $\alpha \in \mathrm{Hom}(H, \varphi(K))$ и $\beta \in \mathrm{Hom}(K, \varphi(K))$ Доказано, в частности, что если композиция естественного гомоморфизма группы H на $I(H)$ и внутреннего автоморфизма в $\mathfrak{A}(H)$, порожденного внутренним автоморфизмом из H, существует, то H должна быть нильпотентной группой класса 3. Изучена (с более точными результатами в случае метабелевой группы H) группа тех автоморфизмов в G, которые индуцируют автоморфизмы в H и K. Определены централизатор группы H и башня нормализаторов группы K в G. Исследована взаимосвязь между верхними центральными рядами групп H, K и G. Формулировки большинства теорем очень сложные. А. И. Кострикин

8596. Расширения l-групп и приложения. Жаффар (Extension des groupes réticulés et applications. Jaffard Paul), Publs scient. univ. Alger, 1954, A1, № 1, 197—222 (франц.)

Используемые обозначения и определения, а также ряд результатов содержатся в предыдущей работе (РЖМат, 1957, 4637). Пусть G — частично упорядоченное расширение частично упорядоченной группы H с помощью частично упорядоченной группы Q. Доказано, что для того чтобы частично упорядоченная группа G была направленной, необходимо, чтобы группа Q была направленной. Если G — лексикографическое расширение и $Q \neq \{0\}$, то для направленности группы G достаточна направленность группы Q. В общем случае направленность групп H и Q достаточна для направленности группы G. Доказано, что частично упорядоченное расширение G группы H при помощи группы Q является упорядоченным в том и только том случае, когда оно лексикографическое и группы H и Q упорядоченны. Рассматриваются последовательные частично упорядоченные расширения. Доказано, что если H, Q_1 и Q_2 — три частично упорядоченные группы, G — частично упорядоченное расширение группы H с помощью группы Q_1, а Γ — частично упорядоченное расширение группы G с помощью группы Q_2, то фактор-группа $Q = \Gamma/H$ при естественной частичной упорядоченности совпадает с частично упорядоченным расширением группы Q_1 с помощью группы Q_2. Если при этих же условиях Γ — лексикографическое расширение, то группа Q есть лексикографическое расширение группы Q_1 с помощью группы Q_2. Полученные результаты применяются для изучения абелевых l-групп. Если G — l-группа, то $\hat{G}$ — подгруппа, порожденная всеми элементами из G_+, не принадлежащими максимальной нити (РЖМат, 1955, 3635). Группа G упорядоченна в том и только том случае, когда $\hat{G} = \{0\}$. Доказано, что если группа G_i имеет конечное число нитей и не является упорядоченной, то группа $\hat{G}$ имеет одинаковое с группой G число нитей. Если G — лексикографическое расширение l-группы H с помощью упорядоченной группы Q, то $\hat{G} = \hat{H}$. Доказано, что l-группа может допускать лишь единственное представление в виде прямой суммы l-групп G_i, обладающих свойством $\hat{G}_i \neq G_i$. Доказано, что всякая l-группа, имеющая n нитей ($n > 1$), для которой $\hat{G} = G$, есть прямая сумма l-групп, имеющих меньше n нитей. Отсюда следует, что l-группа $G \neq \{0\}$ с конечным числом нитей всегда однозначно представима в виде прямой суммы конечного числа l-групп G_i, для которых $\hat{G}_i \neq G_i$. Таким образом, для разложимости l-группы $G \neq \{0\}$ с конечным числом нитей в прямую сумму l-групп, отличных от $\{0\}$, необходимо и достаточно чтобы $G = \hat{G}$. Приводится пример, показывающий, что в этом утверждении нельзя опустить условие конечности числа нитей.

l-группой категории n называется всякая l-группа класса n, не принадлежащая классу $n-1$. Доказано, что l-группа, имеющая n отличных от нуля нитей, имеет категорию не больше n, а также, что прямая сумма групп категории n есть группа класса n и категории n. Если для l-группы G категории n $G = \hat{G}$, то $\hat{G}$ — есть группа категории $n-1$. Отсюда следует, что лексикографическое расширение l-группы G категории n с помощью упорядоченной группы $Q \neq \{0\}$ есть группа категории n при $G \neq \hat{G}$ и категории $n-1$ при $G = \hat{G}$. Е. П. Шимбирева

8597. ПС-изоморфизмы частично упорядоченных локально нильпотентных групп. Кутыев К. М., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 2, 193—198

Рассматривается частично упорядоченная локально нильпотентная группа G без кручения. Изоморфизм φ, отображающий структуру $S(G)$ полугрупп группы G на структуру $S(G^*)$ полугрупп группы G^*, называется полугрупповым структурным изоморфизмом (*ПС*-изоморфизмом) группы G на группу G^*. Полугруппа $\mathfrak{S}$ группы G называется изолированной, если для любого элемента $g \in G$ и любого натурального числа n из того, что $g^n \in \mathfrak{S}$, следует $g \in \mathfrak{S}$. Относительно прочих определений см. РЖМат, 1956, 5121.

Доказано, что с помощью *ПС*-изоморфизма φ нильпотентная группа G с конечным числом образующих отображается на нильпотентную группу G^* с конечным числом образующих и для всякой инвариантной линейной полугруппы $\mathfrak{S}$ группы G $\varphi(\mathfrak{S})$ также является инвариантной линейной полугруппой группы G^*. Если G^* — образ упорядоченной локально нильпо-

тентной группы G с полугруппой положительных элементов $\mathfrak{S}$ при $ПС$-изоморфизме φ, то группа G^* локально нильпотентна и ее можно так упорядочить, что $\varphi(\mathfrak{S})$ будет полугруппой положительных элементов G^*. Основная теорема утверждает, что при $ПС$-изоморфизме φ локально нильпотентной группы G на группу G^* образом чистой изолированной инвариантной полугруппы $\mathfrak{S}$ с единицей из группы G является чистая изолированная инвариантная полугруппа с единицей группы G^*. Отсюда следует, что если локально нильпотентная частично упорядоченная группа G с изолированной полугруппой положительных элементов $ПС$-изоморфна группе G^*, то группа G^* локально нильпотентна и также может быть частично упорядочена с помощью изолированной полугруппы положительных элементов. Е. П. Шимбирева

8598. **Упорядоченные абелевы группы. Грейветт** (Ordered abelian groups. Gravett K. A. H.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 25, 57—63 (англ.)

Дается новое доказательство известных теорем Хана об упорядоченных абелевых группах. Кроме доказательства Хана, известно также доказательство Клиффорда (РЖМат, 1957, 7656). Более общие результаты получены Конрадом (РЖМат, 1954, 604).

Е. П. Шимбирева

8599. **Группы классов вычетов по идеалам полиномиальных вычетов для многих неизвестных. Нёбауэр** (Gruppen von Restklassen nach Restpolynomidealen in mehreren Unbestimmten. Nöbauer Wilfried), Monatsh. Math., 1955, 59, № 2, 118—145 (нем.)

Предшествующие исследования автора (РЖМат, 1955, 3594) обобщаются на случай полиномов от нескольких неизвестных.

Пусть $\Gamma(\mathfrak{x})$ — кольцо многочленов от k неизвестных над кольцом Γ целых рациональных чисел (здесь $\mathfrak{x}$ обозначает вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$). Рассматривается прямая сумма Γ_k k экземпляров этого кольца, элементы которой $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = (f_1(\mathfrak{x}), f_2(\mathfrak{x}), \ldots, f_k(\mathfrak{x}))$ называются полиномиальными векторами. Обозначим через A_k^n совокупность элементов кольца Γ_k (идеал полиномиальных вычетов), удовлетворяющих условию $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \equiv 0 \pmod n$ для любого целочисленного вектора $\mathfrak{x}$. Фактор-кольцо Γ_k/A_k^n образует полугруппу $\mathfrak{H}_n^k$ относительно операции подстановки $\mathfrak{f}\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x}))$. При этом элементы $\mathfrak{H}_n^k$ можно рассматривать как преобразования векторного пространства V_n (размерности k) над кольцом классов вычетов по модулю n (элементу $\mathfrak{a} \in V_n$ сопоставляется $\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$). Элементы $\mathfrak{K}_n^k$, для которых эти преобразования V_n в себя взаимно однозначны, образуют группу $\mathfrak{G}_n^k$, изучение которой и является целью реферируемой работы. Ее подгруппа, элементы которой (классы Γ_k/A_k^n) допускают представителей вида $(x_1, x_2, \ldots, x_l, g_{l+1}(\mathfrak{x}), \ldots, g_k(\mathfrak{x}))$, обозначается через ${}_l\mathfrak{G}_n^k$.

Для этих групп вычисляются порядки, исследуются системы представителей, имеющих наименьшие возможные степени входящих в них полиномов, а также функция ${}_lE_n^k(t)$, выражающая количество элементов из ${}_l\mathfrak{G}_n^k$, допускающих представителей вида $(x_1, x_2, \ldots, x_l, g_{l+1}, \ldots, g_k)$, где степень g_{l+i} не превосходит t_i (t обозначает целочисленный вектор $(t_1, \ldots, t_{k-l})$). Показывается, что при $n = ab$, где $(a, b) = 1$, группа ${}_l\mathfrak{G}_n^k$ является прямым произведением групп ${}_l\mathfrak{G}_a^k$ и ${}_l\mathfrak{G}_b^k$. Отсюда следует, что ${}_lE_{ab}^k(t) = {}_lE_a^k(t)\,{}_lE_b^k(t)$ при $(a, b) = 1$, и задача сводится к рассмотрению случая, когда $n = p^e$, где p — простое число.

При простом $n = p$ показывается, что ${}_l\mathfrak{G}_n^k$ является прямым произведением p^l экземпляров симметрической группы $\mathfrak{S}_{p^{k-l}}$. При $n = p^e$ $(e > 2)$ устанавливаются рекуррентные формулы, позволяющие сводить вычисление к меньшему значению e (группа ${}_l\mathfrak{G}_{p^e}^k$ является гомоморфным образом ${}_l\mathfrak{G}_{p^e}^k$). Так, обозначим через $\varepsilon(i)$ показатель числа p в разложении $i!$ на простые, и пусть $r(e)$ — количество натуральных чисел i таких, что $\varepsilon(i) < e$. Имеет место формула

$$ {}_lE_{p^e}^k(t) = {}_lE_{p^{e-1}}^k(t)_p \sum_{\nu=1}^{k-l} \eta_{l^e}^k(t_\nu), $$

где $\eta_{l^e}^k(t)$ выражается рекуррентно из условия

$$ \eta_{l^e}^k(t) = \sum_{\mu=0}^{a} \eta_{l^{e-\varepsilon(\mu)}}^{k-1}(t-\mu), \quad a = \min(s,\ r(e)). $$

Случай $n = p^2$ рассматривается особо, и для него получаются более сложные формулы.

Коротко рассмотрено строение двух подгрупп группы ${}_l\mathfrak{G}_n^k$: а) подгруппы ${}_l\mathfrak{M}_n^k$, состоящей из элементов ${}_l\mathfrak{G}_n^k$, допускающих представителей со всеми компонентами первой степени; б) подгруппы ${}_l\mathfrak{P}_n^k$, у которой можно выбрать представителей так, чтобы g_{l+1} были одночленами. И. З. Розенкноп

8600. **Линейные разрешимые группы. Хупперт** (Lineare auflösbare Gruppen. Huppert B.), Math. Z. 1957, 67, № 5, 479—513 (нем.)

Доказывается, что длина ряда коммутантов линейной разрешимой группы степени n не превосходит числа $2n$. Пусть $\mathfrak{G}$ — конечная разрешимая группа, а $p_j^{n_j}$ — порядки факторов ее главного ряда, тогда $r(\mathfrak{G}) = \max n_j$ называется рангом группы $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{G}$ — линейная группа, вполне приводимая над алгебраически замкнутым полем, то $r(\mathfrak{G}) \leqslant n$.

Пусть $\mathfrak{G}$ — разрешимая, вполне приводимая линейная группа над $GF(p^m)$. Если p^x — высшая степень p, входящая в порядок $\mathfrak{G}$, то при $p > 2$ $a \leqslant m\left(\frac{3n}{p} - 1\right)$, для отрицательного $m\left(\frac{3n}{p} - 1\right)$ $a = 0$, а при $p = 2$ $a = m(n-1)$.

Для абстрактных конечных разрешимых групп доказывается теорема: Если $\mathfrak{G}$ разрешима и ее ранг равен r, то k-й коммутант группы $\mathfrak{G}$ при $k \geqslant 2r$ является нильпотентной группой. Д. А. Супруненко

8601. **О композиционных функциях нильпотентных групп Ли. Чжень Го-цзай** (On the composition functions of nilpotent Lie groups. Chen Kuo-tsai), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 6, 1158—1159 (англ.)

Пусть $\mathfrak{G}$ — вещественная или комплексная группа Ли, $x_1, \ldots, x_n$ — канонические координаты в окрестности ее единицы, $f_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$ — координаты произведения элементов с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$. Доказывается, что если f_i — многочлены, то группа $\mathfrak{G}$ нильпотентна. Обратная теорема была доказана Картаном (Cartan E., J. math. pures et appl., 1938, 17, 1—12). А. Л. Онищик

8602. **Топологические группы преобразований. Монтгомери** (Topological transformation groups. Montgomery Deane), Proc. Internat. Congr.

Mathematicians, 1954. Vol. 3. Groningen—Amsterdam, 1956, 185—188) (англ.)

Обзор работ различных авторов по пятой проблеме Гильберта и смежным вопросам теории групп преобразований. Н. Я. Виленкин

8603. Борелевские множества и расширения групп. Макки (Les ensembles boréliens et les extensions des groupes. Mackey George W.), J. math. pures et appl., 1957, 36, № 2, 171—178 (франц.)

Пусть S — топологическое пространство, и пусть B — минимальная система его подмножеств, содержащая все замкнутые множества и замкнутая относительно объединения любого числа множеств и взятия дополнения. Множества из системы B называются борелевскими. Отображение топологических пространств называется борелевским, если полный прообраз всякого борелевского множества есть борелевское множество. Пусть Q и K — локально-компактные сепарабельные топологические группы, причем K коммутативна, α — такой гомоморфизм группы Q в группу автоморфизмов группы K, что отображение $(x, y) \to \alpha_y(x)$ группы $K \times Q$ в K непрерывно. Пусть $\eta: Q \times Q \to K$ — система факторов, связанная с α и являющаяся борелевским отображением. Доказывается, что в расширении $K_\eta Q$ группы Q при помощи K, определяемом этой системой факторов, существует единственная локально-компактная топология такая, что $K_\eta Q$ — топологическая группа и что тождественное отображение $K \times Q \to K_\eta Q$ является борелевским. При этом $K_\eta Q$ является расширением группы Q при помощи K в смысле топологических групп. Обратно, всякое такое расширение можно получить вышеуказанным способом. А. Л. Онищик

8604. Некоторые теоремы о компактных и связных группах. Мыцельский (Some theorems on connected compact groups. Mycielski Jan), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 11, 1023—, LXXXV (англ., рез. русск.)

Сформулированы без доказательств следующие результаты. Компактная топологическая группа G является связной тогда и только тогда, когда для всякого элемента $x \in G$ и всякого целого числа $k \neq 0$ существует такой элемент $\xi \in G$, что $\xi^k = x$. Все максимальные абелевы подгруппы связной компактной группы связны и сопряжены между собой. А. Л. Онищик

8605. Гёльдеровы группы. Райт (Hölder groups. Wright Fred B.), Duke Math. J., 1957, 24, № 4, 567—571 (англ.)

Пусть A — непустое подмножество в аддитивной, вообще говоря, некоммутативной топологической группе G и $S(A) = \{x \in G : (x + A) \cup (A + x) \subset A\}$. Множество $S(A)$ является подполугруппой в G. Если множество A инвариантно, то $S(A)$ — инвариантная подполугруппа и $b(A) = S(A) \cap S(-A)$ — инвариантная подгруппа в G. Максимальные открытые инвариантные подполугруппы группы G, не содержащие нулевого элемента, будем коротко называть O-подполугруппами. Если M — O-подполугруппа в G, то $G = S(M) \cup S(-M)$, а $b(M)$ совпадает с теоретико-множественным дополнением подмножества $M \cup (-M)$. Замкнутая инвариантная подгруппа $H \subset G$ называется резидуальной в G, если имеется такая O-подполугруппа M в G, что $H = b(M)$. Радикалом группы G назовем пересечение всех резидуальных инвариантных подгрупп из G.

Группа G называется радикально свободной, если ее радикал совпадает с нулем, и максимальной радикально свободной группой, если ее нуль является резидуальной подгруппой. Если G — максимальная радикально свободная группа и M — ее O-подполугруппа такая, что $b(M) = 0$, то, принимая M за множество положительных элементов, превращаем группу G в упорядоченную группу. При этом интервальная топология оказывается слабее заданной. Обратно, если G — упорядоченная группа с интервальной топологией, то множество положительных элементов M является O-подполугруппой такой, что в $b(M) = 0$. Подполугруппа M в группе G называется инвариантной гипермаксимальной, если M — O-подполугруппа и если $S(M)$ — максимальная подполугруппа в G. Замкнутый нормальный делитель $H \subset G$ называется гиперрезидуальным в G, если имеется такая инвариантная гипермаксимальная подполугруппа M, что $H = b(M)$. Пересечение всех гиперрезидуальных подгрупп из G называется ее строгим радикалом. Группа называется гельдеровой, если ее строгий радикал совпадает с нулем. Топологическая группа G является максимальной радикально свободной гельдеровой группой тогда и только тогда, когда существует непрерывное изоморфное отображение ее на некоторую архимедово-упорядоченную группу. Топологическая группа тогда и только тогда является гельдеровой группой, когда она непрерывно изоморфна некоторой подгруппе локально-выпуклого вещественного линейного пространства. Такая группа, в частности, абелева.

Всякая связная радикально свободная группа является гельдеровой группой. Б. И. Плоткин

8606. Циклы в алгебраических системах. Нортон, Стейн (Cycles in algebraic systems. Norton D. A., Stein Sherman K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 6, 999—1004 (англ.)

Рассматривается конечная квазигруппа Q порядка n. Упорядоченная тройка элементов $t = (abc)$, где $a, b, c \in Q$, называется триплетом, если $ab = c$. Два элемента триплета определяют третий. Над триплетом можно производить следующие преобразования: $P_1(abc) = (xcb)$, где $xc = b$; $P_2(abc) = (cya)$, где $cy = a$; $P_3(abc) = (baz)$, где $ba = z$. Произведение $P_2P_1P_3$ обозначим через θ.

Последовательность триплетов

$$t,\ P_3t,\ P_1P_3t,\ \theta t,\ P_3\theta t,\ P_1P_3\theta t,\ \theta^2 t,\ \ldots$$

называется циклом длины n, если $\theta^n = \varepsilon$. Этим обобщается понятие цикла обратных элементов, введенное Арци (РЖМат, 1956, 5125).

Доказывается, что в идемпотентной квазигруппе Q (т. е. $aa = a$ для всех $a \in Q$) каждый цикл имеет длину 1 тогда и только тогда, когда $(ab)(ba) = a$ для всех $a, b \in Q$. В этом случае $n = 0, 1 \pmod 4$.

Если в Q любой цикл имеет длину $\leqslant 2$, то из равенства $(ab)(ca) = a$ следует $(ac)(ba) = a$. К таким квазигруппам принадлежит всякая коммутативная квазигруппа.

Изучаются квазигруппы, в которых каждый цикл либо длины 1, либо длины 2 специального типа. В таких квазигруппах справедливы тождества

$$(ab)\,b = a,\ b\,(ba) = a. \qquad (1)$$

Доказывается ряд теорем существования квазигрупп, удовлетворяющих тождествам (1). В частности, доказано, что для любого нечетного n существует идемпотентная квазигруппа Q порядка n, удовлетворяющая одному из тождеств (1). Для четных n такие Q не существуют.

Имеются опечатки: во второй таблице Кэли для квазигруппы пятого порядка в третьей строке надо поменять местами элементы b и d. В. Д. Белоусов

8607. Лупы и общерасположенные 4-сети. Арци (Loops and generally situated 4-webs. Artzy R.), Technion. Israel Inst. Techn. Sci. Publ., 1954—1955, 5—13 (англ.; рез. иврит.)

Продолжая свои исследования относительно общерасположенных 4-сетей (РЖМат, 1954, 5773), автор дает шесть постулатов, характеризующих один тип полулуп, которые могут быть использованы для введения координат в такую 4-сеть. Такая полулуна S имеет нуль u и для каждого элемента x из S существует «отрицательный» элемент x', определенный равенством $x+x'=u$. Автор строит конфигурационную сеть, соответствующую аддитивной аксиоме: $x+(y+x')=y$ для всех $x, y \in S$. Семь аксиом удовлетворяются бесконечным множеством неизоморфных луп, определенных автором в другом месте (РЖМат, 1957, 5125), а также аддитивной лупой плоского неополя, введенного Науманном. Замечание исторического порядка: автор приписывает Болу понятие лупы Муфанг (Ann., Math., 1937, 114, 414—431). Эти лупы на самом деле являются квазигруппами Муфанг (там же, 1934, 110, 416—430). 7 R. H. Bruck

Перевод из Math. Revs, 1956, 1, № 5, 522.

8608. **Переход от геометрии к алгебре. Фултон, Стейн** (The passage from geometry to algebra. Fulton Curtis M., Stein Sherman K.), Math. Ann., 1957, 134, № 2, 140—142 (англ.)

Изучаются алгебраические операции, определенные на конических сечениях. Пусть C — коническое сечение, $a, b \in C$, $a \neq b$, через $L(a, b)$ обозначается прямая, проходящая через a и b, а через $L(a, a)$ — касательная к C в точке a.

На C фиксируется точка ∞. В $C-\{\infty\}$ определяется аддитивная квазигруппа $Q^{\oplus}$ следующим образом:

$$L(a\oplus b,\ a\oplus b)\cap L(\infty,\ \infty)=L(a,\ b)\cap L(\infty,\ \infty).$$

Доказывается, что $Q^{\oplus}$ медиальна, т. е.

$$(a\oplus b)\oplus(c\oplus d)=(a\oplus c)\oplus(b\oplus d)$$

для любых a, b, c, d.

Для определения мультипликативной квазигруппы Q^0 на C фиксируются две различные точки 0 и ∞. Множество $C-\{0, \infty\}$ разбивается на две дуги: P — положительная и N — отрицательная.

В P вводится квазигруппа Q^0 следующим образом:

$$L(a\circ b,\ a\circ b)\cap L(0,\ \infty)=L(a,\ b)\cap L(0,\ \infty).$$

Квазигруппа Q^0 также медиальна. Далее вводится понятие отрицательного элемента как решения уравнения $a\oplus x=0$ в $Q^{\oplus}$ и доказывается ряд обычных свойств отрицательных элементов.

Обе квазигруппы $Q^{\oplus}$ и Q^0 изотопны коммутативным группам, отметим также, что они идемпотентны и, следовательно, дистрибутивны. В. Д. Белоусов

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

8609. **Побочная иррациональность уравнения пятой степени. Ховальд** (Die akzessorische Irrationalität der Gleichung fünften Grades. Howald Mario), Comment. math. helv., 1955, 29, № 4, 279—297 (нем.)

Автор занимается вычислением так называемой побочной иррациональности $\sqrt{d}$, появляющейся при приведении уравнения пятой степени к однопараметрической резольвенте-уравнению икосаэдра (Speiser A., Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin, Springer, 1937, стр. 250) и зависящей от выбора некоторой нециклической рациональной функции φ_0 от корней уравнения $a_i\,(i=1, \ldots, 5)$. Пусть $w_1=\sum_0^4 S^i\varphi_0$ $(S=(1\ 2\ 3\ 4\ 5))$ и $w_i\,(i=1, \ldots, 12)$ — величины, получающиеся из w_1 подстановками группы икосаэдра. Проводится вычисление d как полинома от w_i, затем как полинома от a_i для случая $\varphi_0=\alpha_1^p\alpha_2^q\alpha_3^r\alpha_4^s\alpha_5^t$ и, наконец, как полинома от коэффициентов уравнения при $\varphi_0=\alpha_1^2\alpha_2$ и $\varphi_0=\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3$. Приведены числовые примеры. В. В. Морозов

8610. **Полиномы с импримитивной группой Галуа. Схютте** (Polynomials for which the Galois group is imprimitive. Schutte H. J.), Tydskr. Wetensk. Kuns (N. R.), 1953, 13, 205—210) (африк.)

Автор доказывает, что группа Галуа полинома $f(x)$, неприводимого и сепарабельного над полем K, импримитивна тогда и только тогда, когда существует нормальное расширение Ω поля K, в котором полином f разлагается в произведение неприводимых множителей, имеющих одинаковую степень >1; корни каждого из этих множителей образуют различные классы импримитивности. Если Ω — нормальное расширение, полученное присоединением коэффициентов простых множителей к полю K, то группа Галуа полинома f относительно поля Ω оставляет инвариантным каждый из классов импримитивности. Из этого следует, что если группа Галуа импримитивна, то она содержит по крайней мере один элемент, отличный от единицы, оставляющий инвариантным каждый из классов импримитивности. G. Papy

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 4, 340.

8611. **Об арифметике структуры Галуа. Масуда** (On the arithmetic on a Galois structure. Masuda Katsuhiko), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 243—245 (англ.)

Рассматриваются топологические алгебры Галуа с точки зрения их применения к изучению бесконечных нормальных расширений полей методами теории представлений топологических групп. З. И. Боревич

8612. **Теория идеалов в бесконечных полях алгебраических чисел. Накано** (Idealtheorie in Unendlichen Algebraischen Zahlkörpern. Nakano Noboru), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 249—251 (нем.)

Краткий обзор ряда работ автора (РЖМат, 1955, 5637; 1957, 183, 6187), относящихся к теории идеалов в бесконечных полях алгебраических чисел. З. И. Боревич

8613. **Теория полей высшей размерности. I. Целое замыкание модулей. Снаппер** (Hingher-dimensional field theory. I. The integral closure of a module. Snapper E.), Compositio math., 1956, 13, № 1, 1—15 (англ.)

В настоящей и двух последующих работах (см. реф. 8614 и 8615) развивается теория трансцендентных расширений полей с конечным числом образующих. Многие из приводимых в этих работах утверждений имеют соответствующий аналог в многомерной алгебраической геометрии. Однако доказательства чисто алгебраические и не опираются на результаты алгебраической геометрии.

Пусть F — основное поле и E — его расширение степени трансцендентности $r\geqslant 1$, полученное присоединением конечного числа элементов. Подмножество M поля E, являющееся конечномерным линейным пространством над F, называется модулем расширения E/F. Обычным образом определяются сумма, произведение и степень модулей. Целым замыканием $|M|_i$ модуля M называется совокупность тех элементов $x\in E$, которые при некотором $m\geqslant 1$ удовлетворяют уравнению $x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=0$, где $a_k\in M^k$ $(k=1, \ldots, m)$. Целое замыкание $|M|_i$ модуля M также является модулем (т. е. порождается конечным числом элементов). Доказывается, что для каждого модуля M существует такое целое $k\geqslant 0$,

что $|M^{k+s}|_i = |M^k|_i \cdot M^s$ при всех $s \geqslant 0$. Если $M \neq 0$, то при всех достаточно больших s размерность модуля $|M^s|_i$ (как линейного пространства над полем F) равна $a_0 C_s^d + a_1 C_s^{d-1} + \ldots + a_d$, где $a_0, \ldots, a_d$ — целые, $a_0 > 0$, d — степень трансцендентности расширения $F\left(\frac{1}{y} M\right) \Big/ F$ $(y \in M, y \neq 0)$. Далее устанавливаются некоторые связи между целым замыканием $|M|_i$ модуля M и обычным целым замыканием кольца $F[M]$ в поле E. З. И. Боревич

8614. Теория полей высшей размерности. II. Линейные системы. Снаппер (Higher-dimensional field theory. II. Linear systems. Snapper E.), Compositio math., 1956, 13, № 1, 16—38 (англ.)

Обозначения см. реф. 8413. Если N — ненулевой модуль расширения E/F, то совокупность C всех модулей вида $\frac{1}{y} N$, где $y \in N$, $y \neq 0$, называется проективным классом модулей. Степень трансцендентности расширения $F(M)/F$, где $M \in C$, называется размерностью класса C. Пусть C — проективный класс модулей размерности $d \geqslant 1$ и пусть V — нормирование поля E (над F) размерности $r - 1$ (где r — степень трансцендентности расширения E/F). В классе C существует модуль M, содержащийся в кольце нормирования V; обозначим через $\bar{M}$ образ модуля M при естественном гомоморфизме кольца нормирования V на его поле вычетов. Если степень трансцендентности расширения $F(\bar{M})/F$ равна $d - 1$, то нормирование V называется дивизором первого вида класса C. В работе показано, каким образом для данного класса C можно получить все его дивизоры первого вида. Доказано, что целое замыкание $|M|_i$ модуля $M \in C$ совпадает с совокупностью тех $x \in E$, для которых $V(x) \geqslant \min_{a \in M} V(a)$ при всех дивизорах первого вида V класса C.

Пусть теперь C — фиксированный проективный класс модулей размерности r и $\mathfrak{D}$ — совокупность всех его дивизоров первого вида. Целочисленная конечная линейная комбинация $G = \sum n_i V_i$ элементов из $\mathfrak{D}$ называется циклом класса C. Каждому элементу $x \in E$, $x \neq 0$, обычным образом сопоставляется главный цикл $G(x)$. Доказано, что для любого цикла G (класса C) совокупность $L(G)$ тех элементов $x \in E$, для которых $G(x) + G \geqslant 0$, есть модуль, т. е. $L(G)$ имеет конечное число образующих над полем F (неравенство $G \geqslant 0$ означает, что все коэффициенты цикла G неотрицательны). Если цикл G и модуль M таковы, что $M \subset L(G)$, то множество $g(M, G)$ циклов вида $G(x) + G$, где $x \in M$, $x \neq 0$, называется линейной системой класса C.

Каждая линейная система $g(M, G)$ содержится в единственной максимальной линейной системе $g(L(G), G)$. Получены некоторые условия, достаточные для того, чтобы $L(hG) = |M^h|_i$ при всех целых $h \geqslant 1$. З. И. Боревич

8615. Теория полей высшей размерности. III. Нормализация. Снаппер (Higher-dimensional field theory. III. Normalization. Snapper E.), Compositio math., 1956, 13, № 1, 39—46 (англ.)

Обозначения см. реф. 8413. Проективный класс модулей C называется локально нормальным, если для любого $M \in C$ кольцо $F[M]$ целозамкнуто в поле E, и арифметически нормальным, если $M^t = |M^t|_i$ при всех $M \in C$ и всех целых $t \geqslant 1$. Доказано, что для любого класса C класс $|C^h|_i$, состоящий из модулей $|M_1 \ldots M_h|_i$, $M_k \in C$ $(k = 1, \ldots, h)$, локально нормален и арифметически нормален при всех достаточно больших h. Найдены условия, необходимые и достаточные для локальной нормальности. З. И. Боревич

8616. О теории тел Галуа. Нагахара, Томинага (On Galois theory of division rings. Nagahara Takasi, Tominaga Hisao), Math. J. Okayama Univ., 1956, 6, № 1, 1—21 (англ.)

Подробное изложение результатов, содержащихся в заметке авторов под тем же названием (РЖМат, 1957, 2938). Л. А. Калужнин

8617. Понятие точки в кольце. Самюэль (La notion de place dans un anneau. Samuel P.), Bull. Soc. math. France, 1957, 85, № 2, 123—133 (франц.)

Понятие точки поля (или неархимедовой метрики ранга 1) эквивалентно понятию V-кольца в этом поле (подкольцо A поля R называется V-кольцом, если для любого $x \in R \setminus A$ элемент x^{-1} принадлежит A). В работе понятие V-кольца для полей переносится на коммутативные кольца.

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо. Рассматриваются следующие три класса подколец A кольца R:

P_1. Подкольцо A принадлежит классу P_1, если в кольце A существует такой простой идеал $\mathfrak{r}$, что для любого подкольца B, $A \subset B \subset R$, $A \neq B$, и любого простого идеала $\mathfrak{q}$ кольца B пересечение $\mathfrak{q} \cap A$ отлично от $\mathfrak{r}$.

P_2. Подкольцо A принадлежит классу P_2, если дополнение $R \setminus A$ замкнуто относительно умножения.

P_3. Подкольцо A принадлежит классу P_3, если для любых элементов $s_1, \ldots, s_n$ из дополнения $R \setminus A$ и для любого многочлена вида

$$F(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n} + \sum a_\lambda x_1^{l_1}, \ldots, x_n^{l_n},$$

где $a_\lambda \in A$, $l_i \leqslant k_i$, $l_1 + \ldots + l_n < k_1 + \ldots + k_n$, имеем $F(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$.

Доказывается, что $P_1 \subseteq P_3 \subseteq P_2$. Если R — поле, то классы P_1, P_2 и P_3 совпадают между собой и совпадают с классом V-колец поля R; в общем же случае они различны. I. Если R' — подкольцо кольца R и $A \in P_i(R)$, где $i \neq 1$, то $A \cap R' \in P_i(R')$. II. Если R' — надкольцо кольца R и $A \in P_j(R)$, где $j \neq 2$, то существует такое подкольцо $A' \in P_j(R')$, что $A' \cap R = A$. III. Целое замыкание произвольного подкольца C в кольце R равно пересечению всех колец класса $P_2(R)$ (или всех колец класса $P_3(R)$), содержащих подкольцо C. На примерах показано, что утверждения I и III для класса P_1 и утверждение II для класса P_2, вообще говоря, не имеют места. Делается заключение, что наиболее естественным обобщением понятия V-кольца на произвольные коммутативные кольца является понятие подкольца класса P_3. З. И. Боревич

8618. О кольцах Прюфера. Хаттори (On Prüfer rings. Hattori Akira), J. Math. Soc. Japan, 1957, 9, № 4, 381—385 (англ.)

Доказано, что область целостности Λ тогда и только тогда является кольцом Прюфера (т. е. каждый ее идеал с конечным числом образующих является проективным Λ-модулем), когда тензорное произведение любых двух модулей без кручения также есть модуль без кручения. М. М. Постников

8619. Одна теорема существования в теории алгебр. Адзумая (An existence theorem of algebras. Azumaya Goro), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 233—235 (англ.)

Пусть K — полное локальное кольцо с максимальным идеалом P, R — алгебра над кольцом K (имеющая конечный базис) и N — радикал Джекобсона кольца R. Если $PR = N$, то алгебра R называется неразветвленной над кольцом K. Без доказательства приведена тео-

рема: Если для произвольной алгебры R над кольцом K полупростая алгебра вычетов R/N сепарабельна над полем K/P, то существует с точностью до внутренних автоморфизмов единственная неразветвленная подалгебра S такая, что каждый класс вычетов алгебры R по модулю N содержит представителя из подалгебры S. Это утверждение является обобщением двух известных теорем: теоремы о существовании поля инерции в конечных расширениях полного поля с дискретной метрикой и теоремы Веддербарна—Мальцева из теории алгебр.

З. И. Боревич

8620. **Образующие линейных алгебр. Паттерсон** (Generators of linear algebras. Patterson E. M.), Proc. London, Math. Soc., 1957, 7, № 27, 467—480 (англ.)

Основной результат: Операция умножения в линейной алгебре A рода r и размерности $n \geqslant 3r+3$, определенной над произвольным полем F, задается формулой

$$xy = \varphi(y)x + \psi(x)y + \sum_{1 \leqslant \lambda \leqslant r+s} \theta^{\lambda}(x, y)\, a_{\lambda} \qquad (s \leqslant 2r), \qquad (1)$$

где φ и ψ — некоторые линейные функции, θ^{λ} — билинейные функции, a_{λ} — фиксированные элементы из A. Если F отлично от $GF(2)$, то утверждение верно также при $n = 3r+2$.

Определение рода алгебры см. РЖМат, 1957, 6196. Ранее Кнебельман (Knebelman M. S., Ann. Math., 1935, 36) получил более точный результат для алгебр Ли и высказал (без подробного доказательства) утверждение, что его метод применим и к другим типам линейных алгебр. Отмечая, что последовательная реализация рассуждений Кнебельмана приводит в случае линейных алгебр рода $r < n-2$ к формуле (1) с $s=0$ и фиксированными элементами $a_1, \ldots, a_r \in A$, автор реферируемой работы показывает, что это не так, во всяком случае, для алгебр над полем конечной характеристики. Противоречащий пример дает алгебра A, являющаяся прямой суммой достаточно большого числа n одномерных алгебр, изоморфных с основным полем $GF(p)$. Этот же пример показывает, что неравенство $n-r \leqslant 2$, полученное Албертом для любой сепарабельной ассоциативной алгебры над бесконечным полем, не сохраняется при переходе к конечным полям. Доказано, что в классе всех полупростых линейных алгебр над полем характеристики нуль оно также не имеет места.

Дана классификация ассоциативных алгебр размерности $n \geqslant 6$ и рода $r=1$. А. И. Кострикин

8621. **Об алгебрах правых мультипликаторов. Паттерсон** (On right-multiplication algebras. Patterson E. M.), Quart J. Math., 1957, 8, № 32, 260—271 (англ.)

Пусть A — линейная алгебра, множество элементов которой состоит из векторов n-мерного пространства V_n ($n \geqslant 2$) над полем F, отличным от $GF(2)$ и $GF(3)$. Алгебре A сопоставляется ассоциативная линейная алгебра $R(A)$ правых мультипликаторов $r_a : x \to xa$. Автор приводит простой пример двух неизоморфных линейных алгебр с одной и той же алгеброй правых мультипликаторов и исследует подобную ситуацию в общем случае. Рассматриваются в основном алгебры $R(A)$ рода 0 и 1, классификация которых была дана автором ранее (РЖМат, 1957, 6196, 6197). Доказано, например, следующее утверждение (теорема 1): Пусть C — линейная ассоциативная алгебра размерности n и рода 0, состоящая из преобразований V_n в себя. Если $R(A) = R(A^*) = C$ для некоторых двух линейных алгебр A (с умножением xy) и A^* (с умножением $x \circ y$) над V_n, то $x \circ y = x\tau(y)$, где τ — автоморфизм пространства V_n. Изучается операция умножения (ее конкретный вид) в алгебре A, соответствующая алгебра мультипликаторов $R(A)$ которой порождается преобразованиями пространства V_n в себя вида: 1) $x \to f(x)z$, 2) $x \to -f(z)x + f(x)z$, 3) $x \to \lambda x + f(x)z$, где λ, $f(x) \in F$, $f(x)$ — линейная функция на V_n. А. И. Кострикин

8622. **Мультипликативные группы простых колец. Тоёда, Хаттори**, Сугаку, 1954, 6, № 1, 17 (японск.)

8623. **Об алгебрах, являющихся бесконечной прямой суммой евклидовых колец. Шнейдмюллер В. И.**, Сб. научн. тр. Магнитогорск. горнометаллург. ин-та, 1957, вып. 13, 5—11

Изучается полная прямая сумма S счетного множества колец, изоморфных некоторому евклидову кольцу K. Кольцо S является K-операторным кольцом; если действием оператора k из кольца K на элемент $s \in S$ считать умножение на k всех компонент элемента s. Для двух элементов $s_1, s_2 \in S$, не имеющих нулевых компонент (или имеющих нулевые компоненты в одних и тех же слагаемых), конструируется алгоритм Евклида и рассматриваются понятия, связанные с делимостью и разложением на простые множители.

Результаты автора обобщают результаты работы А. К. Сушкевича (Зап. Харьковск. ун-та, 1952, 23, 49—60), изучавшего кольцо S в предположении, что кольцо K является кольцом целых чисел.

Г. Н. Веселая

8624. **Новая характеристика полупростых колец. Кертес** (A féligegyszerű gyűrűk egy új jellemzése. Kertész Andor), Acta Univ. debrecen., 1954, 1, 151—153 (венг.)

Полупростым кольцом автор называет кольцо без нильпотентных идеалов с условием минимальности для всех левых идеалов. Доказывается, что кольцо R будет полупростым тогда и только тогда, когда для любого левого идеала L кольца R и произвольного элемента g из любого левого R-модуля G подмодуль L_g выделяется прямым слагаемым в G. Отсюда следует более простое доказательство результата Гольдмана (Goldmann O., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, 52, 1021—1027) о том, что кольцо R является полупростым тогда и только тогда, если всякий левый R-модуль есть прямая сумма своих минимальных подмодулей и некоторого подмодуля, аннулируемого кольцом R. В. А. Андрунакиевич

8625. **О новом обосновании регрессивного умножения во внешней алгебре над n-мерным пространством. Лотце** (Über eine neue Begründung der regressiven Multiplikation extensiver Größen in einem Hauptgebiet n-ter Stufe. Lotze A.), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1955, 57, 102—110 (нем.)

Пусть A — внешняя алгебра над n-мерным векторным пространством. Автор определяет регрессивное произведение элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in A$ ($p \leqslant n$) степени $n-1$ при помощи формулы $\varphi_1 \ldots \varphi_p = \frac{1}{(n-p)!} \sum \pm a_{i_1 1} \ldots a_{i_p p} e_{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$, где $e_1, \ldots, e_n$ — некоторая свободная система образующих алгебры A, a_{ik} — такое число, что $e_i \wedge \varphi_k = a_{ik} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, а знак определяется четностью перестановки $(i_1, \ldots, i_n)$. Затем произведение распространяется на всю алгебру с использованием ассоциативности. Это определение приводит к известным формулам внешней алгебры, откуда следует, что оно эквивалентно обычному определению регрессивного произведения. Указывается, что прогрессивное произведение можно

выразить через регрессивное при помощи аналогичной формулы. А. Л. Онищик

8626. Почти кольцо аффинных преобразований. Блэккетт (The near-ring of affine transformations. Blackett D. W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 3, 517—519 (англ.)

Аффинное преобразование векторного пространства V над полем F определяется равенством $\alpha A = \alpha T + \beta$, где α пробегает V, β — фиксированный элемент в V, а T — линейное преобразование пространства V. Почти кольцом называется алгебраическая система, удовлетворяющая обычным аксиомам, за исключением, быть может, дистрибутивного закона и коммутативного закона сложения. Доказываются следующие утверждения: 1) аффинные преобразования образуют почти кольцо с коммутативным сложением; 2) постоянные преобразования, т. е. такие преобразования A, для которых $T = 0$, образуют единственный максимальный двусторонний идеал почти кольца аффинных преобразований; 3) фактор почти кольцо аффинных преобразований по идеалу из постоянных преобразований изоморфно простому кольцу линейных преобразований. В. А. Андрунакиевич

8627. Топологические нильпотентные кольца с условием минимальности. Махарадзе Л., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 4, 181—186

Топологическое кольцо S называется нильпотентным, если для всякой окрестности нуля A_α существует такое натуральное число $n = n(\alpha)$, что замыкание степени S^n принадлежит A_α. Топологическое кольцо S удовлетворяет условию минимальности для подгрупп (идеалов), если любая убывающая цепь подгрупп (идеалов)

$$H_1 \supseteq H_2 \supseteq \ldots \supseteq H_n \supseteq \ldots$$

обрывается по модулю любой окрестности нуля. Доказываются следующие две теоремы:

1) Пусть полная система окрестностей нуля кольца S состоит из подгрупп аддитивной группы. Если кольцо S нильпотентно и удовлетворяет условию минимальности для двусторонних идеалов, то оно будет удовлетворять и условию минимальности для подгрупп.

2) Пусть S — локально бикомпактное вполне несвязное нильпотентное кольцо с условием минимальности для двусторонних идеалов, а H — его произвольное открытое бикомпактное подкольцо. Тогда S является локально прямой суммой своих примарных подколец S_p ($p = 2, 3, 5, \ldots$) с отмеченными подкольцами $S_p \cap H$ — примарными компонентами кольца H. Эти теоремы являются перенесением аналогичных теорем для алгебраических колец, доказанных в работах В. И. Шнейдмюллера (Матем. сб., 1950, 27(69), 219—228) и Селе (РЖМат, 1957, 7690).

В. А. Андрунакиевич

8628. Локально нильпотентные идеалы в топологических кольцах. Махарадзе Л. М., Матем. сб., 1957, 41 (83), № 3, 395—414

Рассматриваются топологические кольца, обладающие полной системой окрестностей нуля, составленной из правых идеалов, и предполагается, что в таких кольцах существует ограниченная окрестность нуля. Подкольцо топологического кольца S, порожденное конечным числом элементов, определяется как замыкание алгебраического подкольца, порожденного этими же элементами. Под нильпотентным топологическим кольцом, как обычно, понимается такое кольцо S, для всякой окрестности нуля A_α которого существует такое натуральное число $n = n(\alpha)$, что $[S^n] \subset A_\alpha$. Подмножество топологического кольца автор называет локально нильпотентным, если всякое подкольцо, порожденное конечным числом элементов, принадлежащих этому множеству, является нильпотентным. Сумма всех двусторонних локально нильпотентных идеалов кольца называется локально нильпотентным радикалом этого кольца и обозначается через $N(S)$. Доказывается, что локально нильпотентный радикал $N(S)$ топологического кольца S является локально нильпотентным, не обязательно замкнутым, идеалом. Если же нуль кольца S обладает локально нильпотентной окрестностью, то радикал $N(S)$ содержит как все правые, так и все левые локально нильпотентные идеалы и фактор-кольцо $S \mid N(S)$ полупросто. Для такого кольца S доказываются также следующие утверждения: 1) Если в S выполняется условие максимальности для локально нильпотентных правых идеалов, то все правые и все левые ниль-идеалы кольца S — нильпотентны; 2) В кольце S с условием минимальности для локально нильпотентных двусторонних идеалов всякий локально нильпотентный правый (левый) идеал кольца нильпотентен. Полученные результаты являются обобщением на топологический случай соответствующих теорем Левицкого о локально нильпотентном радикале кольца.

В. А. Андрунакиевич

8629. Общая теория одномерных локальных колец. Норткотт (A general theory of one dimensional local rings. Northcott D. G.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1956, 2, № 4, 159—169 (англ.)

Рассматривается одномерное локальное кольцо Q с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Предполагается, что идеал $\mathfrak{m}$ содержит элементы, не являющиеся делителями нуля. В этом случае нулевой идеал кольца Q несмешанный и каждый главный идеал Q_x, порожденный неделителем нуля $x \in \mathfrak{m}$, является $\mathfrak{m}$-примарным идеалом. Доказывается, что если P — любое подкольцо (содержащее единицу) кольца отношений S кольца Q, являющееся Q-модулем с конечным числом образующих, и $Px = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l$ — несократимое примарное разложение главного идеала Px, порожденного неделителем нуля $x \in \mathfrak{m}$, то $\operatorname{length}(Qx) = \sum_{i=1}^{l} (\operatorname{length} \mathfrak{q}_i)\,[P/\mathfrak{p} : Q/\mathfrak{m}]$, где $\mathfrak{p}_i$ — максимальный простой идеал, соответствующий примарному идеалу $\mathfrak{q}_i$, а через $\operatorname{length}(Qx)$ обозначена длина примарного идеала Qx. В качестве следствия из этой теоремы доказываются следующие утверждения: Пусть $Q0 = \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{n}_l$ — несократимое примарное разложение нулевого идеала кольца Q и $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_l$ — простые идеалы, принадлежащие нулевому идеалу $Q0$. Тогда для любого главного идеала Qx, порожденного неделителем нуля $x \in \mathfrak{m}$, $\operatorname{length}(Qx) = \sum_{i=1}^{l} \operatorname{length}\{(Q/\mathfrak{n}_i)\, x_i\} = \sum_{i=1}^{l} (\operatorname{length} \mathfrak{n}_i) \operatorname{length}\{(Q/\mathfrak{p}_i) x_i'\}$, где x_i — образ элемента x в фактор-кольце $Q/\mathfrak{n}_i$, а x_i' — образ элемента x в фактор-кольце $Q/\mathfrak{p}_i$.

Во второй части работы предполагается, что одномерное локальное кольцо Q является областью целостности. Пусть $\bar{Q}$ — пополнение одномерной локальной области целостности Q, $\bar{Q}0 = \mathfrak{n}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{n}_l$ — несократимое примарное разложение нулевого идеала кольца Q и $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$ — простые идеалы, принадлежащие нулевому идеалу кольца $\bar{Q}$. Тогда фактор-кольцо $\bar{Q}/\mathfrak{p}_i$, в которое кольцо Q отображается мономорфно, является одномерной полной локальной областью целостности. Целозамыкание $\bar{Q}_i'$ области целостности $\bar{Q}/\mathfrak{p}_i$ в ее поле частных $\bar{F}_i$ является кольцом некоторой дискретной оценки v_i ранга 1, определенной в поле $\bar{F}_i$; кроме того, $\bar{Q}_i'$ является $\bar{Q}/\mathfrak{p}_i$-модулем с конечным числом образующих и кольцо $\bar{Q}/\mathfrak{p}_i$ яв-

ляется топологическим замыканием кольца Q в кольце $\bar{Q}_i$. Оценки v_1, v_2, ..., v_l, индуцированные в поле частных F кольца Q оценками $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, ..., $\bar{v}_l$, называются оценками, ассоциированными с одномерной локальной областью целостности Q. Оказывается, что поле оценки v_i имеет конечную степень f_i над полем $Q/\mathfrak{m}$. Из результатов первой части работы вытекает, что для любого элемента $x \in Q$ длина $\operatorname{length}(Qx) = \sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i v_i(x)$.

Рассматривается целозамыкание Λ одномерной локальной области целостности Q в ее поле частных F. При этом отмечается, что кольцо Λ является кольцом главных идеалов, содержащим лишь конечное число собственных простых идеалов $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, ..., $\mathfrak{p}_l$, причем кольцо $\Lambda_{\mathfrak{p}_i}$ является кольцом оценки v_i, ассоциированной с Q, и $[\Lambda/\mathfrak{p}_i : Q/\mathfrak{m}]$. Доказывается также равносильность следующих свойств: а) целозамыкание Λ одномерной локальной области целостности Q в ее поле частных F является Q-модулем с конечным числом образующих; б) естественная топология локального кольца Q индуцируется естественной топологией полулокального кольца Λ; в) в пополнении $\bar{Q}$ локального кольца Q нулевой идеал разлагается в пересечение простых идеалов (т. е. локальная область целостности Q аналитически неразветвляема).

Е. Г. Шульгейфер

8630. Лемма Гензеля. Самюэль (Le lemme de Hensel. Samuel P.), Sémin. A. Châtelet et P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1953—1954 (1956), 7, № 9, 1—5 (франц.)

Кольцо A с единицей называется кольцом с фильтрацией, если в нем выделена такая убывающая последовательность подгрупп A_n (индекс n пробегает все целые числа) аддитивной группы кольца A, что $A_p A_q \subseteq A_{p+q}$ и $\bigcup_{-\infty}^{\infty} A_n = A$. Модуль E над кольцом с фильтрацией A называется модулем с фильтрацией, если в нем выделена такая убывающая последовательность подгрупп E_n, что $A_p E_q \subseteq F_{p+q}$ и $\bigcup_{-\infty}^{\infty} E_n = E$. Фильтрация A-модуля E называется канонической, если $E_n = A_n E$. В работе рассматривается случай, когда кольцо A коммутативно и фильтрация в нем задается некоторым идеалом M, т. е. $A_n = A$ для $n \leqslant 0$ и $A_n = M^n$ для $n > 0$. Если $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = 0$, то фильтрация, задаваемая идеалом M, определяет в кольце A некоторую сепарабельную топологию. Аналогичное обстоятельство имеет место в A-модуле E, если $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = 0$, где $E_n = M^n E$.

Основная теорема: Пусть A — коммутативное кольцо с единицей, полное относительно сепарабельной топологии, задаваемой некоторым идеалом M, а E, E' и F — A-модули с конечным числом образующих, причем каноническая фильтрация модуля F задает в нем сепарабельную топологию. Пусть, далее, φ — некоторое билинейное отображение $E \times E' \to F$, а $\bar{\varphi}$ — индуцированное отображением φ отображение $(E/ME) \times (E'/ME') \to F/MF$. Тогда для любой тройки элементов $y \in F$, $\alpha \in E/ME$, $\alpha' \in E'/ME'$, удовлетворяющих условиям: 1) $\bar{y} = \bar{\varphi}(\alpha, \alpha')$, где $\bar{y}$ — образ элемента y в фактор-модуле F/MF; 2) $F/MF = \bar{\varphi}(\alpha, E'/ME') + \bar{\varphi}(E/ME, \alpha')$, — существуют такие элементы $a \in E$ и $a' \in E'$, что $\bar{a} = \alpha$, $\bar{a}' = \alpha'$ и $y = \varphi(a, a')$.

Применяя эту теорему, автор доказывает для многочленов с коэффициентами из некоторого локального кольца A, полного относительно топологии, задаваемой максимальным идеалом M, лемму Гензеля, а также следующее утверждение:

Если кольцо A полное относительно сепарабельной топологии, задаваемой некоторым идеалом M, и фактор-кольцо A/M разлагается в прямую сумму $A/M = V/M + V'/M$, то само кольцо A также разлагается в прямую сумму $A = N + N'$, где $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} V^n$ и $N' = \bigcap_{n=1}^{\infty} V'^n$, причем $N \cap M^n = M^n N$, $N' \cap M^n = M^n N'$, и фильтрация кольца N (кольца N'), состоящая из подгрупп $M^n N$ ($M^n N'$), задает сепарабельную топологию, относительно которой кольцо N (кольцо N') полно. Кроме того, $N/MN \simeq A/V' \simeq V/M$ и $N'/MN' \simeq A/V \simeq V'/M$.

Е. Г. Шульгейфер

8631. Характеры модулей, подмодули свободного модуля и квазифробениусовы кольца. Морита, Татикава (Character modules, submodules of a free module, and quasi-Frobenius rings. Morita Kiiti, Tachikawa Hiroyuki), Math. Z., 1956, 65, № 4, 414—428 (англ.)

Пусть A — ассоциативное кольцо с единицей и U — некоторый двусторонний A-модуль, а L — некоторый левый A-модуль. Тогда множество всех (левых) A-гомоморфизмов $L \to U$ естественным образом образует правый A-модуль, называемый модулем U-характеров модуля L и обозначаемый через $\operatorname{Char}_U L$. С другой стороны, левый A-модуль L и правый A-модуль R называются U-спаренными, если на модулях L и R определена некоторая бинарная билинейная операция, сопоставляющая каждой паре (x, y), $x \in L$, $y \in R$, некоторый элемент модуля U. Если модули L и R U-спаренные, то естественным образом определяются аннулятор $\operatorname{Ann}(L_0; R)$ в модуле R подмодуля L_0 модуля L и аннулятор $\operatorname{Ann}(R_0; L)$ в модуле L подмодуля R_0 модуля R. Модули L и R называются ортогональными относительно U, если $\operatorname{Ann}(L; R) = 0$ и $\operatorname{Ann}(R; L) = 0$. Доказывается теорема: Если модуль U-характеров произвольного левого (правого) простого A-модуля является правым (левым) простым A-модулем, то для любой пары ортогональных относительно U и обладающих композиционными рядами правого A-модуля L и левого A-модуля R выполняются следующие соотношения: $\operatorname{Char}_U L \cong R$, $\operatorname{Char}_U R \cong L$ и

$$\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(L_0; R); L) = L_0;$$
$$\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(R_0; L); R) = R_0,$$

где L_0 — произвольный подмодуль модуля L, а R_0 — произвольный подмодуль модуля R. При выполнении в двустороннем A-модуле U условия максимальности предположение, что модуль U-характеров простого A-модуля является простым A-модулем, равносильно тому, что для любого простого левого (правого) A-модуля L выполняется соотношение $\operatorname{Char}_U(\operatorname{Char}_U L) \cong L$. На примере показывается, что из выполнения последнего соотношения для простых A-модулей, вообще говоря, не следует выполнения того же соотношения для любых A-модулей.

Далее предполагается, что кольцо A удовлетворяет условию минимальности для правых и левых идеалов (в дальнейшем такое кольцо мы будем просто называть кольцом с условием минимальности) и в качестве двустороннего A-модуля U выбирается само кольцо A. При этом соотношение $\operatorname{Char}_A(\operatorname{Char}_A L) \cong L$ тогда и только тогда выполняется для любых простых левых или правых A-модулей L, когда кольцо A квазифробениусово. В случае, когда кольцо A квазифробениусово для левых и правых A-модулей с конечным числом образующих, имеет место аналог понтрягинской теории двойственности. Формулируются также свойства, полностью характеризующие на языке модулей характеров фробениусовы кольца. В частности, кольцо A с условием минимальности тогда и только тогда является фробениусовым коль-

цом, когда $\mathrm{Char}_A(A/N) \cong A/N$, где N — радикал кольца A.

Большая часть работы посвящена подмодулям (левого) свободного модуля $A^{(n)}$ с конечным числом n свободных образующих над кольцом A с условием минимальности. Доказывается, что произвольный изоморфизм фактор-модулей $A^{(n)}/L$ и $A^{(n)}/L'$, где L и L' — некоторые подмодули модуля $A^{(n)}$, индуцируется некоторым автоморфизмом модуля $A^{(n)}$ и, следовательно, из изоморфизма фактор-модулей $A^{(n)}/L$ и $A^{(n)}/L'$ вытекает изоморфизм подмодулей L и L'. На примере показывается, что это предложение для несвободных A-модулей в общем случае неверно. Если кольцо A квазифробениусово, то произвольный изоморфизм между двумя подмодулями L и L' свободного модуля $A^{(n)}$ можно продолжить до некоторого автоморфизма модуля $A^{(n)}$ и, следовательно, из изоморфизма подмодулей L и L' вытекает изоморфизм фактор-модулей $A^{(n)}/L$ и $A^{(n)}/L'$. Последнее свойство полностью характеризует квазифробениусово кольцо.

Далее проводится исследование (M_u)-модулей над квазифробениусовым кольцом A. При этом, в частности, доказываются следующие предложения. 1) Левый A-модуль L с конечным числом образующих тогда и только тогда является (M_u)-модулем, когда он разлагается в прямую сумму подмодулей, каждый из которых изоморфен некоторому левому идеалу Ae_{χ_i}, где e_{χ_i} — примитивный идемпотент квазифробениусова кольца A. 2) Каждый модуль с конечным числом образующих над квазифробениусовым кольцом A изоморфен некоторому подмодулю свободного A-модуля с конечной базой. 3) Кольцо A с условием минимальности тогда и только тогда квазифробениусово, когда оно, рассматриваемое как левый или правый A-модуль, является (M_u)-модулем.

В заключение, используя полученные результаты, авторы дают характеристику квазифробениусовой алгебры на языке теории представлений.

Е. Г. Шульгейфер

8632. Строение подмодулей модуля над некоммутативным кольцом. Феллер (The lattice of submodules of a module over a noncommutative ring. Feller Edmund H.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 81, № 2, 342—357 (англ.)

Первая часть работы посвящена перенесению аддитивной теории идеалов коммутативного кольца на двойные A-R-модули, где A и R — произвольные, вообще говоря, некоммутативные кольца с единицей (предполагается, что операторы из колец A и R на модуле M действуют справа). Доказывается, что если A-R-модуль M удовлетворяет условию максимальности для A-подмодулей и R-подмодулей, то фактор-кольца $A/\mathfrak{q}$ и $R/\mathfrak{q}'$, где $\mathfrak{q}$ — аннулятор модуля M в кольце A, а $\mathfrak{q}'$ — аннулятор модуля M в кольце R, удовлетворяют условию максимальности для правых идеалов.

Пусть N — произвольный R-подмодуль A-R-модуля M. Множество $V^*(N)$ всех элементов a кольца A, для которых $Na \subseteq N$, является подкольцом, содержащим единицу кольца A, и называется централизатором подмодуля N. Рассматривается произвольное подкольцо V кольца $V^*(N)$, содержащее единицу. Множество $\mathfrak{n}$ всех таких элементов a кольца V, что $Ma \subseteq N$, образует двусторонний идеал кольца V, называемый V-тенью (V-shadow) подмодуля N. Множество всех элементов $a \in V$, некоторая степень a^n которых принадлежит $\mathfrak{n}$, называется V-радикалом R-подмодуля N. R-подмодуль N называется V-примарным, если из $xa \in N$, где $x \notin N$ и $a \in V$, следует, что элемент a принадлежит V-радикалу подмодуля N.

Если R-подмодуль N V-примарен, то он, очевидно, и V'-примарен для всякого подкольца V' кольца V, содержащего единицу. Если V-примарный R-подмодуль N неприводим, то его V-радикал $\mathfrak{p}$ является сильно простым двусторонним идеалом кольца V.

При выполнении в A-R-модуле M условия максимальности для R-подмодулей каждый R-подмодуль N разлагается в пересечение конечного числа неприводимых V-примарных R-подмодулей, и любые два таких несократимых представления состоят из одного и того же числа компонент. Теорема об однозначности задания множества сильно простых идеалов кольца V, являющихся радикалами V-примарных компонент R-подмодуля N, справедлива лишь при предположении, что кольцо V содержится в подцентрализаторе $F^*(N)$ подмодуля N, определяемом формулой $F^*(N) = \bigcap_{\alpha} V^*(N_\alpha)$, где N_α — пробегают все неприводимые R-подмодули, входящие по крайней мере в одно несократимое представление R-подмодуля N в виде пересечения. Приводится пример, показывающий, что без этого ограничения теорема, вообще говоря, неверна. Приводятся также условия, при которых справедлива теорема об однозначности определения изолированных компонент.

Вторая часть работы посвящена вполне неразложимым A-R-модулям. A-R-модуль M называется вполне неразложимым, если он удовлетворяет условиям максимальности и минимальности для A- и R-подмодулей и каждый A-(R-) подмодуль неразложим в прямую сумму. Каждый вполне неразложимый A-R-модуль M содержит единственный минимальный A-R-подмодуль, являющийся одновременно минимальным A- и минимальным R-подмодулем. Если $\mathfrak{q}$ — аннулятор вполне неразложимого A-R-модуля M в кольце A (в кольце R), то фактор-кольцо $A/\mathfrak{q}$ ($R/\mathfrak{q}$) удовлетворяет условиям максимальности и минимальности для правых идеалов и длина композиционного ряда правых идеалов кольца $A/\mathfrak{q}$ (кольца $R/\mathfrak{q}$) равна длине композиционного ряда R-(A-)подмодулей модуля M. Каждый A-эндоморфизм вполне неразложимого A-R-модуля M задается умножением на некоторый элемент кольца R.

Вполне неразложимый A-R-модуль M называется регулярным (автор такой модуль называет «duo»), если каждый его A-подмодуль является одновременно и R-подмодулем, и обратно. Для регулярных вполне неразложимых двойных модулей обобщается один из результатов Снаппера (Snapper E., Canad. J. Math., 1949, 1, № 2, 125—152), а именно доказывается, что регулярные вполне неразложимые A-R-модуль M и A-K-модуль W тогда и только тогда A-изоморфны, когда совпадают их аннуляторы в кольце A. В качестве следствия приводится некоторое достаточное условие изоморфизма двух пространств точного представления ассоциативного кольца A с единицей.

В заключение приводится несколько примеров вполне неразложимых A-R-модулей.

Е. Г. Шульгейфер

8633. О размерности модулей и алгебр. II. Фробениусовы алгебры и квазифробениусовы кольца. Эйленберг, Накаяма (On the dimension of modules and algebras. II. Frobenius algebras and quasi-Frobenius rings. Eilenberg Samuel, Nakayama Tadasi), Nagoya Math. J., 1955, 9, oct., 1—16 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 4649. Алгебра Λ с конечным числом образующих над коммутативным кольцом K называется фробениусовой, если она K-проективна и существует некоторый левый Λ-изоморфизм $\Phi: \Lambda \approx \Lambda^0$, где $\Lambda^0 = \mathrm{Hom}_K(\Lambda, K)$ (под левым Λ-изоморфизмом понимается изоморфизм левых Λ-мо-

дулей). Если существует двусторонний Λ-изоморфизм $\Phi: \Lambda \approx \Lambda^0$, то алгебра Λ называется симметрической. Приводится ряд свойств фробениусовых и симметрических K-алгебр. В частности, если алгебра Λ фробениусова, то для любого левого Λ-модуля A, для которого l. $\dim_\Lambda A < \infty$, l. $\dim_\Lambda A =$ l. $\dim_K A$ и размерность $\dim \Lambda$ алгебры Λ (т. е. l. $\dim_{\Lambda^e} \Lambda$) равна либо 0, либо ∞. Кольцо Λ называется самоинъективным (слева), если оно, рассматриваемое как левый Λ-модуль, инъективно. Если кольцо K самоинъективно, то и любая фробениусова K-алгебра самоинъективна (слева и справа). Полученные результаты применяются далее к групповой алгебре $\Lambda = K(\Pi)$ над коммутативным кольцом K конечной группы Π (такая алгебра симметрическая). При этом доказывается, что $\dim \Lambda = 0$ тогда и только тогда, когда $rK = K$, где r — порядок группы Π. Кроме того, если $rK = K$, то для любых левых Λ-модулей A и C K-модуль $\mathrm{Ext}^q_\Lambda(A, C)$ изоморфен прямому слагаемому K-модуля $\mathrm{Ext}^q_K(A, C)$. Из этого предложения вытекает, в частности, что если $rK = K$, то l. gl. $\dim \Lambda =$ $=$ gl. $\dim K$.

Отдельный параграф посвящен самоинъективным кольцам. Среди полученных здесь результатов отметим следующий: Если кольцо Λ самоинъективно слева и нетерово слева (т. е. удовлетворяет условию максимальности для левых идеалов), то каждый левый Λ-модуль A, для которого l. $\dim_\Lambda A < \infty$, проективен и инъективен. В частности, l. gl. $\dim \Lambda = 0$ или ∞.

В конце рассматриваются квазифробениусовы кольца. При этом доказывается теорема: Следующие свойства равносильны: (I) Кольцо Λ квазифробениусово. (II) Кольцо Λ нетерово слева и для любых левых идеалов $\mathfrak{l}_1$ и $\mathfrak{l}_2$ и любого правого идеала $\mathfrak{r}$ кольца Λ имеют место соотношения

$$r(\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{l}_2) = r(\mathfrak{l}_1) + r(\mathfrak{l}_2),\ r(l(\mathfrak{r})) = \mathfrak{r},$$

где $r(\mathfrak{l})$ — правый аннулятор идеала $\mathfrak{l}$, а $l(\mathfrak{r})$ — левый аннулятор идеала $\mathfrak{r}$. (III) Кольцо Λ нетерово (слева и справа) и самоинъективно слева. (IV) Кольцо Λ удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов и самоинъективно слева. (V) Кольцо Λ удовлетворяет условию минимальности для левых идеалов и самоинъективно справа.

Эта теорема обобщает один из основных результатов работы Икеда и Накаяма (РЖМат, 1955, 4282). В то же время ее доказательство опирается на эту работу. Приводится ряд следствий из этой теоремы.

Е. Г. Шульгейфер

8634. О размерности модулей и алгебр. III. Глобальная размерность. Ауслендер (On the dimension of modules and algebras. (III). Global dimension. Auslander Maurice), Nagoya Math. J., 1955, 9, oct., 67—77 (англ.)

Как известно, (левая) глобальная размерность l. gl. $\dim \Lambda$ произвольного кольца Λ определяется как $\sup$ l. $\dim_\Lambda A$, где A пробегает все левые Λ-модули. В настоящей работе доказывается, что l. gl. $\dim \Lambda = \sup_B$ l. $\dim_\Lambda B = \sup_I \dim_\Lambda \Lambda/I$ (где B пробегает все левые Λ-модули с одним образующим, а I — все левые идеалы кольца Λ) и что если кольцо Λ не полупростое (т. е. l. gl. $\dim \Lambda > 0$), то l. gl. $\dim \Lambda = 1 + \sup_I \dim_\Lambda I$.

Далее вводится понятие слабой левой размерности произвольного левого Λ-модуля A (w. l. $\dim_\Lambda A < n$, если $\mathrm{Tor}^\Lambda_n(C, A) = 0$ для всех правых Λ-модулей C) и естественным образом вводится понятие слабой глобальной размерности w. gl. $\dim \Lambda$ кольца Λ. Доказывается, что если кольцо Λ нетерово слева, то l. gl. $\dim \Lambda =$ w. gl. $\dim \Lambda$.

Большая часть работы посвящена изучению глобальной размерности полупримарных колец. Кольцо Λ с единицей называется полупримарным, если его (джекобсоновский) радикал N нильпотентен и полупростое кольцо $\Gamma = \Lambda/N$ является прямой суммой простых колец. Из полученных автором результатов следует, что если кольцо Λ полупримарно, то l.gl.$\dim \Lambda =$ w.gl.$\dim \Lambda =$ r.gl.$\dim \Lambda =$ $=$ (gl. $\dim \Lambda$) $=$ l. $\dim_\Lambda \Gamma = 1 +$ l. $\dim_\Lambda N = \sup_C$ l. $\dim_\Lambda C$, где C пробегает все простые (левые) Λ-модули. Доказывается равносильность следующих свойств полупримарного кольца Λ: а) gl.$\dim \Lambda < n$; б) $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(\Gamma, \Gamma) = 0$, где Γ рассматривается как левый Λ-модуль; в) $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(\Gamma, \Gamma) = 0$, где Γ рассматривается как правый Λ-модуль; г) $\mathrm{Tor}^\Lambda_n(\Gamma, \Gamma) = 0$, где левое Γ рассматривается как правый Λ-модуль, а правое Γ — как левый Λ-модуль. В качестве приложения устанавливается, что если полупримарное кольцо Λ таково, что каждый простой левый Λ-модуль изоморфен некоторому левому идеалу кольца Λ, то gl. $\dim \Lambda = 0$ или ∞. Указывается ряд классов колец, удовлетворяющих условиям последнего предложения. Доказательство основных результатов основывается на следующей общей лемме, являющейся обобщением одного из предложений Эйленберга (РЖМат, 1956, 8648): Пусть T — некоторый (ковариантный или контравариантный) полуточный функтор, определенный в категории левых Λ-модулей, где Λ — произвольное кольцо, и пусть N — некоторый нильпотентный левый идеал кольца Λ. Тогда, если $T(A) = 0$ для всех левых Λ-модулей A, для которых $NA = 0$, то $T = 0$.

В заключение доказывается следующая теорема: Для любых алгебр Λ_1 и Λ_2 над полем K имеет место неравенство w. gl. $\dim(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2) \geqslant$ w. gl. $\dim \Lambda_1 +$ $+$ w. gl. $\dim \Lambda_2$. Если же алгебры Λ_1 и Λ_2 полупримарны и алгебра $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ полупроста (т. е. является конечной прямой суммой простых колец с единицей), то алгебра $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ также полупримарна и вместо указанного неравенства имеет место равенство.

Е. Г. Шульгейфер

8635. О размерности модулей и алгебр. IV. Размерность фактор-колец наследственных колец. Эйленберг, Нагао, Накаяма (On the dimension of modules and algebras. IV. Dimension of residue rings of hereditary rings. Eilenberg Samuel, Nagao Hirosi, Nakayama Tadasi), Nagoya Math. J., 1956, 10, June, 87—95 (англ.)

Кольцо Λ называется наследственным (слева), если каждый его левый идеал, рассматриваемый как левый Λ-модуль, проективен. Изучается вопрос о (левой) глобальной размерности l.gl.$\dim(\Lambda/\mathfrak{a})$ фактор-кольца $\Lambda/\mathfrak{a}$ наследственного или полупримарного кольца Λ по его двустороннему идеалу $\mathfrak{a}$. Доказывается, в частности, что если кольцо Λ наследственно и для идеала $\mathfrak{a}$ существует такое число n, что $\mathfrak{a}^{n+1} = \mathfrak{a}^n$, то l. gl. $\dim(\Lambda/\mathfrak{a}) \leqslant 2n - 1$. Если кольцо Λ полупримарно, то для каждого левого идеала $\mathfrak{a}$ кольца Λ существует такое n, что $\mathfrak{a}^{n+1} = \mathfrak{a}^n$. Таким образом, если кольцо Λ наследственно и полупримарно, то gl. $\dim(\Lambda/\mathfrak{a}) < \infty$ для любого двустороннего идеала $\mathfrak{a}$ кольца Λ (в случае, когда кольцо Λ полупримарно, l. gl. $\dim \Lambda =$ r. gl. $\dim \Lambda =$ gl. $\dim \Lambda$). Доказывается также следующее предложение, показывающее, что между глобальными размерностями кольца и фактор-кольца в общем случае не существует каких-либо

соотношений: для любой пары (m, n), где $0 \leqslant m \leqslant \infty$, $0 \leqslant n \leqslant \infty$, отличной от пары $(1, \infty)$, существуют такое полупримарное кольцо Λ и такой его двусторонний идеал $\mathfrak{a}$, что gl. dim $\Lambda = m$, gl. dim $(\Lambda/\mathfrak{a}) = n$.

Отметим также следующие доказываемые в работе предложения:

1) Если в проективной резольвенте

$$\to 0 \to X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{} \cdots \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} A \to 0$$

модуля A над произвольным кольцом Λ модули X_i неразложимы и гомоморфизмы $d_i \neq 0$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$, то l. dim$_\Lambda A = n$.

2) Кольцо $\Lambda = T_{n+1}(K)$ всех треугольных матриц порядка $n+1$ над полупростым кольцом (т. е. конечной прямой суммы простых колец с единицей) K полупримарно, наследственно (и значит gl. gim $\Lambda = 1$) и gl. dim $(\Lambda/N^2) = n$, где N — радикал кольца Λ.

3) Кольцо Λ матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \\ \varepsilon & \delta & \alpha \end{pmatrix}$ с элементами из полупростого кольца K полупримарно, gl. dim $\Lambda = 2$ и gl. dim $(\Lambda/N^2) = \infty$.

В заключение отмечается, что если кольцо Λ является алгеброй конечного ранга над некоторым полем K, то оно полупримарно и gl. dim Λ = dim Λ.

Е. Г. Шульгейфер

8636. О размерности модулей и алгебр. V. Размерность фактор-колец. Эйленберг, Накаяма (On the dimension of modules and algebras. V. Dimension of residue rings. Eilenberg Samuel, Nakayama Tadasi), Nagoya Math. J., 1957, 11, 9—12 (англ.)

Основные определения содержатся, в РЖМат, 1956, 6427К и 8648. Доказано, что двусторонний идеал a полупримарного кольца Λ с радикалом N (N — нильпотентный идеал и Λ/N — полупростое кольцо с условием минимальности) равен нулю, если $a \in N^2$ и gl. dim $(\Lambda/a) \leqslant 1$. Аналогично, $Nr^{n-1}N = 0$, если r — такой правый идеал в Λ, что $rN \subset Nr \subset N^2$, gl. dim $(\Lambda/Nr) \leqslant n$, $n > 1$. Отсюда следует, например, что $N^{n+1} = 0$, если gl. dim $(\Lambda/N^2) \leqslant n$, $n \geqslant 0$, а так как в ч. IV, реф. 8635 было построено полупримарное кольцо Λ, удовлетворяющее для любого $n \geqslant 0$ условиям:

gl. dim $\Lambda \leqslant 1$, gl. dim $(\Lambda/N^2) = n$, $N^{n+1} = 0$, $N^n \neq 0$,

то полученный результат является точным.

А. И. Кострикин

8637. Заметка о размерности модулей и алгебр. Харада (Note on the dimension of modules and algebras. Harada Manabu), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1956, A7, № 1—2, 17—27 (англ.)

Модули и связанные с ними алгебраические образования рассматриваются с точки зрения гомологической размерности. Используемые в работе понятия l. dim$_\Lambda A$, w. l. dim$_\Lambda A$, l. gl. dim Λ и др. определены в книге Картана и Эйленберга (РЖМат, 1956, 6427 К). Здесь Λ — кольцо с единицей, A — левый Λ-модуль. Доказано, что всегда l. dim$_\Lambda A$ = l. dim$_{\Lambda_n} A^n$, где Λ_n — полное матричное кольцо порядка n над Λ, A^n — левый Λ_n-модуль: $\lambda = (\lambda_{ij}) \in \Lambda_n$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, $\lambda a = \left(\sum_j \lambda_{ij} a_j, \ldots, \sum_j \lambda_{nj} a_j\right)$. Обратно, l. dim$_\Lambda A$ = l. dim$_{\Lambda_n} A$ для каждого левого Λ_n-модуля A. Аналогичные равенства имеют место для остальных категорий размерностей (w. l. dim$_\Lambda A$ и т. д.). Если Λ — алгебра над коммутативным кольцом, то dim Λ = dim Λ_n. Установлена эквивалентность (для $n \geqslant 1$) утверждений: а) l. gl. dim $\Lambda \leqslant n$, б) l. dim$_\Lambda A \leqslant n-1$ для каждого Λ-подмодуля A левого проективного Λ-модуля. Находится некоторая связь между размерностями двух колец Λ и Γ с заданным гомоморфизмом ψ: $\Lambda \to \Gamma$, с помощью которого любой левый Γ-модуль можно рассматривать как Λ-модуль. Доказано, например, что l. gl. dim $\Lambda \geqslant$ l. gl. dim $\Lambda/\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ — регулярный двусторонний идеал в Λ (т. е. идеал, все элементы которого регулярны: $a = axa$). Регулярные кольца характеризуются равенством w. gl. dim $\Lambda = 0$. Это обстоятельство приводит к примеру кольца Λ, для которого w. gl. dim $\Lambda <$ gl. dim Λ.

А. И. Кострикин

8638. О полных структурах, представимых множествами. Стеллецкий И. В., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 6, 177—180

Изучаются полные структуры, которые могут быть так представлены множествами, что сумма любой возрастающей цепи представляется теоретико-множественным объединением ее членов, а произведение любого множества элементов — пересечением образов этих элементов. Оказывается, что к этому классу относятся те и только те структуры L, которые обладают следующими свойствами: а) если $\{x_\alpha\}$ — цепь, то $x \sum y_\alpha = \sum xy_\alpha$ для всякого $x \in L$; б) каждый элемент из L является суммой элементов a_β таких, что равенство $a_\beta = \sum x_{\alpha\beta}$, где $\{x_{\alpha\beta}\}$ — цепь, влечет $a_\beta = x_{\alpha_0\beta}$. Доказано, что всякий элемент рассматриваемой структуры есть произведение всех таких содержащих его элементов a_β, что $a_\beta = \Pi x_{\alpha\beta}$ влечет $a_\beta = x_{\alpha_0\beta}$. Этот результат был получен Блэром (РЖМат, 1955, 1681) для структуры идеалов кольца. Без доказательства сообщаются некоторые другие результаты Блэра, которые могут быть перенесены на рассматриваемый класс структур.

Л. А. Скорняков

8639. Операторы вложения на частично упорядоченном множестве. Робисон, Волк (The imbedding operators on a partially ordered set. Robison G. B., Wolk E. S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 551—559 (англ.)

Пусть P является любым частично упорядоченным множеством с наибольшим элементом 1 и наименьшим 0. Через 2^P обозначается множество всех подмножеств из P. Оператором на P называется отображение множества 2^P в себя. Обозначим через $I(P$ систему всех операторов на P, удовлетворяющих для любых S, $T \in 2^P$ условиям: 1) $S \subseteq \varphi(S)$; 2) если $S \subseteq T$, то $\varphi(S) \subseteq \varphi(T)$; 3) $\varphi(\varphi(S)) = \varphi(S)$; 4) если S состоит из единственной точки p, то $\varphi(S) = \{x \in P / x \leqslant p\}$. Такие операторы называются операторами вложения.

В любой системе операторов на множестве P можно определить частичную упорядоченность, полагая $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$, если $\varphi_1(S) \subseteq \varphi_2(S)$ для любого $S \in 2^P$. Если $\{\varphi_t\}$ является любой системой операторов вложения, то определим ее пересечение и объединение формулами $(\bigcap \varphi_t)(S) = \bigcap \varphi_t(S)$, $(\bigcup \varphi_t)(S) = \bigcap \{\psi(S) \mid \psi \in I(P)$ и $\psi \geqslant \varphi_t$ для всех $t\}$. Относительно этих определений $I(P)$ является полной структурой. Автор исследует строение структуры $I(P)$.

Множество S называется φ-замкнутым или φ-идеалом, если $\varphi(S) = S$. Если $S = \varphi(p)$ для некоторого $p \in P$, то S называется главным идеалом. На P определяются еще операторы * и $^+$: $S^* = \{x \in P / x \geqslant y$ для всех $y \in S\}$, $S^+ = \{x \in P \mid x \leqslant y$ для всех $y \in S\}$. Тогда наименьший и наибольший элемент в $I(P)$ определяются формулами $\omega(S) = \{x \in P \mid x \leqslant y$ для некоторых $y \in S\}$, $\nu(S) = (S^*)^+$.

Если $\Sigma \subseteq 2^P$, то Σ называется порождающей системой, если 1) любой элемент из Σ ω-замкнут, 2) Σ замкнуто относительно теоретико-множественного пересечения, 3) Σ содержит все главные идеалы множества P. Обозначим для любого φ систему всех φ-идеалов через $\Sigma(\varphi)$. Тогда $\Sigma(\varphi)$ является порождающей системой и $\varphi_1 = \varphi_2$ тогда и только тогда, если $\Sigma(\varphi_1) = \Sigma(\varphi_2)$. Обозначим для любой порождающей системы Σ через φ_Σ оператор, определенный правилом $\varphi_\Sigma(S) = \bigcap \{ A \in \Sigma \mid S \subseteq A \}$. Тогда для любого порождающего множества Σ будет $\varphi_\Sigma \in I(P)$ и $\Sigma(\varphi_\Sigma) = \Sigma$. Для любого $\varphi \in I(P)$ выполняется равенство $\varphi_{\Sigma(\varphi)} = \varphi$. Если порождающие системы частично упорядочить по включению, то соответствие $\varphi \to \Sigma(\varphi)$ будет взаимно однозначным отображением множества $I(P)$ на множество всех порождающих систем, обращающим порядок.

Если φ, $\psi \in I(P)$ и ψ покрывает φ, то ψ называется минимальным расширением для φ. K называется вполне неприводимым φ-идеалом, если K есть φ-идеал и не представим в виде пересечения системы φ-идеалов, каждый из которых отличен от K. Обозначим через $K(\varphi)$ систему всех вполне неприводимых неглавных φ-идеалов. Если $K \in K(\varphi)$, то $\Sigma(\varphi) - \{K\}$ будет также порождающей системой. Пусть φ_K означает оператор вложения, соответствующий этой системе. Доказывается, что для любого $\varphi \in I(P)$ ψ покрывает φ тогда и только тогда, если $\psi = \varphi_K$ для некоторого $K \in K(\varphi)$. Отсюда следует, что $K \in K(\varphi)$ тогда и только тогда, если существует такое минимальное расширение ψ для φ, что $K \neq \psi(K)$. Дается пример оператора, не имеющего минимальных расширений.

Оператор вложения φ называется индуктивным, если $\bigcup Z_t \subseteq \Sigma(\varphi)$ для любой цепи $\{Z_t\} \subseteq \Sigma(\varphi)$. Если φ и ψ — операторы вложения, то определяется $B_{\psi,\varphi} = \{ x \in P \mid x \in \psi(S) - \varphi(S)$ для некоторого $S \subseteq P \}$. Элемент x частично упорядоченного множества P называется атомом, если он покрывает 0. Множество P называется атомным, если для любого $y \neq 0$ из P существует такой атом x, что $y \geqslant x$. Доказывается, что если оператор φ индуктивен и $\psi > \varphi$, то существует такое $K \in K(\varphi)$, что $\psi \geqslant \varphi_K$. Это означает, что если φ индуктивен, то множество $\{ \psi \mid \psi \geqslant \varphi \}$ является атомной подструктурой в $I(P)$. Доказывается, что эта структура содержит подструктуру, изоморфную булевой алгебре всех подмножеств множества ее атомов. Структура $I(P)$ оказывается также атомной и обладает этим же свойством. Автор показывает, что если $I(P)$ является цепью, то $B_{\psi,0}$ состоит самое большее из одного элемента. Обратное утверждение опровергается при помощи примера. Если P является цепью и $G = \{ x \in P \mid x = \bigcap y_i, y_i$ составляют бесконечную убывающую цепь $\}$, то $I(P)$ изоморфна множеству 2^G.

Множество P называется удовлетворяющим условию минимальности, если для любого подмножества $A \subseteq P$ A^* имеет минимальный элемент. Дается достаточное условие для того, чтобы $I(P)$ было цепью. Оно имеет вид: $B_{\psi,0}$ состоит самое большее из одного элемента и P является структурой или удовлетворяет условию минимальности. Дается также достаточное условие для множества P, чтобы $I(P)$ состояло самое большее из двух элементов. Показывается, что конечная цепь любой длины служит структурой $I(P)$ для некоторого множества P.

Я. В. Хион

8640. Многоступенчатые аустаущи. Шмидт (Mehrstufige Austauschstrukturen. Schmidt Jürgen), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1956, 2, № 4, 233—249 (нем.)

Скажем, что на системе E подмножеств множества E определено многоступенчатое замыкание, если каждому $M \in E$ поставлено в соответствие множество CM, причем: C1. $M \subseteq CM$; C2. $M_1 \subseteq M_2$ влечет $CM_1 \subseteq CM_2$. Множество $U \in E$ называется независимым, если из $x \in U$ вытекает $x \notin C(U/x)$. Обозначим через $\mathfrak{U}^*$ систему конечных независимых множеств, принадлежащих E. Систему E назовем аустаущем, если $CM = \bigcup_{F \subseteq M, F \in \mathfrak{U}^*} CF$. Доказывается, что во всяком аустауше эквивалентны следующие условия: 1) $C(CM) = CM$; 2) если $F \cup x \in \mathfrak{U}^*$, $F \cup x \cup y$, $F \cup x \cup z \notin \mathfrak{U}^*$ и $y \neq z$, то $F \cup y \cup z \notin \mathfrak{U}^*$ (аксиома Хаупта—Небелинга—Паука (Haupt O., Nobeling G., Pauc C., J. reine und angew. Math., 1940, 181, 193—217)); 3) если $\bigcup A_i$ независимо, то $C(\bigcap A_i) = \bigcap CA_i$; 4) если U — независимое множество и $x \in CU$, то среди множеств A, удовлетворяющих условиям $A \subseteq U$ и $x \in CA$, существует наименьшее. Кроме того, показывается, что для множества M, принадлежащего системе E с многоступенчатым замыканием, удовлетворяющим условию 1) или условию 4), и не пересекающегося с $C0$ (0 — пустое множество), эквивалентны следующие условия: U1. M — независимо; U2. $CA \cap CB = C0$ для любых A, $B \subseteq M$; U3. $CA \cap CB = C0$ для любых пересекающихся подмножеств A и B множества M; U4. $C_x \cap C(M/x) = C0$ для всякого $x \in M$.

Л. А. Скорняков

8641. Алгебраические системы, которые не замкнуты относительно их операций. Переманс (Algebraic systems, which are not closed with respect to their operations. Peremans W.), Rapp. Math. centrum, 1955, № 002, 1—7 (англ.)

Передоказывается топологическими методами теорема Б. Нёймана (РЖМат, 1955, 4293): Частичная алгебра Q-V-алгебры A изоморфна подалгебре полной Q-V-алгебры B тогда (и тривиально только тогда), когда каждая конечная подалгебра алгебры A изоморфна некоторой подалгебре полной Q-V-алгебры. Здесь под Q-V-алгеброй понимается универсальная алгебра с множеством финитарных операций V, подчиненных множеству аксиом (тождеств) Q.

Ю. И. Соркин

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

8642. Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем. Поваров Г. Н., Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 2, 145—162

Излагается метод синтеза контактных схем с одним входом и k выходами, названный методом каскадов. Этот метод заключается в следующем.

Задав для синтезируемого $(1, k)$-полюсника проводимости между входом и каждым из выходов с помощью k булевых функций

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ f_2(x_1, x_2, \ldots, n_n), \ldots,$$
$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где переменная x_i представляет состояние приемного элемента X_i, строят таблицу разложения этих функ-

ций на конституенты единицы. Эта таблица состоит из n строк. В i-ю ее строку записывают: а) коэффициенты разложения функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$ по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$; б) формулы, выражающие через эти коэффициенты разложения, записанные в $(i-1)$-ю строку. При этом в каждой строке одинаковые коэффициенты объединяются. Переводя данные этой таблицы на графический язык, получают готовую схему. Объединение коэффициентов разложения в таблице создает в схеме мостиковые соединения и совмещение контактов в цепях разных выходов, за счет чего получается экономия контактов.

В связи с тем, что n приемных элементов можно перенумеровать $n!$ способами, при одних и тех же функциях проводимости может быть составлено $n!$ таблиц разложения. Для симметрических функций все таблицы дают физически одинаковые схемы, в остальных случаях разные таблицы могут привести к схемам с разнящимся числом контактов. Отмечается особенность метода каскадов, состоящая в том, что он позволяет строить мостиковые схемы без предварительного синтеза параллельно-последовательных двухполюсников. Обсуждается эффективность метода каскадов. В частности, он сравнивается с методом Свободы (РЖМат, 1956, 789) и с методом Зехеба и Кейвуда (РЖМат, 1956, 4126). Приводится 6 примеров синтеза контактных вычислительных и управляющих схем по методу каскадов, в частности однотактного двоичного сумматора, однотактной схемы двоичного вычитания и т. д.

В приложении указывается на возможность распространить метод каскадов на бесконтактные релейные схемы: электронноламповые, вентильные и трансформаторные. Вводится деление бесконтактных релейных схем на сходящиеся и расходящиеся, аналогичное делению контактных схем на параллельно-последовательные и мостиковые. Метод каскадов позволяет строить расходящиеся схемы. При синтезе трансформаторных схем используется предложенная Райским (Rajski Cz., Arch. elektrotechn., Warszawa, 1955, 4, № 3) трансформаторная реализация суммы по модулю два.
Библ. 32 назв. А. А. Архангельская

8643. **Использование булевой алгебры для синтеза статических управляющих схем.** (Using Boolean algebra to design static control circuits), Electr. Manufact., 1957, 60, № 1, 130—139 (англ.)

Рекламируются автоматические устройства для промышленности, выпускаемые фирмой «Бейкер» (Baker Brothers Inc.). В устройствах применяются магнитные бесконтактные элементы «Сипак» (Cypak); осуществляющие логические функции И, ИЛИ, НЕ, а также функции запоминания и выдержки времени. Дается методика синтеза управляющих схем из бесконтактных логических элементов. Описано устройство, автоматически осуществляющее заданную последовательность операций по загрузке прессформ и удалению готовых пластмассовых деталей с пресса после окончания цикла прессования. Синтез схемы устройства проводится на основе таблицы последовательности операций, которая преобразуется в таблицу включения исполнительных органов. Таблица включения используется для записи условий работы исполнительных органов в виде булевых структурных формул. Структурные формулы упрощаются с помощью средств булевой алгебры. От структурных формул затем переходят к схемам цепей, воздействующих на каждый исполнительный орган. Эти схемы объединяются в одну общую схему, и производятся дополнительные упрощения.

Сообщается, что фирма «Бейкер» широко применяет булеву алгебру для синтеза как бесконтактных, так и комплексных релейных схем. Ю. Л. Томфельд

8644. **О таких понятиях, как несимметрические сопротивления, графы потоков, вероятность, частичное разложение и матрицы. Мейсон** (About such things as unistors, flow graphs, probability, partial factoring, and matrices. Mason Samuel J.), IRE Trans. Circuit Theory, 1957, 4, № 3, 90—97 (англ.)

«Цель этой статьи — показать, что: 1) топологический анализ схем, при котором мы разыскиваем деревья, и топологический анализ графов потоков, при котором мы разыскиваем контуры, тесно связаны друг с другом, ибо оба используют системы линейных алгебраических уравнений; тесная взаимосвязь переходит в тождество, когда мы действуем с марковскими диаграммами вероятностей, для которых схемная модель задачи и модель задачи, основанные на графах потоков, суть одно и то же; 2) выражение для пропускной способности графа потока в зависимости от пропускных способностей ветвей часто можно сделать более компактным с помощью процесса, называемого частичным разложением. По счастью, этот процесс допускает простую топологическую интерпретацию, так что компактная форма может быть получена прямо по виду графа потока; 3) система линейных матричных уравнений удобно выражается в виде графа потока, после чего решение можно получить стандартной методикой анализа графов потоков». Из текста статьи

8645. **О некоторых свойствах матричного представления линейных графов. Такаги** (Takagi M.), Дэнки сикэнсё ихо, 1957, 21, № 12, 917—925, 949 (японск.; рез. англ.)

Булева матрица рассматривается как представление, характеризующее линейный граф. Исследуются некоторые возникающие при этом вопросы о зависимости между булевой матрицей и матрицей инциденций, о геометрических свойствах булевой матрицы и их использовании. Минор P_{ij} определителя $|P|$ булевой матрицы P обладает такими же свойствами, как и элемент (ij) матрицы P^{m-1} (где m — число вершин); т. е. абсолютное значение каждого члена минора P_{ji} изображает пути из вершины i в вершину j, а абсолютное значение каждого члена определителя $|P|$ есть множество одномерных циклов. В качестве применений описывается метод построения рефлексного двоичного кода и метод нахождения путей из полюса i в полюс j. Резюме автора

8646. **Алгебра прямых вертикальных соединений и эквивалентных мостиковых схем. Белломи** (L'algebra delle dirette unioni verticali e dei circuiti a ponte equivalenti. Bellomi Carlo), Ingegnere, 1956, 30, № 3, 249—264 (итал.; рез. англ., нем., франц.)

Исследуются возможности упрощения контактных схем преобразованием их в так называемые «прямые вертикальные соединения» элементарных пятиконтактных мостиковых ячеек. Рассматриваются структурные функции «прямых вертикальных соединений», и предлагается специальная алгебра для действий с такими функциями. Г. Н. Поваров

8647. **Мостики и дополнительные прямые вертикальные соединения в алгебре релейных схем. Белломи** (I ponti e le dirette unioni verticali complementari nell algebra dei circuiti di relè. Bellomi Carlo), Ingegneria ferroviaria, 1956, 11, № 4, 297—316 (итал.; рез. англ., нем., франц.)

Дальнейшее развитие идей статьи автора (РЖМат, 1958, 6967).

8648. **Матричные методы в исследовании переключательных схем. Риги** (I metodi matriciali nello studio dei circuiti di commutazione. Righi Rigo), Ingegneria ferroviaria, 1956, 11, № 12, 963—972 (итал.; рез. англ., нем., франц.)

Обзор матричных методов анализа и синтеза контактных схем. Автор ссылается на работу советских авторов Б. И. Арановича и А. Г. Лунца.

8649. **Введение в изучение автоматов с последовательным действием. Часть I. Логические функции и комбинаторные схемы.** Наслен (Introduction à l'étude des automatismes à séquences. 1^e part. Les fonctions logiques et les circuits combinatoires. Naslin Pierre), Automatisme, 1958, 3, № 1, 3—11 (франц.)

Популярная статья о применении алгебры логики в теории релейных схем.

8650. **Принцип метода Крона в применении к решению граничных задач.** Дёйвестейн (Het principe van de methode van G. Kron t. b. v. het oplossen van randwaardeproblemen. Duijvestijn A. J. W.), Rapp. Math. centrum, 1956, № 001. 1—11 (гол.)

Определяются основные параметры электрических цепей: число ветвей, узловых точек, ячеек и т. д. и связывающие их соотношения. Рассматриваются преобразования цепей ($n \to n'$), относительно которых инвариантна рассеиваемая мощность. Из матричного выражения $\bar{\imath} = \bar{c}\bar{\imath}'$ следуют $\bar{e}' = \bar{c}_t\bar{e}$, $\bar{z}' = \bar{c}_t\bar{z}\bar{c}$, где $\bar{c}$ — исходная матрица преобразования токов; $\bar{c}_t$ — транспонированная относительно нее матрица; $\bar{\imath}$, $\bar{e}$, $\bar{z}$, $\bar{\imath}'$, $\bar{e}'$, $\bar{z}'$ — матрицы токов, напряжений и импедансов в системах n и n' соответственно.

На примерах рассматривается метод построения электрических цепей для моделирования задач с граничными условиями; задача задается структурой цепи (матрицей импедансов $\bar{z}$), граничные условия — источниками напряжения $\bar{e}$. Ответом является матрица установившихся токов $\bar{\imath}$. А. Д. Закревский

См. также: 8523, 8531, 8653, 8730, 8731, 8732, 8733, 8934, 9202, 9264—9268

ТОПОЛОГИЯ

Редакторы *П. С. Александров, А. С. Шварц*

8651. **Спектры конечных графов.** Коллац, Зиноговиц (Spektren endlicher Grafen. Collatz Lothar, Sinogowitz Ulrich), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1957, 21, № 1—2, 63—77 (нем.)

Для конечного связного графа с вершинами $P_1, \ldots, P_N$ рассматривается матрица $A = (a_{jk})$, где a_{jk} есть число ребер, соединяющих вершины P_j и P_k. Характеристическое уравнение $\mathrm{Det}(A - \lambda E) = 0$ матрицы A называется уравнением графа, совокупность собственных значений матрицы A — спектром графа, наибольшее из этих собственных значений — индексом графа. Коэффициенты уравнения графа и спектр графа не зависят от нумерации вершин графа. Указываются выражения некоторых коэффициентов уравнения графа и оценки индекса графа через геометрические инварианты.

Разбирается несколько частных случаев и примеров. Приводятся таблицы уравнений некоторых графов. Ставится несколько задач. И. Н. Врублевская

8652. **Регулярные графы 3-й, 4-й и 5-й степеней с заданными абстрактными группами автоморфизмов, хроматическими числами и связностями.** Избицкий (Reguläre Graphen 3., 4 und 5. Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen. Izbicki Herbert) Monatsh. Math., 1957, 61, № 1, 42—50 (нем.)

Хроматическим числом называется наименьшее число цветов, в которые можно раскрасить все вершины графа так, чтобы никакое ребро не соединяло вершины одного цвета. Граф имеет связность c, если он содержит по крайней мере $c+1$ вершину и не становится несвязным от удаления любых $c-1$ вершин.

Доказываются теоремы: 1) Не существует регулярных графов связности 1 с хроматическим числом 2; 2) Пусть $\mathfrak{H}$ — конечная группа и n, χ, c — три натуральных числа, $3 \leqslant n \leqslant 5$, $2 \leqslant \chi \leqslant n$, $1 \leqslant c \leqslant n$, $(\chi, c) \neq (2, 1)$, тогда существует бесконечно много неизоморфных регулярных графов степени n с хроматическим числом χ, связностью c и с группой автоморфизмов, изоморфной группе $\mathfrak{H}$.

И. Н. Врублевская

8653. **Разветвленные накрывающие пространства и квадратичные формы кратного узла.** Кайл (Branched covering spaces and the quadratic forms of links. Kyle R. H.), Ann. Math., 1954, 59, № 3, 539—548 (англ.)

Матрица кратного узла (по терминологии автора, квадратичная форма кратного узла) определяется через регулярную проекцию его на некоторую плоскость так же, как и для простого узла (РЖМат, 1955, 145). Матрица кратного узла в отличие от матрицы простого узла может быть вырожденной. При изотопической деформации узла или выборе другой регулярной проекции матрица узла заменяется эквивалентной ей матрицей (две симметрические матрицы называются эквивалентными, если одна может быть получена из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований: указанных в цит. выше реферате, преобразования $A \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и обратного ему преобразования). В работе указывается геометрический смысл матрицы кратного узла. Пусть $K \subset S^3$ — кратный узел, состоящий из компонент $K_1, \ldots, K_\mu$, Π_2 — подгруппа группы узла $\Pi = \pi_1(S^3 \setminus K)$, состоящая из классов путей, для которых сумма чисел зацепления с компонентами узла $K_1, \ldots, K_\mu$ является четным числом. Возьмем разветвленное двуместное накрытие R сферы S^3 с линией разветвления K, которое над дополнительным пространством узла $S^3 \setminus K$ является двуместным накрытием, соответствующим подгруппе $\Pi_2 \subset \Pi$. Одномерная группа кручения многообразия R является группой с зацеплением (см. цит. реф.). Матрица, обратная матрице зацепления этой группы, эквивалентна матрице узла K.

В работе указывается полная система инвариантов семейства эквивалентных друг другу матриц. Каждый из таких инвариантов дает инвариант изотопического типа кратного узла. В. К. Белов

8654. **Применение метода обобщенных «самоотображений» тора для образования трехмерных многообразий.** Подшевкин (Застосування методу узагальненого самовідображення тора для одержання тримірних многовидів. Подшевкін Ю. В.), Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-т, 1956, 19, 103—108 (укр.)

Указывается способ получения трехмерных многообразий из полнотория (тора с внутренностью) путем

соответствующим образом выбранного отождествления точек граничного тора. Без доказательства приводятся некоторые топологические свойства построенных трехмерных многообразий. С. С. Рышков

8655. **Сравнение топологий. Уэстон** (On the comparison of topologies. Weston J. D.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 3, 342—354 (англ.)

Пусть на множестве X заданы две топологии $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$. Замыкание множества $A \subset X$ в топологии $\mathscr{T}_i$ $(i = 1, 2)$ обозначим через $[A]_i$.

Автор говорит, что $\mathscr{T}_1 \leqslant \mathscr{T}_2$, если для любого множества $A \subset X$ выполняется условие $[A]_2 \subset [A]_1$ (т. е. топология $\mathscr{T}_2$ сильнее топологии $\mathscr{T}_1$) и для всякого множества A, открытого в топологии $\mathscr{T}_1$, $[A]_2 = [A_1]$.

Доказывается несколько простых теорем относительно этой частичной упорядоченности топологий $\leqslant$ и близких понятий. Приведем в качестве примера следующее предложение.

Теорема 6. Пусть множество X является пространством второй категории относительно топологии $\mathscr{T}_1$. Тогда это множество является пространством второй категории в любой топологии $\mathscr{T}_2$, удовлетворяющей условию $\mathscr{T}_2 \leqslant \mathscr{T}_1$.

В конце работы автор применяет свои результаты к доказательству ряда известных теорем из теории линейных пространств. А. С. Пархоменко

8656. **О транзитивной топологии одного класса окрестностных пространств (U). Мамузич** (Sur la topologie transitive d'une classe d'espaces (U). Mamuzić Zlatko), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. реп. Србије, 1954, 6, № 1—2, 63—73 (франц.; рез. серб.)

8657. **Топологические структуры, определенные на множестве E отображением $f(E \times E) \subset M$ и структурами на множестве М. Мамузич** (Тополошке структуре произведене на скупу E пресликаваньем $f(E \times E) \subset M$ и структурама на скупу M. Мамузић З.), Зб. Маш. фак. Ун-т Београду, 1954—55 (1956), 1—18 (сербо-хорв., рез. франц.)

8658. **Операторы $\mathfrak{E}(M)$, $\mathfrak{D}(M)$ и топологические структуры на множестве E. Мамузич** (Оператори $\mathfrak{E}(M)$, $\mathfrak{D}(M)$ и тополошке структуре на скупу E. Мамузић Златко), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1955, 7, № 1—2, 39—72 (серб., рез. франц.)

Пусть даны два множества E и M и отображение произведения $E \times E$ в M. Для всякой точки $a \in E$ пусть $\{E_a\}$ — какая-нибудь система множеств $F_a \subseteq M$, каждое из которых содержит точку $f(a, a)$, и $\{W(a)\}$ — система множеств $W(a) = \mathfrak{E}\{b \mid b \in E, f(a, b) \in F_a\}$. Присоединяя точки a системы $\{W(a)\}$ в качестве базы ее окрестностей, автор получает окрестностное пространство E. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы точка $a \in E$ принадлежала замыканию множества $F \subseteq E$, является наличие для каждого $F_a \in \{F_a\}$ хотя бы одной точки $x \in F$, так что $f(a, x) \in F_a$. Выясняется вопрос, каким дополнительным условиям должна удовлетворять система $\{F_a\}$, соответственно функция f, для того, чтобы в E выполнялись те или иные условия (например, когда в E осуществляются аксиомы отделимости T_1, T_2, T_3, условие $\overline{F_1 \cup F_2} \subseteq \bar{F}_1 \cup \bar{F}_2$, $F_1, F_2 \subset E$ и т. п.). Изучаются связи этих пространств с равномерными пространствами, их обобщениями в смысле Аппера (Appert) и других авторов, с псевдометрическими пространствами и пространствами, допускающими ветвящуюся базу окрестностей в смысле Курепы. Исследуются также пространства E в случае, когда M является упорядоченным, соответственно частично упорядоченным, множеством.

В работе имеются неточности. П. И. Папич

8659. **О разных топологических (равномерных) структурах, определенных на множестве E отображением $f(E \times E) \subset M$ в произвольное упорядоченное множество M. Мамузич** (О разним тополошким [униформним] структурама произведеним на скупу E пресликаваньем $f(E \times E) \subset M$ у уређени [било који] скуп M. Мамузић Златко), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1955, 7, № 3—4, 185—216 (серб., рез. франц.)

См. также реф. 8658.

Пусть даны множества E и M и отображение f произведения $E \times E$ в M. Пусть всякой точке $a \in E$ поставлена в соответствие система множеств $\{F_a\} \subseteq M$, каждая из которых содержит точку $f(a, a)$. Тогда множество E превращается в окрестностное пространство, если каждому множеству $F_a \subseteq M$ поставить в соответствие множество $W(a)$, состоящее из точек $b \in E$, удовлетворяющих условию $f(a, b) \in F_a$, и принять за базу окрестностей точки $a \in E$ совокупность множеств $W(a)$.

Выясняется, каким дополнительным условиям должны удовлетворять отображение f и система множеств F_a, для того, чтобы естественным образом определяемая операция замыкания в E удовлетворяла тем или иным условиям (например, условию $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$, аксиомам отделимости T_1, T_2, T_3, и т. д.). Изучаются связи описанного выше класса окрестностных пространств с равномерными пространствами, с обобщениями равномерных пространств в смысле Аппера (Appert) и других авторов, с псевдометрическими пространствами и пространствами, допускающими ветвящуюся систему окрестностей в смысле Курепа. Исследуется также случай, когда M является частично упорядоченным множеством. В работе имеются неточности. П. И. Папич

8660. **Еще одна заметка о паракомпактных пространствах. Майкл** (Another note on paracompact spaces. Michael E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 4, 822—828 (англ.)

Система $\sum$-множеств, лежащих в топологическом пространстве X, называется консервативной, если для каждой подсистемы $\sum_0$ этой системы замыкание суммы входящих в нее множеств есть сумма замыканий этих множеств. Система $\sum$ называется σ-консервативной, если она является объединением счетного числа систем, каждая из которых консервативна.

Доказываются теоремы:

1. Свойство паракомпактности регулярного пространства X эквивалентно каждому из следующих свойств: а) во всякое открытое покрытие пространства X можно вписать консервативное (открытое) замкнутое покрытие; б) во всякое открытое покрытие пространства X можно вписать σ-консервативное открытое покрытие.

2. Образ паракомпактного пространства при всяком замкнутом отображении является паракомпактным.

Автор попутно замечает, что в метризационной теореме Нагата—Смирнова требование локальной конечности не может быть заменено требованием консервативности (пример: в чеховском расширении βN пространства натуральных чисел N берется подпространство $N \cup a$, где $a \in \beta N \setminus N$).

П. С. Александров

8661. **Теорема о непрерывной сходимости. Исэки** (A theorem on continuous convergence. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 7, 355—356 (англ.)

8662. **Псевдокомпактность и сильно непрерывная**

сходимость. Исэки (Pseudo-compactness and strictly continuous convergence. Jseki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 8, 424—428 (англ.)

8663. Обобщение непрерывной сходимости. Исэки. (On generalized continuous convergence. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 9, 525—527 (англ.)

См. также реф. 8661, 8662.

Приводятся характеристики поликомпактных, псевдо-компактных и счетно парокомпактных пространств с помощью специальных видов сходимости непрерывных функций.

Имеются ошибки (см. реф. 8667). Ю. М. Смирнов

8664. Характеристика псевдокомпактных пространств. Исэки (A characterisation of pseudo-compact spaces. Isèki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 6, 320—322 (англ.)

8665. О слабо компактных и счетно-компактных топологических пространствах. Исэки (On weakly compact and countably compact topological spaces. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 6, 323—324 (англ.)

8666. Замечания о псевдокомпактных пространствах. Исэки (A remark on pseudo-compact spaces. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 9, 528—529 (англ.)

См. также реф. 8664.

Последовательность $\{f_n(x)\}$ функций, определенных на S, сходится непрерывно к $f(x)$ на S, если $f_n(x_n) \to f(x)$ при $x_n \to x$. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится строго непрерывно к $f(x)$, если из сходимости последовательности $\{f(x_n)\}$ следует сходимость последовательности $\{f_n(x_n)\}$ и $\lim f_n(x_n) = \lim f(x_n)$.

Доказываются следующие теоремы:

I. Для того чтобы вполне регулярное пространство S было псевдокомпактным (РЖМат, 1957, 7735), необходимо и достаточно каждое из следующих условий: 1) каждая последовательность $f_n(x)$ непрерывных функций, равномерно сходящаяся в каждой точке S к непрерывной функции $f(x)$, сходится равномерно в S к $f(x)$; 2) каждая монотонная последовательность непрерывных функций, сходящаяся к непрерывной функции, сходится равномерно, 3) для каждой последовательности ограниченных непрерывных функций $f_n(x)$, сходящейся на S к $f(x)$, последовательность $f_n^*(x)$ продолжений функций $f_n(x)$ на чеховском расширении $\beta(S)$ пространства S, сходится к $f^*(x)$.

II. Для регулярного пространства S следующие условия эквивалентны между собою: 1) S слабо компактно (РЖМат, 1957, 7735); 2) каждое точечно-конечное счетное открытое покрытие α содержит такую собственную подсистему β, что объединение замыканий элементов системы β равняется S; 3) каждое точечно-конечное счетное открытое покрытие α содержит такую собственную подсистему β, что замыкание объединения элементов β равняется S.

III. Для вполне регулярных пространств S с первой аксиомой счетности следующие условия эквивалентны между собой: 1) S компактно; 2) из непрерывной сходимости на S следует равномерная сходимость; 3) если каждая последовательность непрерывных функций на S сходится непрерывно к непрерывной функции, то последовательность сходится к ней строго непрерывно. П. И. Папич

8667. Новые характеристики пространств. Исэки (New characterisations of compact spaces. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1958, 34, № 3, 144—145 (англ.)

Исправляются ошибки предыдущих работ (реф. 8661, 8662, 8665).

Счетно парокомпактное нормальное пространство компактно, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) Всякая непрерывно сходящаяся последовательность функций сходится равномерно:

б) Если всякая непрерывно сходящаяся последовательность функций к непрерывной функции сходится к ней строго непрерывно.

в) Всякая непрерывно сходящаяся последовательность в смысле Шефера (РЖМат, 1956, 7218) сходится равномерно.

г) Всякая непрерывно сходящаяся последовательность непрерывных функций в смысле Шефера сходится строго непрерывно.

Следствие. В паракомпактном пространстве все перечисленные условия эквивалентны бикомпактности пространства. Ю. М. Смирнов

8668. О понятии компактности и точечно-конечных покрытиях. Левшенко Б. Т., Матем. сб., 1957, 42, № 4, 479—484

Дается характеристика регулярных компактных пространств при помощи точечно-конечных покрытий: 1. Если пространство компактно, то из всякого точечно-конечного открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие 2. Если в системе Σ всех точечно-конечных покрытий пространства P имеется конфинальная счетная или конечная подсистема, то пространство P распадается в сумму компакта и множества изолированных точек. 3. В утверждении 2 вместо системы Σ можно брать систему всех локально конечных покрытий и систему всех звездно-конечных покрытий. 4. Для регулярных пространств справедливы обратные утверждения. Первое утверждение (вместе с обратным) независимо доказано Исеки и Касахара (реф. 8665, 8666) Ю. М. Смирнов

8669. Псевдокомпактные и счетно-компактные пространства. Исэки, Касахара (On pseudo-compact and countably compact spaces. Iséki K., Kasahara Sh.), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 2, 100—102 (англ.)

Доказаны два утверждения:

1. Для того чтобы вполне регулярное пространство S было псевдокомпактным, необходимо и достаточно, чтобы всякое его локально конечное (звездно-конечное) открытое покрытие содержало конечное подпокрытие.

В случае локально конечных покрытий это доказано Ю. М. Смирновым (РЖМат, 1954, 5478).

2. Для того чтобы регулярное T_1-пространство было компактным, необходимо и достаточно, чтобы всякое (счетное) точечно-конечное открытое покрытие этого пространства содержало конечное подпокрытие.

Для случая любых точечно-конечных открытых покрытий это доказано референтом (реф. 8667).

Очевидным следствием этих утверждений является: Следующие свойства нормального пространства эквивалентны: 1) S псевдокомпактно; 2) S компактно; 3) каждое локально конечное (звездно-конечное, точечно-конечное открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Б. Т. Левшенко

8670. Заметка об одном свойстве метризуемых пространств. Хан Хен Гон, Сухак ка мулли, Математика и физика, 1957, 1, № 1, 16—24 (кор.; рез. русск.)

Открытое покрытие γ автор называет локально $\mathfrak{a}$-кратным (где $\mathfrak{a}$ — некоторая бесконечная мощность), если у каждой точки имеется окрестность, пересекающаяся менее чем с $\mathfrak{a}$ элементами покрытия γ. Пространство P называется $L_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}$-пространством, если оно обладает базой, распадающейся в сумму менее чем $\mathfrak{b}$ локально $\mathfrak{a}$-кратных покрытий.

Теорема 1. Для $L_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}$-пространств следующие свойства эквивалентны: 1) вес пространства $< \mathfrak{a}$, 2, 3) каждая убывающая (возрастающая) трансфинитная последовательность различных замкнутых множеств имеет мощность $< \mathfrak{a}$, 4) всякая система попарно непересекающихся открытых множеств имеет мощность $< \mathfrak{a}$ (отрицательная аксиома мощности $\mathfrak{a}$), 5, 6) из всякого открытого покрытия мощности $\geqslant \mathfrak{a}$ $(=\mathfrak{a})$ можно выбрать подпокрытие мощности $< \mathfrak{a}$ (это $[\mathfrak{a}, \infty]$-, соответственно $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$-компактность).

Теорема 3. Нормальное пространство обладает равномерной структурой Σ веса $< \mathfrak{a}$ (т. е. в Σ имеется конфинальная часть мощности $< \mathfrak{a}$) тогда и только тогда, когда оно является $L_{(\aleph_0, \mathfrak{a})}$-пространством.

Теорема 5. В регулярном и паракомпактном пространстве свойство 2) и наследственное свойство 4) эквивалентны. Кардинальное число $\mathfrak{a}$ всюду предполагается регулярным. Ю. М. Смирнов

8671. О псевдометрических пространствах. Мрувка (On almost-metric spaces. Mrówka S.), Bull. Acad. polon sci., 1957, Cl. 3, 5, № 2, 123—127, XII (англ.; рез. русск.)

Псевдометрикой множества X называют действительную неотрицательную функцию двух переменных x, $y \in X$, удовлетворяющую условиям: $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ для любых x, y, z из X. Множество X вместе с семейством P (мощности $\mathfrak{m}$) псевдометрик ρ назовем $\mathfrak{m}$-псевдометрическим пространством, если из того, что $\rho(x, y) = 0$ для любого ρ из P следует равенство $x = y$. Топология задается операцией замыкания: замыкание $\bar{A}$ множества A состоит из всех таких точек $X \in X$, что $\rho(x, A) = 0$ для любого ρ и P.

Пусть мощность семейства P равна $\mathfrak{m}$; тогда 1) каждая точка имеет базу окрестностей мощности $\leqslant \mathfrak{m}$; 2) всякое замкнутое множество является пересечением $\leqslant \mathfrak{m}$ открытых множеств; 4) наличие плотного множества мощности $\leqslant \mathfrak{m}$ эквивалентно существованию базы открытых множеств мощности $\leqslant \mathfrak{m}$: 5) из компактности следует наличие плотного множества мощности $\leqslant \mathfrak{m}$; 3) утверждение $X \in \bar{A}$ эквивалентно следующему: существует $\mathfrak{m}$-последовательность (см. далее) точек из A, сходящаяся к x; 7) бикомпактность пространства X эквивалентна тому, что в каждой $\mathfrak{m}$-последовательности есть сходящаяся подпоследовательность; 6) $[\aleph_0, \mathfrak{m}]$-компактность (каждое открытое покрытие мощности $\mathfrak{m}$ содержит конечное подпокрытие) эквивалентна бикомпактности.

При этом $\mathfrak{m}$-последовательностями автор называет отображения слабого (лишь конечное число координат отлично от нуля) произведения $N^{\mathfrak{m}}$, где N — множество всех неотрицательных целых чисел, в X. Последовательность $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in N^{\mathfrak{m}}$, сходится к x, $x \in X$, если для каждой окрестности Ox существует такое α из $N^{\mathfrak{m}}$, что $x_\beta \in Ox$ при всех $\beta \geqslant \alpha$ (это означает, что $\beta_\lambda \geqslant \alpha_\lambda$ для любых координат β_λ, α_λ). Последовательность $\{y_\alpha\}$ называется подпоследовательностью $\mathfrak{m}$-последовательности $\{x_\alpha\}$, если существует $\mathfrak{m}$-последовательность $\{\beta_\alpha\}$, $\beta_\alpha \in N^{\mathfrak{m}}$, такая что $\beta_\alpha \geqslant \alpha$ и $y_\alpha = x_{\beta_\alpha}$ для каждого α.

Далее вводятся понятия произведения $\prod X$, пространства 2^X (всех ограниченных множеств), пространства X^Y и понятие полноты для псевдометрических пространств. Приводятся теоремы, аналогичные теоремам Тихонова, Вьеториса и Рисса. Доказательств нет. Ю. М. Смирнов

8672. Замечание о локально конечных системах. Мрувка (Remark on locally finite systems. Mrówka S.), Bull. Acad. polon sci., 1957, Cl. 3, 5, № 2, 129—132, XII (англ.; рез. русск.)

Доказывается обобщение известной теоремы Нагата-Смирнова (Успехи матем. наук, 1951, 6, № 6): $\mathfrak{m}$-базой ($\mathfrak{m}$ — некоторая бесконечная мощность) автор называет всякую базу, распадающуюся в сумму $\mathfrak{m}$ локально конечных систем открытых множеств.

Теорема. Нормальное пространство $\mathfrak{m}$-псевдометризуемо тогда и только тогда, когда оно имеет $\mathfrak{m}$-базу. Доказываются утверждения 1), 3), 5), 6) и 7) предыдущей статьи (реф. 8671.) для T_2-пространств, обладающих $\mathfrak{m}$-базой, и утверждение 2) — для T_3-пространств. Интересна лемма: Всякое $[\aleph_0, \mathfrak{m}]$-компактное T_2-пространство нормально. Некоторые из утверждений 1)—7) доказаны независимо Хан Хенгоном (реф. 8671.). Ю. М. Смирнов

8673. Необходимое и достаточное условие для $\mathfrak{m}$-псевдометризуемости. Мрувка (A necessary and sufficient condition for $\mathfrak{m}$-almost-metrisability. Mrówka S.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 6, 627—629 (англ.; рез. русск.)

Доказывается, что каждое из следующих условий б) и с) необходимо и достаточно для того, чтобы вполне регулярное пространство было $\mathfrak{m}$-псевдометризуемым (реф. 8671). Систему множеств Γ_λ пространства R автор называет функционально локально конечной (соответственно, функционально-дискретной), если существует система непрерывных функций f_λ, определенных на пространстве R и таких, что $f_\lambda(R) \subseteq [0, 1]$, $f_\lambda(\Gamma_\lambda) = 1$, система φ множеств $f_\lambda^{-1}[0, 1]$ локально-конечна (соответственно дискретна, т. е. у каждой точки $x \in R$ есть окрестность, пересекающаяся не более, чем с одним элементом системы φ). Условия в), с). Пространство R имеет базу, распадающуюся в сумму $\mathfrak{m}$ функционально локально конечных (соответственно функционально-дискретных) систем открытых множеств. Ю. М. Смирнов

8674. Некоторые замечания о компактности. Мрувка (Some remarks on compactness. Mrówka S.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, cl. 3, 5, № 8, 799—801 (англ.; рез. русск.)

Рассматриваются следующие условия, накладываемые на системы γ (данной бесконечной мощности $\mathfrak{a}$), состоящие из множеств Γ топологического пространства R: 1) Если мощность $\bar{A}$ множества A равна $\mathfrak{a}$ $(\bar{A} = \mathfrak{a})$ и $A \subseteq \bigcup_\gamma \Gamma$, то существует такой элемент $\Gamma \in \gamma$, что $A \cap \Gamma = \bar{A}$. 2) Для каждой бесконечной подсистемы γ' системы γ с тем же объединением: $\bigcup_{\gamma'} \Gamma = \bigcup_\gamma \Gamma$ и каждого множества A мощности $\mathfrak{a}$ существует такой элемент $\Gamma \in \gamma'$, что $\overline{\overline{A \cap \Gamma}} = \bar{A}$. 3) Для каждого бесконечного множества A мощности $\leqslant \mathfrak{a}$ существует такой элемент $\Gamma \in \gamma$, что $\overline{\overline{A \cap \Gamma}} = \bar{A}$. Доказываются теоремы: I, II) Если система γ удовлетворяет условию 1) (соответственно 2)), то она содержит подсистему меньшей (соответственно конечной) мощности и с тем же объединением. Приводится пример, показывающий, что в теореме II свойство 2) нельзя заменить на свойство 3).

Ю. М. Смирнов

8675. О локальных топологических свойствах. Мрувка (On local topological properties. Mrówka S.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 10, 951—956, LXXX (англ., рез. русск.)

Видоизменяя метод П. С. Александрова (для получения бикомпактных расширений локально бикомпактных пространств), автор строит специальные расширения пространств, локально обладающих некоторыми топологическими свойствами. Рассматриваются только свойства, удовлетворяющие следующим двум условиям: Ф) Если пространство X обладает свойством С, то и

всякое его замкнутое множество $\Phi \subseteq X$ обладает свойством C. Σ) Конечная сумма замкнутых множеств Φ_i, обладающих свойством C, также обладает свойством C. Кроме того, вводятся еще три условия: E) Если пространство X обладает свойством C локально (т. е. имеется база окрестностей, замыкания которых обладают свойством C), то существует пространство Y, обладающее свойством C и содержащее X в качестве открытого множества. W) Если пространство X не обладает свойством C, то для каждой точки $x \in X$ в любой базе окрестностей точки x имеется окрестность Ox такая, что $X \setminus Ox$ не обладает свойством C. I) Инвариантность относительно непрерывных отображений.

Основная теорема: Из условия W) вытекает условие E), из условий E) и I) следует условие W) (в предположениях Φ) и Σ)). В конце доказывается, что свойства нормальности, паракомпактности и $[a, b]$-компактности удовлетворяют условию W). Под пространством понимается вполне регулярное пространство. Ю. М. Смирнов

8676. **Локально нормальные пространства. Ханнер** (Locally normal spaces. Hanner O.), Bull. Acad. polon sci., 1957, Cl. 3, 5, № 11, 1051—1054, LXXXVII (англ., рез. русск.)

Несколько по-другому, видоизмененным методом П. С. Александрова, доказывается следующая теорема: T_1-пространство X можно топологически вложить в качестве открытого множества в некоторое нормальное T_1-пространство тогда и только тогда, когда X локально нормально (реф. 8675). Ю. М. Смирнов

8677. **Сепарабельное нормальное непаракомпактное пространство. Рудин** (A separable normal nonparacompact space. Rudin Mary Ellen), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 940—941 (англ.)

Строится пример сепарабельного нормального и непаракомпактного пространства (реф. 8678). Ю. М. Смирнов

8678. **Паракомпактность и пример Джонса. Мак-Оли** (Paracompactness and an example due to F. B. Jones. McAuley Louis F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 6, 1155—1156 (англ.)

Доказывается, что ранее построенное для других целей пространство Джонса (Jones B., Bull. Amer. Math. Soc., 1937, 43, 671—677) является сепарабельным, нормальным, непаракомпактным пространством (реф. 8677). Ю. М. Смирнов

8679. **О счетно-паракомпактных нормальных пространствах. Мансфилд** (On countably paracompact normal spaces. Mansfield M. J.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 3, 443—449 (англ.)

Видоизменяя ранее данные Стоном, Майклом, Келли и Гриффином необходимые и достаточные условия паракомпактности тем, что на соответствующем месте вставляется слово «счетное», автор получает аналогичные необходимые и достаточные условия счетной паракомпактности (во всякое счетное открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие) для нормальных пространств. Некоторые из этих условий получены Исэки (РЖМат., 1956, 265). Ю. М. Смирнов

8680. **Характеристическое свойство финально-компактных и паракомпактных пространств. Керстан** (Eine charakteristische Eigenschaft der Lindelöfschen und der parakompakten Räume. Kerstan Johannes), Math. Nachr., 1957, 16, № 5—6, 391—392 (нем.)

Дается характеристика регулярных финально-компактных (линделефовых) и паракомпактных пространств при помощи тотально-открытых множеств (т. е. полных прообразов интервалов прямой при непрерывных отображениях):

1′. Если пространство P регулярно и финально-компактно, то система Σ всех тотально-открытых множеств является единственным базисом (из тотально-открытых множеств), удовлетворяющим условию: а) базис содержит сумму любого счетного числа своих элементов.

1″. Если пространство обладает строго одним базисом (из тотально-открытых множеств), подчиняющимся кроме условия а) еще двум условиям; б) вместе с каждым своим множеством базис содержит и любое его тотально-открытое подмножество; в) базис содержит P, — тогда оно регулярно и финально-компактно.

2′. Если пространство P регулярно и паракомпактно, то система Σ является единственным базисом, удовлетворяющим условию б) и еще условию а′) базис содержит сумму любых своих элементов, составляющих локально счетную систему.

2″. Если пространство обладает строго одним базисом, подчиняющимся условиям б), в) и а′), то оно регулярно и паракомпактно. Ю. М. Смирнов

8681. **К характеристике псевдокомпактных пространств. Керстан** (Zur Charakterisierung der pseudokompakten Räume. Kerstan Johannes), Math. Nachr., 1957, 16, № 5—6, 289—293 (нем.)

Даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы вполне регулярное пространство было псевдокомпактным (т. е. всякая определенная на нем непрерывная функция была ограниченной). Вот основные из них: а) всякая локально конечная (звездно-конечная) система (покрытие) — конечна, б) всякое локально конечное (звездно-конечное) покрытие имеет конечное подпокрытие. Заменяя произвольные открытые множества тотально-открытыми (реф. 8680), автор получает аналогичные необходимые и достаточные условия псевдокомпактности для произвольных топологических пространств. Некоторые из этих условий ранее получены Исэки. Ю. М. Смирнов

8682. **Некоторые обобщения полной нормальности. Мансфильд** (Some generalizations of full normality. Mansfield M. J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 86, № 2, 489—505 (англ.)

Пусть α и β — покрытия топологического пространства X, $\mathfrak{m}$ — кардинальное число $\geqslant 2$. Автор говорит, что покрытие $\mathfrak{m}$-звездно вписано в покрытие α, если β вписано в α и для каждого семейства $\gamma \subset \beta$, имеющего мощность $\leqslant \mathfrak{m}$ и удовлетворяющего условию $\bigcap_{C \in \gamma} C \neq \emptyset$, существует такое $A \in \alpha$, что $\bigcup_{C \in \gamma} C \subset A$. Покрытие β почти $\mathfrak{m}$-звездно вписано в α, если β вписано в α и для каждого множества $M \subset X$ мощности $\leqslant \mathfrak{m}$, удовлетворяющего условию $M \subset St(x, \beta)$, для некоторой точки $x \in X$ найдется такое $A \in \alpha$, что $M \subset A$ (через $St(x, \beta)$ обозначена звезда точки x в покрытии β).

Топологическое пространство X называется $\mathfrak{m}$-вполне нормальным (почти $\mathfrak{m}$-вполне нормальным), если в каждое открытое покрытие пространства X можно $\mathfrak{m}$-звездно вписать (почти $\mathfrak{m}$-звездно вписать) открытое покрытие.

Очевидно, что вполне нормальное пространство можно охарактеризовать, как пространство, $\mathfrak{m}$-вполне нормальное при любом $\mathfrak{m}$.

Вот типичные примеры содержащихся в работе результатов. Всякое $\mathfrak{m}$-вполне нормальное пространство почти $\mathfrak{m}$-вполне нормально. Каждое почти 2-вполне нормальное пространство коллективно нормально. $\aleph_0$ — вполне нормальное пространство счетно паракомпактно. Замкнутое подмножество $\mathfrak{m}$-вполне нормального (почти $\mathfrak{m}$-вполне нормального) пространства $\mathfrak{m}$-вполне нормально (почти $\mathfrak{m}$-вполне нормально).

Приводятся некоторые примеры. Формулируется несколько нерешенных проблем. А. Д. Тайманов

8683. **Сохранение размерности и неплотности при отображениях. Уайберн** (Dimension and non-

density preservation of mappings. W h y b u r n G. T.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 2, 1243—1249 (англ.)

Подмножество $X_0 \subset X$ называется полуплотным в X относительно отображения $f: X \to Y$, если X_0 плотно в некотором открытом подмножестве каждого открытого множества $U \subset X$, образ которого $f(U)$ является открытым подмножеством пространства Y.

Пусть X и Y — локально компактные метрические пространства со счетной базой и $f: X \to Y$ — непрерывное отображение. Обозначим через N множество точек $y \in Y$, прообразы которых $f^{-1}(y)$ вполне несвязны, через L — множество $f^{-1}(N)$.

Доказывается, что в случае, когда отображение $f: X \to Y$ переводит каждое нигде не плотное компактное подмножество пространства X в нигде не плотное подмножество пространства Y, множество L полуплотно в X относительно отображения f. Указываются условия, при которых эта теорема обратима. Доказывается еще ряд теорем такого типа.

А. С. Пархоменко

8684. Замечание о размерностных функциях метрических пространств со счетной базой. Хаяси (A note on dimension functions of separable metric spaces. H a y a s h i Y o s h i a k i), Math. japon., 1955, **3**, № 4, 161—162 (англ.)

Размерностной функцией называется функция $d(R)$, определенная для каждого метрического пространства со счетной базой R, принимающая целые неотрицательные значения и удовлетворяющая условиям: а) $d(E^n) = n$ (E^n — n-мерное евклидово пространство), б) если пространства R и R' гомеоморфны, то $d(R) = d(R')$; в) если $R \supset R'$, то $d(R) \geqslant d(R')$.

В заметке показано, что не существует размерностной функции $d(R)$, удовлетворяющей следующим двум условиям: 1) если $R = R_1 \cup R_2$, то $d(R) \leqslant d(R_1) + d(R_2)$; 2) если $R = R_1 \times R_2$, то $d(R) = d(R_1) + d(R_2)$.

С другой стороны, существуют размерностные функции, удовлетворяющие любому из условий 1) и 2) в отдельности и дополнительному требованию: если R — объединение счетного числа замкнутых подмножеств R_i, для которых $d(R_i) \leqslant n$, то $d(R) \leqslant n$.

И. В. Проскуряков

8685. О размерности топологических пространств. Хаяси (On the dimension of topological spaces. H a y a s h i Y o s h i a k i), Math. Japon., 1954, **3**, № 2, 71—84 (англ.)

Дано и изучено новое определение размерности топологического пространства. Подмножество топологического пространства называется квазизамкнутым, если оно может быть получено из замкнутых и открытых множеств с помощью конечного числа операций объединения и пересечения.

Пусть R — непустое топологическое пространство. Будем говорить, что $d(R) = 0$, если R может быть представлено в виде объединения счетного числа квазизамкнутых подмножеств, имеющих индуктивную размерность 0. Если пространство R может быть представлено в виде $R = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n+1} R_i$, где $d(R_i) = 0$, но не может быть представлено в виде $R = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} R_i$, где $d(R_i) = 0$, то будем говорить, что $d(R) = n$ (обозначение редактора). Доказываются теоремы: 1) если $R' < R$, то $d(R') \leqslant d(R)$; 2) если $R = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$, множества R_i — квазизамкнуты и $d(R_i) \leqslant n$, то $d(R) \leqslant n$; 3) если $R = M \cup N$, то $d(R) \leqslant d(M) + d(N) + 1$.

Автор выясняет связь размерности $d(R)$ с размерностями $\dim R$ и $\operatorname{ind} R$. Доказывается, в частности, что для сильно паракомпактного метрического пространства (РЖМат, 1956, 1178) R, в частности, для метрического пространства со счетной базой, $d(R) = \dim R = \operatorname{ind} R$.

И. В. Проскуряков

8686. О возможности вложения в евклидово пространство. Кертис (An imbedding theorem. C u r t i s M. L.), Duke Math. J., 1957, 24, № 3, 349—351 (англ.)

Дано достаточное условие для возможности вложения в евклидово пространство E^n. С помощью этой теоремы показано, что объединение двух условий, предложенных Уайлдером (возможность вложения в E^4) и Гриффитсом (РЖМат, 1956, 2051), не является достаточным для того, чтобы обобщенное трехмерное многообразие (Wilder R. L., Topology of manifolds, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1949, 32) являлось бы топологическим многообразием.

Р. Л. Фрум-Кетков

8687. О гомотопических ретрактах. Бартоломей (Type-invariance and h-retraction. B a r t h o l o m a y A. F.), Portugaliae math., 1954, **13**, № 1, 105—110 (англ.)

Рассматриваются простейшие соотношения между ретрактами и отображениями, имеющими правый гомотопический обратный элемент. Р. Л. Фрум-Кетков

8688. Об одном классе групп преобразований. Глисон, Палейс (On a class of transformation groups. G l e a s o n Andrew M., P a l a i s Richard S.), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 3, 631—648 (англ.)

Пусть G — некоторая группа гомеоморфизмов локально-компактного и локально связного пространства X. Топология в группе G называется топологией Ли, если G в этой топологии является группой Ли, естественное отображение $L: G \times X \to X$ непрерывно и если всякая однопараметрическая группа гомеоморфизмов пространства X, содержащаяся в G, является непрерывной однопараметрической подгруппой группы G. Доказывается, что если T — топология в группе G, превращающая G в группу Ли, удовлетворяющая 2-й аксиоме счетности и такая, что h непрерывно, то T — топология Ли. Кроме того, топология T порождается множествами, которые суть линейно-связные компоненты множеств, открытых в компактно открытой топологии. Обратно, если топология T', порожденная этими множествами, превращает G в группу Ли, то она является топологией Ли. Далее доказывается, что если в линейно локально-связной топологической группе G размерности всех компактных метризуемых подпространств ограничены, то G — группа Ли. Отсюда выводится, что если X — конечномерное метрическое пространство, то для того чтобы топология T' в группе G являлась топологией Ли, достаточно, чтобы существовали такая компактно открытая окрестность U единицы в G и такое конечное множество $F \subset X$, что если $g \in U$, то из $g(x) = x$ для всех $x \in F$ следует, что g — тождественное преобразование. А. Л. Онищик

8689. Накрывающие пространства и мультикогерентность; приложение к проблеме Борсука. Ганя (Revêtements et multicohérence; application à un problème de Borsuk. G a n e a T u d o r), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 6, 725—728 (франц.)

Пусть X — связное топологическое пространство. Степенью мультикогерентности пространства X называется такое число $r(X)$, что существуют связные замкнутые множества A и B, для которых $A \cup B = X$ и число компонент множества $A \cap B$ равно $r(X) + 1$ и для двух любых связных замкнутых множеств A и B, удовлетворяющих условию $A \cup B = X$, число компонент множества $A \cap B$ больше $r(X)$.

Через $(\tilde{X}, f)$, где X — связное локально связное пространство, обозначено накрывающее пространство в смысле Шевалле с проекцией f. Группа скольжений покрытия $(\tilde{X}, f)$ (т. е. гомеоморфизмов ξ простран-

ства X, удовлетворяющих условию $f\xi = f$) обозначена через $G(\tilde{X}, f)$.

Доказываются, в уточнение результатов Эйленберга (Eilenberg S., Fundam. math., 1937, 29, 110—111), следующие теоремы:

Теорема 2. Если X — паракомпактное, связное и локально связное пространство, обладающее таким регулярным накрытием $(\tilde{X}, f)$, что группа $G(\tilde{X}, f)$ имеет n свободных образующих, то $r(X) \geqslant n$.

Теорема 3. Если X — нормальное, связное, локально связное пространство и $r(X) \geqslant n$, то X обладает таким регулярным накрытием $(\tilde{X}, f)$, что группа $G(\tilde{X}, f)$ имеет n свободных образующих.

Основываясь на этих теоремах, автор показывает, что $r(S_2^{S_1}) = 1$, что разрешает вопрос, поставленный Борсуком (РЖМат, 1954, 3978) (через $S_2^{S_1}$ обозначено снабженное компактно открытой топологией пространство непрерывных отображений окружности S_1 в двумерную сферу S_2).

По просьбе автора отмечаем, что последняя формула статьи напечатана с ошибкой: нужно читать $r(X_1^m) = 1$ вместо $r(X_1^m) = 0$. С. С. Рышков

8690. Одномерная категория и гомоморфизмы фундаментальных групп. Ганя (Catégorie 1-dimensionnelle et homomorphismes de groupes fondamentaux. Ganea Tudor), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 11, 1407—1410 (франц.)

Пусть X — паракомпактное пространство, Y — топологическое пространство, асферичное в размерностях $2, 3, \ldots, n-1$. Доказывается теорема: Если $\mathrm{cat}_1 X \leqslant n+1$, то любой гомоморфизм $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ порождается непрерывным отображением пространства X в пространство Y. Через $\mathrm{cat}_1 X$ обозначается одномерная категория пространства X (РЖМат, 1956, 1198). С. С. Рышков

Примечание редакции. Теорема верна для любого вполне регулярного пространства X.

8691. Ациклические модели и расслоенные пространства. Гугенхейм, Мур (Acyclic models and fibre spaces. Gugenheim V. K. A. M., Moore J. C.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, № 2, 265—306 (англ.)

Излагается обобщение теории ациклических моделей Эйленберга—Маклейна (РЖМат, 1953, 1125), включающее, в частности, теорию гомологий с локальными коэффициентами. Эта теория используется для конструкции спектральной последовательности сингулярных гомологий непрерывного отображения и для вычисления второго члена этой последовательности в случае расслоенного пространства в смысле Серра. Доказывается также, что если A — топологическое пространство, G — локальное семейство коэффициентов на A, то кубические и симплициальные сингулярные гомологии пространства A с коэффициентами в G совпадают между собой. А. Л. Онищик

8692. Ациклические модели и теорема де Рама. Форрестер (Acyclic models and de Rham's theorem. Forrester Amasa), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, № 2, 307—326 (англ.)

Теория работы Гугенхейма и Мура (реф. 8691) излагается применительно к когомологиям. Пользуясь этой теорией, автор доказывает, что сингулярные гомологии и когомологии двух различных классов гладкости на паракомпактном дифференцируемом многообразии совпадают между собой. Далее доказывается теорема де Рама для паракомпактного дифференцируемого многообразия. А. Л. Онищик

8693. Топология H_n-пространств и H-квадраты. Кудо, Араки (Topology of H-spaces and H-squaring operations. Kudo Tatsuji, Araki Shoro), Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. A, 1956, 10, № 2, 85—120 (англ.)

Подробное изложение ранее опубликованной работы (РЖМат, 1957, 2156). М. М. Постников

8694. О когомологиях алгебраических многообразий. Серр (Sur la cohomologie des variétés algébriques. Serre Jean-Pierre), J. math. pures et appl., 1957, 36, № 5, 1—16 (франц.)

На произвольные алгебраические многообразия переносятся некоторые результаты, доказанные ранее лишь для аффинных или проективных многообразий (РЖМат, 1957, 5147). В частности, доказано, что для любого алгебраического многообразия X и любого когерентного алгебраического пучка F группа $H^q(X; F)$ тривиальна для всех $q > \dim X$. Кроме того, доказано, что если многообразие X полно, то пространство $H^0(X; F)$ конечномерно над основным полем. Указана также некоторая простая гомологическая характеристика аффинных многообразий.

М. М. Постников

8695. Некоторые новые когомологические инварианты комплексных многообразий. I. Фрёлихер, Нейенхёйс (Some new cohomology invariants for complex manifolds. I. Frölicher Alfred, Nijenhuis Albert), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., Indagationes math., 1956, A59, № 5, 540—552 (англ.)

Строится теория когомологий многообразий, основанная на рассмотрении векторных внешних дифференциальных форм и операций над ними, введенных авторами ранее (РЖМат, 1958, 7146). Определения и основные свойства этих операций кратко изложены в первых параграфах реферируемой работы.

Для рассматриваемого действительного многообразия X, а также функций и тензорных полей на нем будет предполагаться дифференцируемость класса C^∞. Векторной формой M степени m называется кососимметрическое полилинейное отображение, относящее каждому набору $u_1, \ldots, u_m$ векторных полей на X векторное поле $M(u_1, \ldots, u_m)$, причем $M(u_1, \ldots, fu_i, \ldots, u_m) = f \cdot M(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_m)$ для любой функции f (это аналогично определению обычной — скалярной — внешней дифференциальной формы). Локально векторная форма M может быть записана в виде $\sum_i \varphi_i \otimes u_i$, где φ_i — скалярные формы, u_i — векторные поля. Пусть L, M, N обозначают ниже векторные формы степеней соответственно l, m, n; ω — скалярная форма степени q. Авторами определяются:

а) векторная $(q+m)$-форма

$$\omega \wedge M(u_1, \ldots, u_{q+m}) =$$

$$= \frac{1}{q!m!} \sum_\alpha (\operatorname{sgn} \alpha)\, \omega(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_q}) M(u_{\alpha_{q+1}}, \ldots, u_{\alpha_{q+m}})$$

(суммирование ведется по перестановкам $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+m})$);

б) скалярная $(m+q-1)$-форма

$$\omega \overline{\wedge} M(u_1, \ldots, u_{m+q-1}) =$$

$$= \frac{1}{m!\,(q-1)} \sum_\alpha (\operatorname{sgn} \alpha)\, \omega(M(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_m}),$$

$$u_{\alpha_{m+1}}, \ldots, u_{\alpha_{m+q-1}});$$

в) векторная $(m+l-1)$-форма

$$L \overline{\wedge} M(u_1, \ldots, u_{m+l-1}) = \frac{1}{m!\,(l-1)!} \sum_{\alpha} (\operatorname{sgn}\alpha)\, L(M(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_m}), u_{\alpha_{m+1}}, \ldots, u_{\alpha_{m+l-1}});$$

г) скалярная $(m-1)$-форма

$$\bar{M} = \sum_i \varphi_i \overline{\wedge} u_i \quad (\text{если } M = \sum_i \varphi_i \otimes u_i);$$

д) скалярная $(q+m)$-форма (дифференциальный конкомитант, коммутатор)

$$[M, \omega](u_1, \ldots, u_{m+q}) = \frac{1}{m!q!} \sum_{\alpha} (\operatorname{sgn}\alpha) M(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_m})(\omega(u_{\alpha_{m+1}}, \ldots, u_{\alpha_{m+q}})) - \frac{1}{m!\,(q-1)!} \sum_{\alpha} (\operatorname{sgn}\alpha)\, \omega([M(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_m}), u_{\alpha_{m+1}}], \ldots, u_{\alpha_{m+q}}) + \frac{1}{2\,(m-1)!\,(q-1)!} \sum_{\alpha} (\operatorname{sgn}\alpha)\, \omega(M(u_{\alpha_1}, \ldots, [u_{\alpha_m}, u_{\alpha_{m+1}}]), \ldots, u_{\alpha_{m+q}})$$

(где в первой сумме векторное поле $M(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_m})$ рассматривается как оператор, действующий на функцию $\omega(u_{\alpha_{m+1}}, \ldots, u_{\alpha_{m+q}})$);

е) коммутатор векторных форм $[M, N]$, определяемый условием $[\varphi \otimes u, \psi \otimes v] = \varphi \wedge \psi \otimes [u, v] + [\varphi \otimes u, \psi] \otimes v - (-1)^{mn}[\varphi \otimes v, \varphi] \otimes u$.

Указан ряд свойств введенных операций, из которых отметим свойства коммутатора: $[M, N] = (-1)^{mn+1}[N, M]$ и $(-1)^{ml}[M, [N, L]] + (-1)^{nm} \times [N, [L, M]] + (-1)^{ln}[L, [M, N]] = 0$.

Обозначим через I векторную форму, определяемую условием $I(u) = u$ для любого u. Обычный дифференциал скалярной формы ω можно записать в виде: $d\omega = [I, \omega]$.

Предположим теперь, что X — многообразие с почти комплексной структурой, которая определяется наличием векторной I-формы J, удовлетворяющей условию $J \overline{\wedge} J = -I$. Пусть далее $P = {}^1/_2(I - iJ)$; $Q = {}^1/_2(I + iJ)$. Разбиение скалярных форм по типам (РЖМат, 1957, 7018) может быть осуществлено следующим простым способом: будем считать, что форма ω имеет тип (r, s), если $\omega \overline{\wedge} P = r \cdot \omega$ (или $\omega \overline{\wedge} Q = s \cdot \omega$). Вводится разбиение по типам и для векторных форм. Любая векторная форма M представляется в виде суммы форм типов $(r, s)'$ и $(r, s)''$, причем форма типа $(r, s)'$ определяется условиями: а) $M \overline{\wedge} P = r \cdot M$ (или $M \overline{\wedge} Q = s \cdot M$) и б) $P \overline{\wedge} M = M$ (или $Q \overline{\wedge} M = 0$), а форма типа $(r, s)''$ — такими же условиями, но с заменой P на Q в условии б).

Операторы ∂ и $\bar{\partial}$ на почти комплексном многообразии (см. цитированную работу Спенсера) задаются формулами:

$$\partial\omega = [P, \omega]; \quad \bar{\partial}\omega = [Q, \omega];$$

вводится также оператор D, действующий на векторных формах: $DM = [Q, M]$. Тензор кручения, связанный с почти комплексной структурой, записывается в виде $T = \frac{1}{2}[Q, Q]$. Доказывается, что $\bar{\partial}^2\omega = [T, \omega]$; $\partial^2\omega = [T, \omega]$; $D^2M = [T, M]$. Пусть $\bar{d} = JdJ$. Устанавливается эквивалентность следующих условий интегрируемости: а) $T = \frac{1}{2}[Q, Q] = 0$ (РЖМат, 1956, 5484); б) $\partial^2 = 0$ или $\bar{\partial}^2 = 0$ (РЖМат, 1957, 7018); в) $D^2 = 0$; г) $d\bar{d} + \bar{d}d = 0$ (Guggenheimer H., Tôhoku Math. J., 1952, (2), 4, 157—171).

И. З. Розенкноп

8696. Некоторые новые когомологические инварианты комплексных многообразий. II. Фрёлихер, Нейенхёйс (Some new cohomology invariants for complex manifolds. II. Frölicher Alfred, Nijenhuis Albert), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 5, 553—564; Indagationes math., 1956, 18, № 5, 553—564 (англ.)

В терминах первой части работы (реф. 8695) рассматриваются векторные дифференциальные формы на комплексном аналитическом многообразии X. Оператор D является в этом случае дифференциалом ($D^2 = 0$), что позволяет рассматривать когомологии относительно этого оператора. При этом формы типа $(r, s)'$ (или $(r, s)''$) преобразуются с помощью D в формы типа $(r, s+1)'$ (соответственно $(r+1, s)''$.) Пусть $F'_{r,s}(F''_{r,s})$ — пучок ростков векторных форм типа $(r, s)'$ (соответственно $(r, s)''$). Доказывается, что последовательности пучков $F'_{r,0} \to F'_{r,1} \to \ldots$ и $F''_{0,s} \to F''_{1,s} \to \ldots$ являются точными. Обозначим через θ_r пучок ростков голоморфных векторных r-форм, являющийся ядром гомоморфизма $F'_{r,0} \to F'_{r,1}$. Устанавливается теорема о том, что группы когомологий $H^s(X, \theta_r)$ многообразия X с коэффициентами в пучке θ_r изоморфны соответственно группам когомологий векторных форм типа $(r, s)'$ относительно дифференциала D.

Операция коммутирования $[M, N]$ для векторных форм индуцирует соответствующую операцию для групп когомологий. В связи с этим вводится понятие градуированной алгебры Ли как градуированного векторного пространства $G = \sum_m G_m$ с операцией коммутирования, удовлетворяющей условиям: 1) билинейности, 2) $[G_m, G_n] \subset G_{m+n}$, 3) для $g \in G_m$, $h \in G_n$ $[g, h] = (-1)^{mn+1}[h, g]$, 4) для $g \in G_m$, $h \in G_n$, $k \in G_l$ выполнено тождество Якоби в виде:

$$(-1)^{ml}[g, [h, k]] + (-1)^{nm}[h, [k, g]] + (-1)^{ln}[k[g, h]] = 0.$$

Показывается, что прямая сумма $G = \sum_{r,s} H^s(X, \theta_r)$, градуированная подпространствами $G_m = \sum_{s+r=m} H^s(X, \theta_r)$, является градуированной алгеброй Ли в смысле данного определения. Соответствующие когомологии называются GLA-когомологиями.

Другие операции над векторными и скалярными (дифференциальными формами также могут быть распространены на группы когомологий. Так, операция коммутирования скалярных и векторных форм приводит к представлению градуированной алгебры Ли векторных когомологий линейными преобразованиями дифференцированиями) алгебры Дольбо (РЖМат, 1953, 130) скалярных когомологий (относительно оператора $\bar{\partial}$):

$$H^s(X, \theta_r) \times H^q(X, \Omega_p) \to [H^s(X, \theta_r), H^q(X, \Omega_p)] \subset H^{s+q}(X, \Omega_{r+p}),$$

где Ω_p — пучок ростков голоморфных скалярных p-форм. Это представление тривиально, если X — компактное келерово многообразие.

Далее, гомоморфизмы $H^q(X, \Omega_p) \to H^q(X, \theta_{p+1})$, индуцированные отображением $\omega \to \omega \bigwedge P$, являются изоморфизмами группы Дольбо в GLA — группы. Гомоморфизмы $H^q(X, \theta_p) \to H^q(X, \theta_{p-1})$, индуцированные отображением $M \to M$, отображают GLA-группы на группы Дольбо. Последние, ввиду сказанного, входят прямым слагаемым в группы GLA-когомологий. И. З. Розенкноп

8697 Д. **Функция порядка и полиэдры. Мейзель** (Ordnungsfunktion und Polyeder. Meisel Wolf-Dietrich. — Diss., Math. naturwiss. F., Bonn-1954, 82 Bl., — Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, B, № 19, 1379 (нем.)

8698 Д. **Гомологии пространств замкнутых кривых. Шварц А. С.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

См. также: 8723, 8773, 8780, 8781, 8805, 8988, 9207

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков*

8699. **Об арифметической, геометрической и гармонической растянутостях точечного множества. Лея** (O rozwartości arytmetycznej, geometrycznej i harmonicznej zbioru. Leja Franciszek), Zesz. Nauk. Uniw. Jagiell., 1957, № 14, 49—59 (польск.; рез. русск., англ.)

Если E — замкнутое ограниченное множество точек m-мерного ($m \geqslant 2$) пространства, а $\omega(p, q)$ — непрерывная, симметрическая и неотрицательная функция от переменных p, $q \in E$, то арифметической растянутостью множества E называется число

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{p_1,\ldots,p_n \in E} \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \omega(p_j, p_k).$$

Подобным образом, с помощью геометрического и гармонического средних, определяются геометрическая и гармоническая растянутости множества E. Эти определения обобщают известные понятия трансфинитных плоского и пространственного поперечников.

Все растянутости вычислены для отрезка и окружности в случае, когда $\omega(p, q)$ — обычное евклидово расстояние. Сформулировано несколько проблем, касающихся свойств растянутостей и связанных с ними функций. С. Ф. Пашковский

8700. **Заметка о длине жордановой кривой. Маржик** (Poznámka o délce Jordanovy křivky. Mařík Jan), Časop. pěstov. mat., 1958, 83, № 1, 91—96 (чешск.; рез. русск., нем.)

Поставим плоскому множеству A в соответствие число $\|A\|$, определяемое равенством

$$\|A\| = \sup \int_A \left(\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial y} \right) dxdy,$$

где верхняя грань берется по всем полиномам v_1, v_2 от x и y, удовлетворяющим неравенству $v_1^2(x, y) + v_2^2(x, y) \leqslant 1$ для всех точек $(x, y) \in A$.

Доказывается теорема: Пусть G — плоская область, ограниченная жордановой кривой длины α ($0 < \alpha \leqslant \infty$), и A — измеримое множество, для которого $G \subset A \subset \bar{G}$. Тогда $\|A\| = \alpha$. Р. С. Гутер

8701. **О двойных интегралах от линейных выражений из частных производных. I. Гиццетти** (Sugli integrali doppi di espressioni lineari alle derivate parziali. Nota I. Ghizzetti Aldo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 22, № 3, 276—281 (итал.)

Пусть $\mathcal{E}$ — линейный дифференциальный оператор в частных производных порядка $n \geqslant 2$ от двух независимых переменных x и y, T — некоторая область на плоскости xOy и u — произвольная функция класса C^n. Ставится задача: найти условия (наложенные на T и $\mathcal{E}$), при которых двойной интеграл

$$\iint_T \mathcal{E}(u)\, dxdy$$

зависит только от значений, принимаемых функцией u и ее частными производными до $(n-2)$-го порядка в угловых точках границы области T.

Автор в данной работе и в следующей (реф. 8702) дает решение этой задачи для $n = 2$ и $n = 3$ и для областей T, ограниченных характеристиками оператора $\mathcal{E}$. И. А. Егорова

8702. **О двойных интегралах от линейных выражений из частных производных. II. Гиццетти** (Sugli integrali doppi di espressioni lineari alle derivate parziali. Nota II. Ghizzetti Aldo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 22, № 4, 430—433 (итал.)

Автор дает окончание решения задачи, сформулированной и частично решенной в предыдущей работе (реф. 8701). И. А. Егорова

8703. **Свойства непрерывности производных последовательностей функций. Маклейн** (Continuity properties of derivatives of sequences of functions. Maclane G. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 897—898 (англ.)

Доказывается, что существует последовательность функций $\{f_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, обладающих непрерывной 1-й производной $f_n'(x)$ на всей оси и свойствами: 1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$; 2) если $\{N_1\}$ — любая подпоследовательность натуральных чисел, для которой существует последовательность точек $x_{n_1}, n_1 \in N_1$ такая, что $f_{n_1}'(x_{n_1}) = 0$ и $\lim_{n_1\to\infty} x_{n_1} = 0$, то подпоследовательность $\{N_2\}$ натуральных чисел, дополняющая $\{N_1\}$ до натурального ряда, бесконечна и

$$\overline{\lim}_{n_2\to\infty} \int_0^h |f_{n_2}'(x)|\, dx = +\infty$$

для каждого $h > 0$.

Этот результат дополняет теорему Дворецкого (РЖМат, 1957, 3895). И. М. Ганзбург

8704. **Замечание к моей статье «Об одной теореме Уолша». Дворецкий** (Remark on my paper «On a theorem of J. L. Walsh». Dvoretzky Aryeh), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 982 (англ.)

Автор приводит другую формулировку теоремы, приведенной в его заметке (РЖМат, 1957, 3895).

Теорема. Пусть $f(x)$ и $f_n(x)$ имеют r-ю производную в интервале (a, b) $(a < x < b)$ и для каждого

открытого частичного интервала $I \subset (a, b)$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{x\in J,\, y\in J} |f_n(y) - f(x)| = 0.$$

Тогда для любой точки $x_0 \in (a, b)$ и любого открытого частичного интервала $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, содержащего x_0, последовательность натуральных чисел $N = \{n\}$ может быть разбита на 2 части, $N_1 = \{n_1\}$ и $N_2 = \{n_2\}$, таким образом, что для каждого n_1 найдется точка $x_{n_1} \in (\alpha, \beta)$, для которой

$$f_{n_1}^{(r)}(x_{n_1}) = f^{(r)}(x_0), \qquad (1)$$

причем, в случае бесконечности последовательности N_1, имеем:

$$\overline{\lim_{n_2\to\infty}} \int_{x_0-h}^{x_0+h} \left| f_{n_2}^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) \right| dx = o(h).$$

Если точка x_0 не является локальным экстремумом (в широком смысле) функции $f^{(r)}(x)$, то последовательность N_2 может быть взята конечной, а x_{n_1}, удовлетворяющие соотношению (1), могут быть выбраны так, что $\lim_{n_1\to\infty} x_{n_1} = x_0$.

И. М. Ганзбург

8705. О множествах точек, где производная соответственно конечная и бесконечная. Ц о д ы к с В. М., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 6, 1174—1176

Пусть E — множество типа $F_{\sigma\delta}$ меры нуль и N — множество типа G_δ, лежащие на оси Ox, причем $N \supset E$. Доказывается существование абсолютно непрерывной на каждом отрезке оси Ox возрастающей функции, удовлетворяющей условиям: 1) $F'(x) = +\infty$ при $x \in E$; 2) $\underline{F}(x) < +\infty$ при $x \notin E$, где $\underline{F}(x)$ — нижнее производное число функции $F(x)$; 3) $F'(x)$ при $x \in CN$ существует и конечна. Ш. С. Пхакадзе

8706. О суперпозиции функций и изометрии некоторых классов функций. М а р к у с (La superposition des fonctions et l'isométrie de certaines classes de fonctions. M a r c u s S.), Bull. math. Soc. sci. math. et phys. RPR, 1957, 1, № 1, 69—76 (франц.)

Рассматривается вопрос о представлении произвольной функции посредством суперпозиции двух функций определенного класса и в связи с этим находится кардинальное число определенного класса функций.

Доказываются следующие предложения:

I. Всякая действительная функция, определенная на [0,1], есть суперпозиция двух почти всюду дифференцируемых функций, причем внутренняя функция суперпозиции остается фиксированной.

II. Каждый из следующих классов функций имеет мощность 2^c: а) класс почти всюду дифференцируемых функций; б) класс функций, интегрируемых в смысле Римана; в) класс функций, обладающих свойством Дарбу.

III. Существует функция, интегрируемая в смысле Римана и не являющаяся аналитической в смысле Лузина—Суслина.

IV. Множество функций, обладающих свойством Дарбу и не измеримых в смысле Лебега, имеет мощность 2^c.

Пусть S есть пространство действительных ограниченных функций с метрикой

$$\rho(x, y) = \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|.$$

Обозначим через S_M класс функций из S, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{t\in[0,1]} |x(t)| \leqslant M.$$

V. Существуют: 1) множество $\Lambda \subset S_M$ функций, интегрируемых в смысле Римана и лишенных свойства Дарбу; 2) множество $\Pi \subset S_M$ функций, интегрируемых в смысле Римана, обладающих свойством Дарбу, дифференцируемых почти всюду и имеющих нигде не плотное множество точек разрыва; 3) множество $\Omega \subset S_M$ функций, обладающих свойством Дарбу и не измеримых в смысле Лебега; 4) множество $Z \subset S_M$ функций, обладающих свойством Дарбу и лишенных свойства Бэра, — такие, что каждое из множеств Λ, Π, Z, Ω изометрично пространству S_M.

А. Г. Джваршейшвили

8707. Об одном характеристическом признаке слабой сходимости последовательности монотонных функций. Б о б р о в А. А., Научн. ежегодник. Одесск. ун-т, 1956. Одесса, 1957, 115—117

Последовательность функций $\varphi_n(t)$ называется сходящейся в основном к функции $\varphi(t)$, если она сходится к этой функции в каждой точке, являющейся точкой непрерывности функции $\varphi(t)$. Точка ξ называется точкой сближения последовательности $\varphi_n(t)$ с функцией $\varphi(t)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что почти для всех $t \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ существует такое натуральное число N_t, что при всех $n > N_t$ выполняется неравенство $|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$.

Формулируются некоторые признаки слабой сходимости последовательности монотонных функций, в основе вывода которых, как отмечает автор, лежит следующая теорема:

Т е о р е м а 1. Для того чтобы последовательность $\{\varphi_n\}$ монотонных и равномерно ограниченных функций сходилась в основном к функции φ на (a, b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы:

а) существовала функция f, абсолютно непрерывная на каждом сегменте $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, не имеющая нулей внутри (a, b) и для которой почти всюду выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma^x f d\varphi_n = \int_\gamma^x f d\varphi,$$

где γ — какая-нибудь точка промежутка (a, b);

б) последовательность φ_n имела на (a, b) точку сближения с φ.

П р и м е ч а н и е р е ф е р е́ н т а. Под слабой сходимостью автор, очевидно, понимает слабую сходимость функционалов l_n на пространстве C непрерывных на $[a, b]$ функций, порожденных монотонными функциями φ_n: $l_n(f) = \int_a^b f d\varphi_n$.

Я. Б. Рутицкий

8708. Обобщения векторных пространств посредством интеграла Стилтьеса. Ф е р н а н д е с - А в и л а (Generalización de los espacios vectoriales mediante la integral de Stieljes. F e r n á n d e z A v i l a F r a n c i s c o J a v i e r), Rev. mat. hisp.-amer., 1957, 17, № 2—3, 150—160 (исп.)

Продолжение статьи (РЖМат, 1958, 227). Дается геометрическая интерпретация определителя Грама.

Доказывается, что наилучшее приближение в среднем функции $f(t)$ пространства E_ρ посредством линейных комбинаций функций из ортогональной системы $\{f_n(t)\}$ дают частичные суммы ряда Фурье. Выводится неравенство Бесселя. Э. Апарисио

8709. Обобщения векторных пространств посредством интеграла Стилтьеса. Ф е р н а н д е с - А в и л а (Generalización de los espacios vectoriales mediante la integral de Stieljes. F e r n á n d e z A v i l a F r a n c i s c o J a v i e r), Rev. mat. hisp.-amer., 1957, 17, № 4—5, 209—223 (исп.)

Продолжение статьи (РЖМат, 1958, 227, 8708). Дается понятие замкнутой системы векторов $\{f_n(t)\}$ пространства E_ρ и устанавливается равенство Парсеваля. Изучается класс L^r функций $f(t)$, для которых интеграл $\int_a^b |f(t)|^r d\alpha(t)$ существует, где функция $\alpha(t)$ с ограниченным изменением, и устанавливаются неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского.

Э. Апарисио

8710. Обобщения векторных пространств посредством интеграла Стилтьеса. Фернандес-Авила (Generalización de los espacios vectoriales mediante la integral de Stieljes. Fernández Avila Francisco Javier), Rev. mat. hisp.-amer., 1957, 17, № 6, 278—290 (исп.)

Окончание статьи (РЖМат, 1958, 227, 8708, 8709). Дается понятие полноты ортогональной системы в пространстве E_ρ и доказывается теорема Фишера—Рисса.

Э. Апарисио

8711. Об одной проблеме Н. Н. Лузина. Гагаев Б. М., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 99—101

Обобщая одну из проблем Н. Н. Лузина, автор ставит следующую задачу: а) найти все веса, для которых существуют ортогональные системы функций, инвариантные с точностью до постоянных множителей относительно операции дифференцирования; б) для каждого такого веса найти все ортогональные системы, обладающие этим свойством. В работе дается решение этой задачи при ряде предположений относительно веса и ортогональных систем. Доказываются следующие утверждения:

1. Пусть система дважды непрерывно дифференцируемых функций $\{\varphi_n(x)\}$ содержит единицу, а функции $\varphi_n'(x)$ образуют полную систему. Функция e^{-x^2} является с точностью до линейного преобразования аргумента единственным дважды непрерывно дифференцируемым весом, для которого существуют ортогональные системы $\{\varphi_n(x)\}$ с указанными свойствами, инвариантные с точностью до постоянных множителей относительно дифференцирования. При этом «отрезком ортогональности» является $(-\infty, \infty)$.

2. Среди систем дважды непрерывно дифференцируемых функций, производные которых образуют полную систему, система полиномов Эрмита является единственной ортогональной относительно веса e^{-x^2} на $(-\infty, \infty)$ системой функций, инвариантной с точностью до постоянных множителей относительно операции дифференцирования.

А. Л. Гаркави

8712. II. Теорема о циклической аддитивности лебеговой площади. Нёйгебауэр (II. A cyclic additivity theorem of the Lebesgue area. Neugebauer Christoph J.), Riv. mat. Univ. Parma, 1956, 7, № 3—5, 283—292 (англ.)

Продолжение предыдущих работ автора (РЖМат, 1958, 230, 1941), где введены употребляющиеся здесь обозначения.

Пусть (T, A) — отображение допустимого множества A, представимое в виде $T = sf$, $f: A \to \mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{M}$, $s: \mathfrak{M}^* \to E_3$. Доказывается аддитивность лебеговой площади $L(T, A)$ в виде

$$L(T, A) = \sum L(sr_C f, G_C),\ C \in \mathfrak{K},$$

где $\mathfrak{K}$ — класс циклических элементов, соответствующий отображению (T, A), и G_C — множество, соответствующее элементу $C \in \mathfrak{K}$.

Р. С. Гутер

8713. III. Дальнейшее расширение теоремы о циклической аддитивности поверхностного интеграла. Нёйгебауэр (III. A further extension of a cyclic additivity theorem of a surface integral. Neugebauer Christoph J.), Riv. mat. Univ. Parma, 1956, 7, № 3—5, 333—347 (англ.)

Теорема о циклической аддитивности, доказанная в предыдущей работе (реф. 8712) для лебеговой площади, переносится на случай поверхностного интеграла.

Р. С. Гутер

8714 К. Теория функций вещественных переменных. Грейвс (The theory of functions of real variables. Graves L. M. New York—Toronto—London, McGraw-Hill, 1956, 375 pp.) (англ.)

Содержание книги не совсем соответствует принятому у нас пониманию выражения «теория функций вещественных переменных». Именно, около трети книги занимает математический анализ: теория вещественных чисел, свойства непрерывных функций, теоремы о дифференцировании, интеграл Римана, обыкновенные дифференциальные уравнения. Однако все эти разделы изложены с точки зрения функций вещественных переменных. Например, те свойства непрерывных функций, которые сохраняются для полунепрерывных функций, формулируются и доказываются в предположении полунепрерывности рассматриваемых функций; теорема о замене переменной в интеграле Римана формулируется так:

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, $g(t)$ не убывает на $[c, d]$ $(a = g(c),\ b = g(d))$ и $\varphi(t)$ — одно из 4-х производных чисел $g(t)$ — R-интегрируемо на $[c, d]$. Тогда

$$\int_a^{-b} f(x)\,dx = \int_c^{-d} f[g(t)]\,\varphi(t)\,dt,$$

где $\int_a^{-b}$ — точная нижняя граница верхних сумм Дарбу.

При этом автор считает, что читатель знаком с обычным курсом анализа. Что же касается собственно теории функций вещественных переменных, то материал, излагаемый автором, в основном совпадает с обычно излагаемым в курсах по этому предмету. Более подробно содержание книги таково:

Гл. I. Введение. Гл. II. Система вещественных чисел. Гл. III. Точечные множества. Гл. IV. Функции и их пределы. Свойства непрерывных функций. Гл. V. Основные теоремы о дифференцировании. Гл. VI. Интеграл Римана. Гл. VII. Равномерная сходимость. Гл. VIII. Функции, заданные неявно. Гл. IX. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Гл. X. Интеграл Лебега. Гл. XI. Интеграл Лебега (Продолжение). Гл. XII. Интеграл Стилтьеса. Гл. XIII. Теория множеств и трансфинитные числа. Гл. XIV. Метрические пространства.

Характерной чертой книги является глубина изложения и подробное освещение затронутых в ней вопросов. Вводимые понятия иллюстрируются большим количеством примеров. Все главы книги снабжены многочисленными задачами и упражнениями. Каждая глава заканчивается небольшим списком литературы по материалу данной главы.

Г. И. Натансон

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

8715. О теореме Шрёдера—Бернштейна. Каллахан, Нил (A note on the Schroeder—Bernstein theorem. Callahan Francis P., Kneale Samuel G.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 6, 423—424 (англ.)

Изучается характер отображения одного множества в другое в теореме Шрёдера—Бернштейна.

В. Я. Арсенин

8716. **О разбиениях множеств.** Седмак (Sur les partitions des ensembles. Sedmak Viktor), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1957, 12, № 1-2, 17—19 (франц.; рез. серб-хорв.)

Для $\alpha = 0$ решена положительно следующая проблема Де-Грота (De Groot): Пусть множество S ($kS \geqslant \aleph_\alpha$) разбито $\aleph_\alpha$ способами по меньшей мере на $\aleph_\alpha$ непустых частей. Возможно ли в каждом разбиении $r_i(S)$, $0 \leqslant i < \aleph_\alpha$ выбрать часть $X_{0,i}$ так, что

$$k(S \setminus \cup_i X_{0,i}) \geqslant \aleph_\alpha?$$

Высказывается мнение, что при $\alpha \neq 0$ эта проблема связана с проблемой Суслина. Д. А. Захаров

8717. **Упорядоченные множества и их вполне упорядоченные подмножества.** Курепа (Ensembles ordonnés et leurs sous-ensembles bien ordonnés. Kurepa Georges), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 18, 2202—2203 (франц.)

Всякому упорядоченному множеству E ставится в соответствие разветвление («дерево») wE подмножеств этого множества, упорядоченных некоторым простым способом. Доказывается, что для всякого упорядоченного (может быть, и частично) множества E не существует однозначных строго возрастающих преобразований wE в E. В. Я. Арсенин

8718. **Порядковые типы и преобразования подобия.** Гинсбёрг (Order types and similarity transformations. Ginsburg Seymour), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 79, № 2, 341—361 (англ.)

Пусть $\bar{A}$ обозначает порядковый тип упорядоченного множества A. Если A и B — упорядоченные множества, то $\bar{A} \leqslant \bar{B}$ означает, что существует преобразование подобия A в B; $\bar{A} < \bar{B}$ означает, что $\bar{A} \leqslant \bar{B}$, но $\bar{B} \not\leqslant \bar{A}$; $\bar{A} \parallel \bar{B}$ означает, что $\bar{A} \not\leqslant \bar{B}$ и $\bar{B} \not\leqslant \bar{A}$. Упорядоченное множество E (порядковый тип $\bar{E}$) называется точным (exact), если E не подобно никакому собственному подмножеству множества E. Упорядоченное множество E обладает свойством A, если $\bar{E} = 2^{\aleph_0}$ и если любые два непересекающихся подмножества множества E мощности $2^{\aleph_0}$ не подобны.

Рассматриваются вопрос о разрешимости неравенства $\sigma < x < \mu$, где σ и μ — данные порядковые типы ($\sigma < \mu$), и проблема существования таких подмножеств E_1 и E_2 упорядоченного множества E, что множество $(E_1 - E_2) + (E_2 - E_1)$ содержит точно два элемента и $E_1 \parallel E_2$. Укажем некоторые результаты автора.

1. Пусть $\gamma = \alpha + \beta$ — точный порядковый тип. Тогда решения неравенства $\gamma < x < \alpha + n + 1 + \beta$ исчерпываются типами $x = \alpha + j + 1 + \beta$, где $j < n$, а решения неравенства $\gamma < x < \alpha + \omega + \beta$ исчерпываются типами $x = \alpha + n + 1 + \beta$, где $n < \omega$.

2. Пусть E — множество действительных чисел мощности $2^{\aleph_0}$. Тогда существуют точный тип τ_0 мощности $2^{\aleph_0}$, удовлетворяющий неравенству $0 < x < \bar{E}$, и тип τ_1 мощности $2^{\aleph_0}$ со свойством A, удовлетворяющий тому же неравенству.

3. Пусть E — множество действительных чисел мощности $2^{\aleph_0}$, Y — множество мощности $2^{\aleph_0}$ и H — семейство подмножеств множества Y, упорядоченное по включению. Тогда существует множество S точных порядковых типов такое, что 1) каждый тип $x \in S$ имеет мощность $2^{\aleph_0}$; 2) S подобно H; 3) каждый тип $x \in S$ является решением неравенства $0 < x < \bar{E}$.

4. Пусть E — точное упорядоченное множество и $p, q \in E$, $p \prec q$. Если множество $\mathcal{S}_{x \in E}(p \prec x \prec q)$ бесконечно, то $\overline{E - \{p\}} \parallel \overline{E - \{q\}}$.

5. Пусть D — точное подмножество упорядоченного множества E и $p, q \in E - D$, $p \prec q$. Если множество $\mathcal{S}_{x \in D}(p \prec x \prec q)$ бесконечно, то $\overline{D + \{p\}} \parallel \overline{D + \{q\}}$.

S. Mrówka

8719. **Подмножество счетных порядковых чисел.** Рудин (A subset of the countable ordinals. Rudin Mary Ellen), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 5, 351 (англ.)

Доказывается, что существуют несчетные подмножества пространства Λ всех счетных порядковых чисел (с топологией порядка), которые пересекают всякое несчетное замкнутое множество, но сами не содержат никакого несчетного замкнутого множества.

В. Я. Арсенин

8720. **Теорема о предельном порядковом числе.** Эро (Le théorème de l'ordinal limite. Eyraud Henri), Ann. Univ. Lyon, 1955, A, № 18, 5—14 (франц.)

Изучаются свойства отрезков $\{u_1, u_2, \ldots, u_\alpha\}$ возрастающих последовательностей порядковых чисел первых двух классов $\{u_1, u_2, \ldots, u_\lambda, \ldots\}$ типа ω_1.

Основными являются следующие результаты:

1. Всегда существует первое порядковое число второго класса и второго рода λ такое, что отрезки длины λ в последовательностях $F\{u_1 \ldots, u_\lambda, \ldots\}$ и $G\{v_1, \ldots, v_\lambda, \ldots\}$ будут одинаковой высоты.

2. Пусть последовательность $F\{u_1, \ldots, u_\lambda, \ldots\}$ является мажорантной для последовательности $G\{v_1, \ldots \ldots, v_\lambda, \ldots\}$. Тогда существует несчетное множество отрезков последовательности G, имеющих ту же высоту, что и соответствующие отрезки последовательности F.

Приводятся приложения этих теорем к построению некоторых специальных последовательностей.

В. Я. Арсенин

8721. **Теоретико-структурная характеристика канторовской эквивалентности.** Вагнер (Verbandstheoretische Charakterisierung der Cantorschen Äquivalenzrelation. Wagner K.), Math. Ann. 1958, 134, № 4, 295—297 (нем.)

Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторая система множеств, содержащая вместе с каждым множеством все его подмножества. $\mathfrak{S}$ с отношением $A \subseteq B$ образует частично упорядоченное множество.

Определения (всюду ниже $A, B, A^*, B^*, A_i, A_j, B_i, \cup_{i \in I} A_i, \cup_{i \in I} B_i \in \mathfrak{S}$): A^* называется преемником A, если $A \subset A^*$ и $A^* - A$ состоит из одного элемента; $(A_i)_{i \in I}$ называется цепью (I — упорядоченное множество), если из $i < j$, $i, j \in I$ следует, что $A_i \subseteq A_j$; цепь не обрывается, если для всякого i существует такое j ($i, j \in I$), что $A_i \subset A_j$; если на $\mathfrak{S}$ заданы эквивалентности $\overset{(1)}{\sim}$ и $\overset{(2)}{\sim}$, то $\overset{(1)}{\sim}$ называется не менее тонкой, чем $\overset{(2)}{\sim}$, если из $A \overset{(1)}{\sim} B$ всегда следует $A \overset{(2)}{\sim} B$; эквивалентность $\overset{(1)}{\sim}$ удовлетворяет условию (α), если из $A \overset{(1)}{\sim} B$ следует $A^* \overset{(1)}{\sim} B$, и удовлетворяет условию (β), если для всяких двух необрывающихся цепей $(A_i)_{i \in I}$ и $(B_i)_{i \in I}$ из $A_i \overset{(1)}{\sim} B_i$ для всех $i \in I$ следует $\cup_{i \in I} A_i \overset{(1)}{\sim} \cup_{i \in I} B_i$; наконец, канторовская эквивалентность множеств $A \sim B$ означает обычную равномощность.

Основной результат: Из всех эквивалентностей на $\mathfrak{S}$ с условиями (α) и (β) наиболее тонкой является канторовская эквивалентность. Д. А. Захаров

8722. **Борелевские множества и счетные системы операций.** Гриффитс (Borel sets and countable series of operations. Griffiths H. B.), Fundam., math., 1957, 44, № 2, 115—155 (англ.)

Неформально рассматривается логическая сторона топологической проблемы Дина (Z. P. Dienes): решить, какая из следующих возможностей:

$$X=Y,\ X\supseteq Y,\ X\subseteq Y,\ X\cap Y=0,\ X\cap Y\neq 0 \quad (1)$$

имеет место для двух борелевских множеств X, Y пространства E, а именно «разрешимы ли предложения (1) в логике со счетно трансфинитными правилами вывода и образования предложений?».

Объектом изучения являются борелевские множества в полном сепарабельном метрическом пространстве (п. с. м. п.). Последовательно вводятся: класс простейших функций, понятия счетно рекурсивной определимости функций, D-разрешимости отношения, счетной спецификации класса объектов. Затем указывается, как «задавать» п. с. м. п. E, в связи с чем решается вопрос о том, каким аксиомам должно удовлетворять отношение порядка, чтобы абстрактное, счетное, частично упорядоченное множество было подобно базе открытых множеств некоторого п. с. м. п. С помощью подходящей спецификации «задаются» G_δ-подмножества и борелевские множества в E. Наконец, указывается алгоритм для решения вопроса, пусто или нет данное борелевское множество. Это позволяет дать положительный ответ на проблему Дина в новой трактовке, а именно предложения (1) в этом случае D-разрешимы. Попутно обнаружена D-разрешимость ряда других проблем. В заключение приводится несколько нерешенных проблем.

Замеченные опечатки: должно быть на стр. 117, строка 16 сверху, f^3 вместо f^α; на стр. 141, строка 11 сверху, $2\alpha+1$ вместо α; на стр. 153, строка 10 сверху, (5. 9) вместо (5. 8). Д. А. Захаров

8723. **О структуре аналитических вещественных подмножеств. Брюа, Картан** (Sur la structure des sous-ensembles analytiques réels. Bruhat François, Cartan Henri), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 8, 988—990 (франц.)

Пусть Ω — открытое множество пространства R^n. Подмножество E множества Ω называется вещественным аналитическим в Ω, если для всякой точки $x\in\Omega$ существуют открытая окрестность U точки x и конечная система вещественных функций f_i, аналитических в U, таких, что $E\cap U$ есть множество нулей функции $f=\sum_i f_i^2$. Доказываются утверждения:

1. Пересечение какого угодно семейства аналитических в Ω подмножеств есть аналитическое в Ω подмножество.

2. Пусть $\{E^\alpha\}$ — фильтрующее семейство убывающих аналитических в Ω подмножеств. Всякая точка $x\in\Omega$ имеет окрестность U такую, что семейство множеств $\{E^\alpha\cap U\}$ является стационарным.

В. Я. Арсенин

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

8724. **О нижней границе постоянной для наилучшего приближения. Ли Вэнь-цин** (Lee Ween-ching), Сямэнь дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэбань), Acta scient. natur. Univ. amoiensis, 1957, № 2, 15—19 (кит.; рез. англ.)

По теореме Джексона существует абсолютная константа C такая, что для всех непрерывных функций $f(x)$ периода 2π имеет место неравенство

$$E_n(f)\leqslant C\omega\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots), \quad (1)$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение f при помощи тригонометрических полиномов порядка не выше n и $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции f.

Автор, уточняя рассуждения, приведенные в книге И. П. Натансона «Конструктивная теория функций» (М.—Л., Гостехиздат, 1949), получает для наименьшей константы C, для которой имеет (1), неравенство $C\leqslant 8$ (при $n\geqslant 12$). При этом оценивается сумма Джексона.

Примечание референта. В книге Н. И. Ахиезера «Лекции по теории аппроксимации» (М.—Л., Гостехиздат, 1947) на стр. 216 показано, что $C\leqslant 3$. С. М. Никольский

8725. **Замечание об одной теореме интегрируемости для ряда из синусов. О'Шей** (Note on an integrability theorem for sine series. O'Shea Siobhan), Quart. J. Math., 1957, 8, № 32, 279—281 (англ.)

Приводится следующая теорема: Пусть $1<\gamma<2$. Для того чтобы сумма $g(x)$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx \quad (b_n\geqslant 0) \quad (1)$$

удовлетворяла условию

$$x^{-\gamma}g(x)\in L(0,\ \pi), \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-1}b_n. \quad (3)$$

Достаточность была доказана Хейвудом (РЖМат, 1955, 5720). При доказательстве необходимости Хейвуд использовал дополнительное условие: монотонность $\{b_n\}$.

Указывается, что в случае, когда $0<\gamma\leqslant 1$, $b_n\to 0$, $\{b_n\}$ квазимонотонна, для сходимости ряда (1) к функции $g(x)$, удовлетворяющей условию (2), необходимо и достаточно, чтобы ряд (3) сходился. Для монотонной $\{b_n\}$ этот результат был получен Боасом (Boas R. P., Quart. J. Math., 1952, 3, 217—221). А. А. Шнейдер

8726. **Некоторые приложения одной леммы о рядах Фурье. Ганелиус** (Some applications of a lemma on Fourier series. Ganelius Tord), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1957, 11, 9—18 (англ.)

Доказана основная лемма: Если $V(t)$ — действительная интегрируемая 2π-периодическая функция, то для целого $n>0$

$$\sup_t|V(t)|\leqslant C\left\{\sum_{m=0}^{n-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)|V_m|+\omega(n^{-1},\ V)\right\},$$

где

$$V_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-imx}V(x)\,dx,$$

$\omega(\delta,\ V)$ — модуль непрерывности функции $V(t)$. С помощью этой леммы выводятся при некоторых предположениях оценки для $|V|$, когда V имеет ограниченную вариацию или удовлетворяет условию Липшица. Даются также некоторые оценки для функции, гармонической в круге.

Приведем, например, теорему 4: Пусть ρ, t — полярные координаты, $V(\rho,\ t)$ — гармоническая функция, регулярная для $\rho<1$, r — фиксированное число, $0<r<1$. Если $\partial V/\partial t<1$ для $\rho<1$ и если

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|V(r,\ t)|\,dt\leqslant H,$$

то

$$|V(\rho,\ t)|\leqslant C\left(\log^+\left(\frac{1}{H}\right)\right)^{-1}\log\left(\frac{2}{r}\right)$$

для $\rho<1$.

Некоторые из этих теорем формулируются в терминах теории потенциала.

Автор указывает, что поводом для этой статьи явилось его знакомство с работами Эрдёша и Турана, идеи которых им использованы в отдельных доказательствах, и что некоторые их результаты являются частными случаями доказанных им теорем.

В. А. Баскаков

8727. **О распределении узлов в интерполяционном процессе С. Н. Бернштейна. Берман Д. Л.,** Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1,35 —43

Рассмотрим интерполяционный косинус—полином Лагранжа $\sum_{k=1}^{n} l_k^{(n)}(\theta) f(\theta_k^{(n)})$, построенный для узлов $\theta_k^{(n)}$ на промежутке $[0, \pi]$; узлы $\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \ldots, \theta_n^{(n)}$ будем считать расположенными в порядке их убывания. Эрдёш и Туран доказали следующую теорему: Если фундаментальные полиномы $l_k^{(n)}(\theta)$ интерполяционного процесса Лагранжа ограничены в совокупности, т. е. $|l_k^{(n)}(\theta)| \leqslant c$ (где c не зависит от θ, k и n), то узлы $\theta_k^{(n)}$ распределены на $[0, \pi]$ «квазиравномерно» (т. е. существуют такие абсолютные постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, что $\frac{c_1}{n} \leqslant \theta_k^{(n)} - \theta_{k+1}^{(n)} \leqslant \frac{c_2}{n}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $n = 2, 3, \ldots$).

В реферируемой статье этот результат переносится на фундаментальные полиномы $r_k^{(n)}(\theta)$ интерполяционного процесса, рассмотренного С. Н. Бернштейном (Собр. соч., 2, Изд-во АН СССР, 1954, стр. 130).

Как следствие получается: Если для любой непрерывной функции $f(\theta)$ интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна сходится равномерно, то узлы $\theta_k^{(n)}$ распределены «квазиравномерно» на $[0, \pi]$.

В. Ф. Николаев

См. также: 8945, 8950, 8994, 8995, 8996, 9020

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

8728. **Сходимость бесконечных экспоненциалов с комплексными членами. Трон** (Convergence of infinite exponentials with complex elements. Thron W. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 6, 1040—1043 (англ.)

Пусть: 1) $\{a_n\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, не лежащих на отрицательной действительной полуоси,

$$t_n(z) = e^{a_n z} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$T_1(z) \equiv t_1(z), \quad T_n(z) = T_{n-1}(t_n(z)).$$

Последовательность $\{T_n(1)\}$ называется бесконечным экспоненциалом. Таким образом, речь идет о последовательности e^{a_1}, $e^{a_1 e^{a_2}}$, $e^{a_1 \cdot e^{a_2 \cdot e^{a_3}}}$, ... Полагая $e_n = e^{a_n}$, можно эту последовательность переписать и так:

$$b_1,\ b_1^{b_2},\ b_1^{b_2^{b_3}},\ b_1^{b_2^{b_3^{b_4}}},\ \ldots$$

Доказывается теорема: Бесконечный экспоненциал сходится, если для всех $n \geqslant 1$ $|a_n| \leqslant e^{-1}$. Число u, к которому сходится бесконечный экспоненциал, удовлетворяет условию

$$|\ln u| \leqslant 1.$$

В ходе доказательства используется идея, заимствованная из исследований автора по теории цепных дробей.

Для случая действительных a_n теорема была установлена Баррoy (Barrow D. F., Amer. Math. Monthly, 1936, 43, 150—160). М. Б. Балк

8729. **О производных с произвольным указателем порядка дифференцирования от аналитических функций комплексного переменного. Шостак Р. Я.** В сб.: Механика (МВТУ, 50). М., Оборонгиз, 1956, 335—362

Обобщением операции дифференцирования на тот случай, когда указатель порядка дифференцирования не является натуральным числом, занимались многие видные математики: Лейбниц, Эйлер, Лиувилль, Риман, Н. Я. Сонин, Вейль и др.

Глубокие исследования по этому вопросу принадлежат русскому математику XIX в. А. В. Летникову. Он указал также на ряд приложений производных нецелого порядка (дифференциальные уравнения, специальные функции). Однако А. В. Летников ограничился случаем, когда указатель порядка дифференцирования является действительным числом. Случай, когда этот указатель является произвольным комплексным числом, был рассмотрен — либо весьма бегло, либо не очень удачно — в нескольких работах Н. Я. Сонина, П. А. Некрасова и Лорана (70—80-е годы XIX в.). Этот же случай рассматривается в реферируемой работе. Отправляясь от идей А. В. Летникова, автор делает попытку перенести их на случай комплексного указателя порядка дифференцирования.

Пусть функция $f(\zeta)$ регулярна в некоторой области D, a — произвольная точка внутри или на границе D (в последнем случае автор на $f(\zeta)$ накладывает некоторые ограничения, которые здесь не воспроизводим), l_a — луч:

$$\operatorname{Im}(z-a) = 0, \ \operatorname{Re}(z-a) \leqslant 0;$$

$$\bar{D} = D \setminus l_a.$$

Пусть Γ_a — простой кусочно-гладкий контур такой, что 1) началом и концом его служит точка a; 2) все остальные точки его лежат в $\bar{D}$; 3) Γ_a не касается границы области $\bar{D}$. Пусть, далее, z — произвольная точка внутри Γ_a, p — произвольное комплексное число.

За производную порядка p от функции $f(z)$ (в точке z), взятую в точке a, автор принимает выражение

$$[D^p f(z)]_a^z \equiv \frac{\Gamma(p+1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}}.$$

При p натуральном это выражение совпадает, очевидно, с производной $f_{(z)}^{(p)}$, понимаемой в общепринятом смысле.

Если p — целое отрицательное число, $p = -n$, то $[D^{-n} f(z)]_a^z$ представляет собой n-кратный интеграл от $f(z)$, взятый в пределах от a до z.

Выводятся (в качестве примеров) формулы для обобщенных производных от функций $(z-a)^s$, $(z-a)^s \ln^k (z-a)$ ($R(s) > -1$, k — натуральное число).

Выясняется характер особенности (или порядок нуля) производной порядка p в начальной точке a, если известно поведение самой функции $f(z)$ в точке a (рассматриваются лишь случаи, когда $f(z) = (z-a)^s \varphi(z)$ или $f(z) = (z-a)^s \ln^k (z-a)$ при условии, что $R(s) > -1$, k — натуральное, $\varphi(a) \neq 0$).

При весьма общих условиях, налагаемых на $f(z)$, устанавливаются такие формулы:

а) $$\left[D^q \left[D^p f(z)\right]_a^s\right]_a^s = \left[D^{p+q} f(z)\right]_a^s;$$

б) формула Летникова (установленная последним в действительной области):

$$\left[D^{p+q} f(z)\right]_a^s = (z-a)^{-p} \left[D^q \left\{(z-a)^{p+q} \left[D^p (z-a)^{-q} f(z)\right]_a^s\right\}\right]_a^s;$$

в) Обобщенная формула Лейбница для производной порядка p от произведения двух функций:

$$\left[D^p \varphi(z) f(z)\right]_a^s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p-k+1)} \varphi_{(z)}^{(k)} \left[D^{p-k} f(z)\right]_a^s.$$

В конце работы выводятся формулы, обобщающие известные разложения аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана. М. Б. Балк

8730. Основная теорема алгебры. Редхеффер (The fundamental theorem of algebra. Redheffer Raymond), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 8, Part 1, 582—585 (англ.)

Без ссылок на общие теоремы теории аналитических функций (но с использованием уравнений Коши—Римана) доказывается, что если для полинома $f(z)$ на окружности $|z| = r$ выполняется неравенство $\frac{1}{2}|f(z)|^2 \geqslant \frac{1}{2}|f(0)|^2 + 1$, то внутри окружности лежит по крайней мере один нуль $f(z)$. Отсюда легко следует «основная теорема высшей алгебры».

А. И. Маркушевич

8731. Об одной теореме Л. Бервальда. Томич (О једном ставу Л. Бервалда. Томић Миодраг), Зб. радова Српска АН, 1953, 35, № 3, 85—88 (серб.; рез. франц.)

Автор дает более простое геометрическое доказательство следующей теоремы Л. Бервальда (Berwald L., Math. Z., 1932, 37):

Если коэффициенты вещественного полинома

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$$

удовлетворяют условию $0 > c_0 > \ldots > c_{k-1}$; $c_k > c_{k+1} > \ldots > c_n$, то полином $f(x)$ имеет на единичной окружности не более одного простого корня $x = 1$, а внутри единичной окружности имеет k корней, если $f(1) > 0$, и $k-1$ корней, если $f(1) \leqslant 0$. Тем же геометрическим методом доказывается следующая теорема А. Брауэра: Все нули полинома $f(x) = x^n - (a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющими условию $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$, за исключением одного, лежат внутри единичной окружности. Н. С. Мейман

8732. Кратно-положительные последовательности и правило знаков Декарта. Шёнберг (A note on multiply positive sequences and the Descartes rule of signs. Schoenberg I. J.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1955, 4, № 1, 123—128; № 2, 129—131 (англ.)

Обобщаются некоторые хорошо известные теоремы о связи между числом нулей $Z(S)$ вещественного полинома в секторе S, симметричном относительно вещественной оси, и числом $\nu(a)$ перемен знаков в последовательности коэффициентов полинома. Даны также новые доказательства одной важной теоремы С. Липка и обобщения правила знаков Декарта, принадлежащего Н. Обрешкову.

В основе работы, как указывает автор, лежит идея М. Фекете от 1912 г. о k-положительных последовательностях. Так называется последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ($a_0 > 0$, $a_n > 0$), если все миноры порядка $\leqslant k$ бесконечной матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} a_0 a_1 & \ldots a_n & 0\,0\ldots \\ 0\; a_0 a_1 & \ldots a_{n-1} a_n & 0\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}$$

неотрицательны. Для этого достаточна неотрицательность миноров матрицы A_k, составленной из первых k строк A. Пусть $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, $R(x) = P(x) \cdot Q(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n+m} x^{n+m}$ и A, B, C — соответствующие матрицы. Тогда $C = AB$; поэтому из k-положительности коэффициентов полиномов $P(x)$ и $Q(x)$ следует k-положительность последовательности коэффициентов их произведения. На этом свойстве основано применение k-положительных последовательностей. Н. С. Мейман

8733. Дополнения к одной теореме Пелле. Пародн (Compléments à un théoreme de Pellet. Parodi Maurice), Bull. sci. math., 1955, 79, juill.-août, 101—105 (франц.)

Пелле (Pellet) показал, что если коэффициенты полинома

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \quad (a_n \neq 0)$$

удовлетворяют неравенству $|a_p| > 1 + \sum_{k=1,\, k\neq p}^{n} |a_k|$, то $(n-p)$ корней полинома $f(z)$ лежат в единичном круге $|z| < 1$, а p корней — вне этого круга. Автор исходит из того, что нули $f(z)$ являются собственными значениями матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_{-2} & -a_{-1} \end{pmatrix},$$

а для матрицы известны области, где лежат ее собственные числа (см., например, Parodi M., Mém. Soc. math. Franc., 1952, 118). Используется также то обстоятельство, что если корни $f(z)$ лежат в некоторой области D, определяемой через коэффициенты $f(z)$, то корни полинома

$$\bar{f}(z) = \bar{a}_n z^n + \bar{a}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \bar{a}_1 z + 1$$

лежат в аналогичной области D'. Так как корни $f(z)$ и $\bar{f}(z)$ симметричны относительно единичной окружности, то корни $f(z)$ лежат в пересечении

областей D и D_1, где D_1 — область, симметричная D' относительно единичной окружности. Для полинома

$$f(z)=z^n+a_pz^{n-p}+\ldots+a_n \quad (a_n\neq 0)$$

матрица A имеет более простую структуру, что дает возможность в этом случае уточнить локализацию нулей $f(z)$. Н. С. Мейман

8734. Новый простой общий критерий устойчивости сервомеханизмов. Хиггинс, Михалак (A new simple general criterion for determining the stability of servomechanisms. Higgins Thomas J., Michalak Edward M.), Proc. Nat. Electronics Confer., 1954, 10, 748—757 (англ.)

Применяется теорема о логарифмическом вычете аналитической всюду внутри замкнутой области функции $f(s)$ комплексного переменного s для формулировки критерия, выполнение которого гарантирует расположение нулей $f(s)$ слева от мнимой оси. Утверждается, что этот критерий перекрывает по общности критерии Найквиста и Дзунга и прост в приложениях. А. М. Летов

8735. Вещественные нули целых функций. Перри (Real zeros of integral functions. Perry R. L.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 4, 467—473 (англ.)

Рассматривается семейство целых функций вида

$$f(z,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\,a_nz^n \qquad (0\leqslant t<1),$$

где $\sum a_nz^n=g(z)$ — целая функция конечного порядка $\rho>0$ с неотрицательными коэффициентами, обладающая тем свойством, что

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln g(x)}{\ln x}=\rho'>0.$$

Через $\Pr(P)$ автор обозначает меру множества точек из интервала $0\leqslant t<1$, обладающих свойством P. Предполагается, что все случайные функции $a_n(t)$ имеют и одну ту же функцию распределения $F(u)=\Pr(a(t)<u)$ и $F(u)$ симметрична, с конечной отличной от нуля дисперсией σ. Пусть $\eta_i(t,\ R)$ — число нулей функции $f(z,\ t)$ на интервале $(0,\ R)$. Автор доказывает две теоремы:

1) $$\Pr\left[\eta(t,\ R)<A_1\ln\ln R\right]<\frac{B}{(\ln R)^{D_1}},\quad D_1>0.$$

2) $$\Pr\left[\eta(t,\ R)<\frac{A_2\ln R}{\ln\ln R}\right]<R^{-D_2/\ln\ln R},\quad D_2>0,$$

где A, B, D — константы. Н. С. Мейман

8736. Исследование одного степенного ряда. Субханкулов М. А., УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1957, № 2, 21—27 (рез. узб.)

Пусть натуральное $k=2^\delta k_1$, где k_1 нечетно; l — показатель, к которому принадлежит 2 по модулю k_1, $\omega=\exp 2\pi iak^{-1}$, $(a,\ k)=1$. Автор показывает, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}z^{2^m}=(l\ln 2)^{-1}S_\omega\ln\frac{1}{1-r}+O(y),$$

где $r=|z|$, $r<1$, $S_\omega=\sum_{m=0}^{l-1}\omega^{2^m}$,

$y=\max(l^{3/2},\ \delta)$. Н. Г. Чудаков

8737. Об одной теореме Бурьона о сверхсходимости и ее приложении к коэффициентам некоторого степенного ряда. Макинтайр (An overconvergence theorem of G. Bourion and its application to the coefficients of certain power series. Macintyre A. J. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 250/23, 11 pp., ill.) (англ.)

Автор доказывает следующую теорему Бурьона: Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=f(z)$ имеет радиус сходимости 1 и $c_n=0$ для $n_k\leqslant n\leqslant m_k$, $m_k/n_k\geqslant\lambda>1$ $(k=1,2,\ldots)$ и если $f(z)$ регулярна в секторе $-\alpha_1<\arg(1-z)<\alpha_2$, $|z-1|<\delta$, то $\sum_{\nu=0}^{n_k}c_\nu z^\nu$ сходится к $f(z)$ в некотором секторе $-\beta_1<\arg(1-z)<\beta_2$, $|z-1)<\delta_1$, где $-\alpha_1<-\beta_1<-\frac{1}{2}\pi$, $\alpha_2>\beta_2>\frac{1}{2}\pi$, $\delta_1<\delta$.

Далее вводится понятие виртуально изолированной (virtually isolated) точки. Особая точка $z=Re^{i\vartheta}$ на границе круга сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=f(z)$ называется виртуально изолированной, если $f(z)$ регулярна вблизи $Re^{i\vartheta}$ для $|\arg(R-e^{-i\vartheta}z)|<\alpha$, где $\alpha>\pi$. Доказаны две теоремы.

Теорема А. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ с радиусом сходимости 1 имеет на границе своего круга сходимости только одну особую точку, если эта точка виртуально изолированная и если $\gamma>0$, то $|c_n|>e^{-\gamma n}$, исключая, возможно, подпоследовательность значений n, плотность которой равна нулю.

Теорема В. Пусть выполнены условия теоремы А. Обозначим особую точку на окружности $|z|=1$ через z_0 и пусть ε — произвольно малое положительное число. Тогда $\left|\frac{c_{n1}+}{c_n}-\frac{1}{z_0}\right|<\varepsilon$, исключая, возможно, предпоследовательность значений n, плотность которой равна нулю. Как отмечает автор, эти две его теоремы были опубликованы раньше (J. London Math. Soc., 1941, 16, 220—229), но их доказательство там не было достаточно обоснованным. Н. А. Давыдов

8738. Некоторые свойства распределения особенностей общего ряда Дирихле в зависимости от природы последовательности коэффициентов. Бламбер (Quelques propriétés de repartition des singularités d'une série de Dirichlet générale en relation avec la nature de la suite des coefficients. Blambert M.), Publs scient. Univ. Alger, 1955, A2, № 2, 251—272 (франц.)

Обозначения: σ_c — абсцисса сходимости ряда Дирихле $f(s)=\sum a_ne^{-\lambda_ns}$ $(\lambda_n>0,\ \lambda_n\uparrow\infty)$, σ_H — абсцисса голоморфности этого ряда $C(\zeta)=\prod\left(1-\frac{\zeta^2}{\lambda_{n_\nu}^2}\right)$, где $\{\lambda_{n_\nu}\}\subset\{\lambda_n\}$. Последовательность $\{\lambda_n\}$ называется регулярной, если $\lim_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)>0$. Последовательность $\{\lambda_n\}$ называется квазирегулярной, если она имеет конечную максимальную плотность D и можно найти такое q_0, что $0<q_0<\frac{1}{10D'}$, где $D'\geqslant D$ и интервалы, образующие множество близости $E(q_0,\ \{\lambda_n\})$ (Bernstein V. Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933, p. 320). $T_\alpha(l,\ \eta)$ — множество, состоящее из внутренних точек равнобедренного треугольника с вершинами $\alpha\pm il$, $\alpha-l\operatorname{tg}\eta$, где $0<\eta<\frac{\pi}{2}$, $l>0$, α — любое комплекс-

ное число, и внутренних точек основания этого треугольника. P_α — полуплоскость $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$.

В гл. 1 доказывается, что если: 1) $\sigma_c < \infty$; 2) подпоследовательность $\{\lambda_{n_\nu}\}$ измерима с плотностью $\Delta \geqslant 0$ и квазирегулярна; 3) расстояние между последовательностями $\{\lambda_{n_\nu}\}$ и $\{\lambda'_m\}$, где $\{\lambda'_m\}$ — дополнение $\{\lambda_{n_\nu}\}$ по отношению к $\{\lambda_n\}$, положительно и индекс конденсации $\{\lambda'_m\}$ равен нулю, то справедливы следующие утверждения: а) Если $f(s)$ голоморфна в области $P_\alpha \cup T_\alpha(l, \eta)$, где $\operatorname{Re} \alpha = \sigma_H$, а $l > \pi\Delta$, то функция $\Psi(s) = \sum a_n C(e_n)\, d^{-s\lambda_n}$ голоморфна в области $P_\alpha \cup T_\alpha(l - \pi\Delta\eta)$ (это утверждение содержится в известном обобщении В. Бернштейна теоремы Крамера-Пойа, но высказано в иной форме); б) Всякая точка α прямой $\operatorname{Re} s = \sigma_H$, являющаяся центром интервала длины $2l > 0$, на котором $f(s)$ голоморфна, является центром интервала длины $2(l - \pi\Delta)$, на котором голоморфна $\Psi(s)$, если $l > \pi\Delta$; в) Если $\Delta = 0$, то всякая полуизолированная особая точка функции $f(s)$ на прямой $\operatorname{Re} s = \sigma_H$ является особой для $\Psi(s)$ (особая точка полуизолирована, если она является концом интервала, принадлежащего прямой $\operatorname{Re} s = \sigma_H$, на котором $f(s)$ голоморфна).

В гл. 2 доказываются теоремы о влиянии последовательности $\{a_n\}$ на особенности $f(s)$. Предполагается всюду, что $\sigma_c < \infty$, последовательность $\{\lambda_n\}$ регулярна и измерима с плотностью $D > 0$; $\{\lambda_{n_\nu}\} \subset \{\lambda_n\}$, причем подпоследовательность $\{\lambda_{n_\nu}\}$ измерима и имеет плотность $\Delta \geqslant 0$. При этих условиях доказываются следующие утверждения: а) Если последовательность $\{a'_m\}$, дополнительная к $\{a_{n_\nu}\}$, удовлетворяет при достаточно большом m условию $|\arg a'_m| < \tau \left(0 < \tau < \frac{\pi}{2}\right)$, и изменение знака величины $C(\lambda'_m)$ происходит при переходе от индекса m_ν к индексу $m_\nu + 1$, причем D_μ — максимальная плотность последовательности $\left\{\mu_\nu = \frac{1}{2}\left(\lambda'_{m_\nu} + \lambda_{m_\nu+1}\right)\right\}$, то в любом интервале $|\operatorname{Im} s| > \pi(\Delta + D_\mu)$ прямой $\operatorname{Re} s = \sigma_H$ имеется по крайней мере одна особая точка $f(s)$; б) Если, кроме того, последовательность $\{\mu_\nu\}$ измерима, то всякий интервал $|\operatorname{Im} s| > 2\pi\Delta$ прямой $\operatorname{Re} s = \sigma_H$ содержит по крайней мере одну особую точку $f(s)$; в) Если в тех же условиях $\Delta = 0$, то точка $s = \sigma_H$ — особая для $f(s)$; г) Если при достаточно большом m либо $|\arg a'_m| < \tau$, либо $\pi - \tau < \arg a'_m < \pi + \tau$ $\left(0 < \tau < \frac{\pi}{2}\right)$ и изменение знака величины $\operatorname{Re}\left[a'_m C\left(\lambda'_m\right)\right]$ происходит при переходе от индекса m_ν к индексу $m_\nu + 1$, то утверждение а) также имеет место. Г. Л. Лунц

8739. О многочленах ортогональных по гладкому контуру с дифференцируемым весом. С у е т и н П. К., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 3, 498—501

Рассматривается ограниченная односвязная область G с гладкой границей Γ, $w = \Phi(z)$ отображает дополнительную область G_∞ на $|w| > 1$ так, что $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$; $z = \Psi(w)$ — обратная функция. На Γ задана весовая функция $n(z) > 0$, которая имеет p-ую производную, удовлетворяющую условию Липшица с показателем $\alpha < 1$.

Степень гладкости Γ подчиняется дополнительному условию $\Psi^{(p+1)}(w) \in H_1$ в области $|w| > 1$. $P_n(z)$ — система ортогональных на Γ полиномов с весом $n(z)$. Доказывается для всякого замкнутого множества $F \subset G$ оценка

$$|P_n(z)| < \frac{C(F)}{n^{p+\varepsilon}}, \quad z \in F.$$

Устанавливаются асимптотические формулы

$$P_n(z) = q(z)\,[\Phi(z)]^n \left[1 + O\left(\frac{1}{n^{p+\varepsilon}}\right)\right], \qquad z \in F \subset G_\infty$$

(F — замкнутое ограниченное множество),

$$P_n(z) = q(z)\,[\Phi(z)]^n \left[1 + O\left(\frac{\sqrt{n}}{n^{p+\varepsilon}}\right)\right], \quad z \in \Gamma.$$

Функция $q(z) = q[\Psi(w)] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^{-k}$ строится специальным образом по $n(z)$ и $\Psi(w)$.

При указанных условиях для $n(z)$ и Γ всякая функция $f(z)$, аналитическая в области G, у которой примитивная p-го порядка представима интегралом Коши через свои угловые граничные значения, разлагается в ряд по ортогональным полиномам, сходящийся равномерно внутри G. С. Я. Альпер

8740. О конформных отображениях, преобразующих некоторые функции области в элементарные. I. Г р у н с к и й (Über konforme Abbildungen, die gewisse Gebietsfunktionen in elementare Funktionen transformieren. I. G r u n s k y H e l m u t), Math. Z., 1957, 67, № 2, 129—132 (нем.)

Пусть $\mathfrak{Z}$ — n-связная однолистная область z-плоскости, содержащая точку $z = \infty$, с границей $Z = \bigcup_{\nu=1}^{n} Z_\nu$, где Z_ν — аналитические замкнутые жордановы кривые. Пусть, далее, $z_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots k)$ есть система точек области $\mathfrak{Z}$, отличных от ∞, а $\alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots k)$ и c_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots n)$ — две системы вещественных чисел. Обозначим через $g(z, z_\varkappa)$ функцию Грина области $\mathfrak{Z}$, обращающуюся в ∞ в точке $z = z_\varkappa$, а через $h_\nu(z)$ — гармоническую меру компоненты Z_ν границы Z области $\mathfrak{Z}$; затем полагаем

$$g(z) = \sum_{\varkappa=1}^{k} \alpha_\varkappa g(z, z_\varkappa) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu h_\nu(z).$$

Константы $\alpha_\varkappa$, $z_\varkappa$, c_ν подчиняются единственному условию, чтобы нормальная производная $\frac{\partial g(z)}{\partial n}$ по внешней относительно $\mathfrak{Z}$ нормали к Z сохраняла свой знак на каждой компоненте Z_ν (не обязательно один и тот же на различных компонентах). Справедлива следующая

Т е о р е м а 1. Существует одно и только одно конформное отображение $w = F(z)$ области $\mathfrak{Z}$, нормированное в окрестности точки $z = \infty$ разложением $F(z) = z + O\left(\frac{1}{z}\right)$, и такое, что функция $g(z)$ преобразуется в $\tilde{g}(w) = \ln|S(w)|$, где

$$S(w) = A \prod_{\varkappa=1}^{k} (w - w_\varkappa)^{-\alpha_\varkappa} \prod_{\nu=1}^{n} (w - b_\nu)^{-\beta_\nu}, \quad A = e^{g^\infty},$$

$$w_\varkappa = F(z_\varkappa), \quad \beta_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{z_\nu} \frac{\partial g}{\partial n}\, ds,$$

причем в каждом компоненте дополнительного к области отображения множества лежит как раз по одной точке b_ν. Из этой теоремы в качестве следствий получаются две теоремы Уолша (РЖМат, 1956, 2147, 4438). В. А. Зморович

8741. О конформных отображениях, преобразующих некоторые функции области в элементарные. II. Грунский (Über konforme Abbildungen, die gewisse Gebietsfunktionen in elementare Funktionen transformieren. II. Grunsky Helmut), Math. Z., 1957, 67, № 3, 223—228 (нем.)

Статья является продолжением статьи такого же наименования (реф. 8740) и содержит дальнейшее развитие указанного там метода, позволяющего доказать некоторые теоремы, в частности, установленные ранее другими авторами. Из двух теорем, по-видимому, являющихся новыми, приводим формулировку теоремы 4: Каждая однолистная область конечного порядка связности $n>1$ без вырождающихся в отдельные точки компонент границы может быть взаимно однозначно и конформно отображена на ограниченную область, все компоненты границы которой лежат на линиях уровня ($|S(w)|=\text{const}$) некоторой определяемой данной областью рациональной функции степени $\left[\frac{n}{2}\right]$. При нечетном n только одна из этих компонент является разрезом (быть может, разветвленным), при четном n—ни одной. В обоих случаях по крайней мере две компоненты границы области отображения являются простыми замкнутыми кривыми.

В. А. Зморович

8742. К вопросу о расчете момента жесткости при кручении и центра изгиба аэродинамических профилей. Полашек, Шпачек (Příspevek k výpočtu momentu tuhosti v kroucení a střediska smyku lopatkových profilu. Polášek Jan, Špaček Ladislav), Rozpr. ČSAV, 1956, TV66, № 1, 89 s. (чешск.; рез. русск., англ.)

Определяется жесткость на кручение сплошных профилей, контур которых соответствует контуру окружности радиуса $1/2$ при конформном отображении:

$$z=\left(\frac{1+\zeta}{2}\right)^{\alpha}[1+i\beta\zeta],\quad 0<\alpha<1,\quad 0\leqslant\beta<\sqrt{\frac{\alpha}{2+\alpha}}$$

Надлежащим выбором параметров α и β можно подобрать профили, близкие к применяемым в авиации

Ю. Н. Работнов

8743. Обратная задача теории удара. Рогожин В. С., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 36—37

Рассматривается плоская задача об определении контура части тела, соприкасающейся с несжимаемой жидкостью под влиянием вертикального удара, по заданному распределению импульсивных давлений. Показано, что решение состоит из семейства кривых, зависящих от одной вещественной постоянной. Указывается, что предложенным способом можно решить другие задачи теории удара, например, когда ударяющее тело вращается с заданной угловой скоростью ω.

М. Т. Нужин

8744. Определение наименьшего радиуса однолистности для одного класса аналитических функций. Кузьмина Г. В., Докл. АН СССР, 1957, 117, № 5, 751—754

Рассматривается класс $H_1^*(a)$ функций

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k=\left(\sum_{k=0}^{\infty}d_kz^k\right)^2,$$

где функции $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_kz^k$ регулярны в круге $|z|<1$, $\sum_{k=0}^{\infty}|d_k|^2=1$, $|c_1|=2|d_0||d_1|=a$, $(0<a\leqslant 1)$, являющийся подклассом класса H_1 функций с ограниченным средним модулем.

Исследуя разделенную разность

$$K_{2n}(z_1,z_2)=\frac{f_{2n}(z_1)-f_{2n}(z_2)}{z_1-z_2}$$

для полиномов степени $\leqslant 2n$ из этого класса, т. е. всех полиномов, представимых в виде

$$f_{2n}(z)=\sum_{k=0}^{2n}c_kz^k=\left(\sum_{k=0}^{n}d_kz^k\right)^2,$$

$$\sum_{k=0}^{n}|d_k|^2=1,\quad |c_1|=2|d_0||d_1|=a,$$

и переходя затем к пределу при $n\to\infty$, автор доказывает следующее утверждение:

Наименьший радиус однолистности R функций класса $H_1^*(a)$ определяется равенством

$$R=\min\{r^*,r^{**}\},$$

где r^* и r^{**} являются, соответственно, наименьшими положительными корнями уравнений

$$\varphi^*(r)=a^2-2ar+2ar^3-r^4=0$$

и

$$\varphi^{**}(r)=a^2-(4-a^2)r^2+3r^4-r^6=0.$$

Если $R=r^*$, то экстремальной функцией является

$$f^*(z)=\frac{e^{2i\alpha_0}}{2r^*(a-ar^{*2}+r^{*3})}\times$$

$$\times\left[\frac{ar^*-(a+r^*)\,e^{i\alpha}z+r^{*2}e^{2i\alpha}z^2}{1-r^*e^{i\alpha}z}\right]^2,$$

где α_0 и α — произвольные вещественные числа. Если $R=r^{**}$, то экстремальной функцией является

$$f^{**}(z)=\frac{1}{2r^{**2}(4-3r^{**2}+r^{**4})}\times$$

$$\times\left[a(1+r^{**2})\,e^{i\alpha_0}+\right.$$

$$\left.+e^{i\alpha_1}\frac{r^{**2}(4-3r^{**2}+r^{**4})z-2(1+r^{**2})\times}{\times r^{**}e^{i\alpha}z^2+(1+r^{**2})\,r^{**2}e^{2i\alpha}z^3}{(1-r^{**}e^{i\alpha}z)^2}\right]^2,$$

где α_0, α_1 и α — произвольные вещественные числа. Указанные функции имеют на $|z|=r^*$ и $|z|=r^{**}$, соответственно, нули производных.

С. А. Касьянюк

8745. О границах выпуклости и звездообразности для функций, однолистных и регулярных в круге. Александров И. А., Докл. АН СССР, 1957, 116, № 6, 903—905

Рассматриваются регулярные однолистные в круге $|w|<1$ функции $z=f(w)$, нормированные условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$ (класс S). Все результаты получены с помощью леммы, доказываемой вариационным методом.

Лемма. Областью значений выражения

$$I=\ln\frac{(w-\omega)\,f'(w)}{f(w)-f(\zeta)}$$

(w, ω, ζ фиксированы и принадлежат кругу $|w|<1$) в классе S является круг радиуса

$$\ln\frac{|1-\zeta\bar{w}|+|w-\zeta|}{|1-\zeta\bar{w}|-|w-\zeta|}$$

с центром в точке

$$\ln \frac{(1-|\zeta|^2)(w-\omega)}{(1-w\bar{\zeta})(w-\zeta)}.$$

Большая часть результатов относится к исследованию «центров звездности» (Robertson M. S., Duke Math. J., 1945, 12, № 4, 669—684).

Например, теорема 2: Всякий неевклидовый круг с центром в точке ζ, $|\zeta|<1$, неевклидовый радиус которого не более $\frac{\pi}{2}$, отображается любой функцией класса S на область, звездную относительно $f(\zeta)$. Оценка точная.

Наконец, на основании того факта, что областью значений выражения

$$I_1=\frac{(w-\omega)f''(w)}{f'(w)},$$

где w и ω — фиксированные точки из круга $|w|<1$, а $f(z)\in S$ является внутренностью круга радиуса $\frac{4|w-\omega|}{1-|w|^2}$ с центром в точке $\frac{2(w-\omega)|w|^2}{w(1-|w|^2)}$, доказывается теорема, обобщающая известный результат Р. Неванлинны о радиусе выпуклости для однолистных функций (теорема 1): Круг с центром в точке ω, $|\omega|<1$, радиуса $\rho\leqslant R_k$, $R_k=2-\sqrt{3+|\omega|^2}$, любой функцией $f(w)\in S$ отображается на выпуклую область. Оценка точная. С. А. Касьянюк

8746. Об отрезках однолистных функций. Дан Суи-шэн, Шусюэ цзиньчжань, 1957, 3, № 3, 468—477 (кит.)

Пусть $f_k(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(k)}z^{nk+1}$, $|f_k(z)|<M$, — регулярная и однолистная в круге $|z|<1$ функция и пусть функции $\Theta_n^k(z)=z+\sum_{\nu=1}^{n-1}a_\nu^{(k)}z^{\nu k+1}$ однолистны в круге $|z|<r_n^{(k)}$, причем $r_n^{(k)}$ нельзя заменить большим числом. Доказывается:

1) $r_n^{(k)}=\sqrt[k]{\frac{k}{2(k+1)}\frac{M^k}{M^k-1}}$, $n=2,3$.

$$M\geqslant\left(\frac{4k(3k^3+7k^2+5k+1)+\sqrt{\ldots}}{8k^3+5k^2-2k-1}\right)^{1/k},$$

$$\sqrt{\ldots}=\sqrt{16k^2(3k^3+7k^2+5k+1)^2-2k(10k^3+18k^2+11k+2)(8k^3+5k^2-2k-1)}.$$

2) $r_n^{(2)}=\sqrt{\frac{1}{3}\frac{M^2}{M^2-1}}$, $n\geqslant 2$, $M\geqslant 4$.

3) $r_n^{(5)}=\sqrt[5]{\frac{5}{12}}$, $n\neq 4$, $M\to\infty$.

4) $r_n^{(4)}=\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$, $n\geqslant 2$, $M\to\infty$.

5) $r_n^{(4)}>1-\frac{\ln n}{n}$, $n\geqslant 3$, $M\to\infty$.

6) $r_n^{(5)}>1-\frac{4}{5}\frac{\ln n}{n}$, $n\geqslant 13$, $M\to\infty$.

Доказательства основаны на методе параметрического представления однолистных функций, принадлежащем Голузину и Лёвнеру.

Автор отмечает, что результат (4), кроме случая $n=4$, был получен также Чэнь Си-жу (РЖМат, 1957, 3028). Г. В. Корицкий

8747. О некоторых необходимых и достаточных признаках однолистности и ограниченности функций, регулярных в единичном круге. Хажинский, Смялкувна (Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions holomorphes dans le cercle-unité soient univalentes et bornées. Chazyński Z., Smiałkówna H. Bull. Soc. sci. et lettres Łódź, 1957, Cl. 3, 8, № 2, 7 p.) (франц.)

Доказывается теорема: Для того чтобы функция $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$, $a_1>0$, регулярна в круге $|z|<1$, была однолистной и ограниченной ($|f(z)|<1$) в нем, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности комплексных чисел x_p, $p=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, таких, что $-\infty<\sum_{p=-\infty}^{\infty}p|x_p|^2<+\infty$, выполнялось условие $\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty}x_pa_n^{(p)}\right|^2\leqslant\sum_{p=-\infty}^{\infty}p|x_p|^2$, где $a_n^{(p)}$ — коэффициенты рядов $[f(z)]^p=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n^{(p)}z^n$, $p=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

Необходимость условия доказывается при помощи известной, принадлежащей Лёвнеру аппроксимации однолистных и ограниченных функций, регулярных в единичном круге, и при помощи обобщенного соотношения ортогональности коэффициентов

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{|k||l|}}a_n^{(k)}\bar{a}_n^{(l)}=\begin{cases}0, & k\neq l,\\ 1, & k=l,\end{cases}$$

установленного авторами для функций $f(z)$, регулярных, однолистных и ограниченных в круге $|z|<1$ и отображающих его на области, меры Лебега которых равны площади этого круга.

При доказательстве достаточности используется один достаточный признак однолистности, установленный Волибнером (Wolibner W., Colloq. Math., 1951, 2, № 3-4). Г. В. Корицкий

8748. Минимум модуля некоторых целых функций. Барри (The minimum modulus of certain integral functions. Barry P. D.), J. London Math. Soc., 1958, 33, № 1, 73—75 (англ.)

Рассматривается класс целых функций $f(z)=\sum_0^{\infty}a_nz^n$, для которых

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\geqslant\nu^2\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\quad(\nu>1,\ n\geqslant n_0)\qquad(1)$$

(такие функции обладают очень медленным ростом — для них справедлива оценка $\ln|f(z)|<C_f\cdot\ln^2|z|$).

Шах (Shah S. M., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, 52, 1046—1052) заметил, что при $\nu>4$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m_f(r)}{M_f(r)}\geqslant 1-C(\nu),\qquad(2)$$

где $m_f(r)=\min_{|z|=r}|f(z)|$, $M_f(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$;

$C(\nu)$ $(0\leqslant C(\nu)<1)$ зависит только от ν. В реферируемой заметке с помощью метода Вимана-Валирона показано, что наименьшая из допустимых в (2) констант $C(\nu)$ равная $4\nu^{-1}+o(\nu^{-1})$ $(\nu\to\infty)$.

Примечание референта. Доказательство проходит уже в предположении, что (1) выполняется лишь для некоторой бесконечной последовательности натуральных чисел, в частности, если вместо (1) предположить, что $\lim_{r\to\infty} \ln M_f(r)/(\ln r)^2 \leqslant \frac{1}{4\ln\nu}$.

И. В. Островский

8749. Функции экспоненциального типа. Стейн (Functions of exponential type. Stein E. M.), Ann. Math., 1957, 65, № 3, 582—592 (англ.)

Пусть $B_\sigma(L_p)$ есть класс всех целых функций $f(x)$ степени $\leqslant\sigma$, для которых

$$\|f\|_{L_p} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right\}^{1/p} < \infty \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

В классах B (L_∞) автор рассматривает операторы T, перестановочные с операцией сдвига и такие, что $\|T(f)\|_\infty \leqslant A\,\|f\|_\infty$, где A_σ — некоторая константа, зависящая только от σ. Устанавливается, что если T и S — два оператора, обладающие этими свойствами, и $\|T(f)\|_\infty \leqslant \lambda_\sigma \|S(f)\|_\infty$, для всех $f \in B_\sigma(L_\infty)$, то $\|T(f)\|_p \leqslant \lambda_\sigma \|S(f)\|_p$, каким бы ни было $p \geqslant 1$. В том случае, когда равенство $|T(f(x_0))| = \lambda_\sigma \|S(f)\|_\infty$ в некоторой точке x_0, возможно лишь для функции $f(z) = ae^{i\gamma z} + be^{-i\gamma z}$ равенство $\|T(f)\|_p = \lambda_\sigma \|S(f)\|_p$, при $f \in B_\sigma(L_p)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ возможно лишь для функции $f(z) \equiv 0$.

Кроме этого результата, представляющего собой обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производной целой функции экспоненциального типа (Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 1947), в работе дано также обобщение на метрику L_p неравенства А. Н. Колмогорова (Колмогоров А. Н., Уч. зап. МГУ, 1939 вып. 30).

Пусть функция $f(x)$ и ее производные $f'(x), \ldots, \ldots, f^{(n-1)}(x)$ непрерывны на $(-\infty, \infty)$. Если $f^{(n-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, $\|f^{(r)}(x)\|_p < \infty$, $r = 1, 2, \ldots, \ldots, n$, $\|f\|_p < \infty$, то при любом k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ справедливо неравенство

$$\|f^{(k)}(x)\|_p^n \leqslant C_{k,n} \|f(x)\|_p^{n-k} \|f^{(n)}(x)\|_p^k,$$

в котором $C_{k,n}$ — те же константы, что и в неравенстве А. Н. Колмогорова.

В третьей части работы, посвященной одному обобщению теоремы Винера—Палей на случай функций многих переменных, рассматриваются функции, преобразование Фурье которых обращается в нуль за пределами данного компактного выпуклого множества, симметричного относительно начала координат (в связи с этим см. также Plancherel M., Polya G., Comment. math. helv., 1937, 9, 224—248).

Примечание референта. Некоторые предложения, доказываемые в статье, были известны ранее. По поводу леммы 2 см. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 1947, стр. 218. По поводу леммы 3 см. Никольский С. М., Тр. матем. ин-та АН СССР, 1951, 38.

А. Ф. Тиман

8750. Об исключительных значениях целых и мероморфных функций. Ахмад (On exceptional values of entire and meromorphic functions. Ahmad Mansoor), Compositio math., 1957, 13, № 2, 150—158 (англ.)

Обозначим $l_k x$ k-ю итерацию $\ln x$, $e_k(x)$ — k-ю итерацию e^x. k-м порядком мероморфной в $|z| < \infty$ функции $f(z)$ называется $\rho_k = \overline{\lim}_{r\to\infty} l_k T(r, f)/\ln r$; если заменить $\overline{\lim}$ на $\underline{\lim}$, получим нижний k-й порядок λ_k. Пусть $k(r) > 0$ — неубывающая целочисленная функция. Если существует фиксированные положительные числа A, α, β, H такие, что $T(r, f) < A + \beta e_{k(\alpha r)-1}(\alpha r)^H$ для всех r, то $f(z)$ принадлежит $k(r)$-классу; $f(z)$ не принадлежит $k(r)$-классу, если для всяких α, β, H существует r_0 такое, что $T(r, f) > \beta e_{k(\alpha r)-1}(\alpha r)^H$ для всех $r > r_0$. (Терминология неудачна, так как отрицание принадлежности k-классу не дает непринадлежность k-классу; мы будем говорить: $f(z)$ выше k-класса. *Реф.*).

Типичные результаты.

Теорема 1, 5. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \leqslant \infty$, тогда $\underline{\lim}_{r\to\infty} T(r, f)/n(r, 0, f - f_1) \leqslant 2/\rho$ для каждой целой функции $f_1(z)$, с одним возможным исключением, если выполняется одно из следующих условий: 1) $0 < \rho < \infty$ и порядок $f_1(z) \leqslant \rho$; 2) для $f(z)$ $\rho_k < \infty$, $\lambda_{k-1} = \infty$, для $f_1(z)$ $\rho_{k-1} < \infty$; 3) $f(z)$ принадлежит k-классу, но выше $k-1$-класса, $f_1(z)$ принадлежит $k-1$-классу. Если $f(z)$, $f_1(z)$ мероморфны, то $2/\rho$ заменяется на $3/\rho$ и возможны два исключения.

Теоремы 2, 6, 7. Пусть $n'(r, \alpha)$ означает число простых α-точек $f(z)$ в $|z| \leqslant r$, $\sigma = \sum_a \delta(a, f)$ — сумма всех неванлинновских дефектов $f(z)$. Пусть $f(z)$ удовлетворяет одному из трех условий теоремы 1. Тогда, если $f(z)$-целая функция, то $\underline{\lim}_{r\to\infty} T(r)/n'(r, \alpha) \leqslant 3/(\rho\sigma)$ для всех конечных α с двумя возможными исключениями и $\leqslant 2/[\rho(\sigma-1)]$ с одним возможным исключением, если дополнительно предположить, что $\sigma > 1$. Если $f(z)$ мероморфна и $\sigma > 1$, то

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} T(r)/n'(r, \alpha) \leqslant 3/[\rho(\sigma-1)]$$

для всех α с двумя возможными исключениями.

Имеются опечатки и неточности.

Примечание референта. Результаты автора, относящиеся к функциям конечного порядка, почти полностью содержатся в теоремах Шаха (РЖМат, 1958, 3678), статья которого вышла в свет, когда реферируемая статья находилась еще в редакции.

А. А. Гольдберг

8751. О целых функциях бесконечного порядка. Ахмад (On entire functions of infinite order. Ahmad Mansoor), Compositio math., (1957), 13, № 2, 159—172 (англ.)

Обозначения см. в реф. 8750. Доказывается ряд теорем, обобщающих результаты автора (реф. 8750), Шаха и Линделёфа, которые формулируются с помощью k-го порядка. Типичные результаты:

Теорема 3, 5. Если $f(z)$ — мероморфная функция конечного k_1-го порядка и бесконечного $k_1 - 1$-го нижнего порядка, то

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} \{T(r) \cdot l_1 T(r) \ldots l_{k-1} T(r)\}/n(r, 0, f - f_1) \leqslant 3/\rho_k$$

для каждой мероморфной функции $f_1(z)$ конечного $k_1 - 1$-го порядка с двумя возможными исключениями. Если $f(z)$ и $f_1(z)$ — целые функции, то $3/\rho_k$ заменяется на $2/\rho_k$ и возможно только одно исключение.

Теорема 2. Пусть $M(r)$ — максимум модуля и $\nu(r)$ — центральный индекс при $|z| = r$ целой функции $f(z)$, у которой $\rho_k < \infty$, $\lambda_{k-1} = \infty$. Тогда

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} \{l_1 M(r) \cdot l_2 M(r) \ldots l_k M(r)\}/\nu(r) \leqslant 1/\rho_k.$$

Теорема 6. Если каноническое произведение $P(z) = \prod E_k(z/z_n, [\ln n])$ имеет конечный k-й порядок,

$$\overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{l_{k-1} n(r, 0)}{r^{\rho_k}} \leqslant \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{l_k M(r)}{r^{\rho_k}} \leqslant$$

$$\leqslant A\,\overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{l_{k-1} n(r, 0)}{r^{\rho_k}},$$

где A — абсолютная постоянная.

А. А. Гольдберг

8752. О направлениях Бореля мероморфных функций бесконечного порядка. **Пу Бао-мин** (Pu P. M.), Сычуань дасюэ сюэбао. Цзыжань кэсюэ, Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1957, № 1, 41—60 (кит.; рез. англ.)

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция бесконечного порядка. Ее бесконечным порядком по Блюменталю (Hiong King—Lai, J. math. pures et appl., 1935, 14, 233—308) называется такая непрерывная неубывающая функция $\rho(r)$, что для $U(r)=r^{\rho(r)}$ выполняются следующие условия: 1) $T(r, f)\leqslant U(r)$, причем для $r=r_n\to\infty$ имеет место равенство; 2) $U[r(1+\ln^{-1}U(r))]<U(r)^{1+\eta(r)}$, $r>r_0$, $\eta(r)\to 0$ при $r\to\infty$. Пусть $H(\lambda, f)$ — семейство мероморфных функций такое, что если $\varphi\in H(\lambda, f)$, то $T(r, \varphi)<[U(r)]^{\lambda}$, $0<\lambda<1$. Обозначим $n(r, \varphi)$ ($\bar n(r, \varphi)$, $n_3(r, \varphi)$) число нулей $f-\varphi$ (соответственно нулей без учета кратности, нулей порядка $\leqslant 3$) в $|z|\leqslant r$. Если нули рассматриваются в секторе $|\arg z-\theta|<\varepsilon$, $|z|\leqslant r$, то будем иметь $n(r, \varphi; \theta, \varepsilon)$ и т. д. Пусть

$$\bar k(\theta, \varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln \bar n(r, \varphi; \theta, \varepsilon)}{\ln U(r)},$$

аналогично определяется $k_3(\theta, \varphi)$.

Основные результаты статьи.

Теорема 2. $\overline{\lim}_{r\to\infty}\ln \bar n(r, \varphi)/\ln U(r)=1$ для всех $\varphi\in H(\lambda, f)$ с двумя возможными исключениями.

Теорема 3. Если $0<\lambda<\bar k(\theta)=\sup \bar k(\theta, \varphi)$ по всем $\varphi\in H(\lambda, f)$, то $\bar k(\theta, \varphi)=\bar k(\theta)$ для всех $\varphi\in H(\lambda, f)$ с двумя возможными исключениями.

Теорема 4. Существует θ_0 такое, что $\bar k(\theta_0, \varphi)=1$ для всех $\varphi\in H(\lambda, f)$ с двумя возможными исключениями.

Аналогичные результаты получены для n_3.

Много опечаток.

Автор отмечает в примечании, что ему позднее стало известно, что более общие результаты содержатся в книге Ли Квок-пиня «Теория целых и мероморфных функций». Референту ничего не известно об этой книге, однако укажем на статью Ли Квок-пиня, где были получены весьма близкие результаты (Lee Kwok-Ping, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, sec. I, 1937, 3, 253—286). А. А. Гольдберг

8753. О признаках многообразия Штейна. **Асами** (On the conditions of a Stein variety. Asami Takeo), Osaka Math. J., 1957, 9, № 2, 215—219 (англ.)

Пусть V — аналитическое пространство. Положительно определенной функцией Леви автор называет полунепрерывную сверху функцию φ на V, принимающую вещественные значения или $-\infty$ и удовлетворяющую следующему условию. Для каждой точки $P\in V$ существует такая окрестность U и такая функция $f(Q, t)$, аналитическая по $Q\in U$ и непрерывная по $t\in[0, 1]$, что если σ_t — поверхность $f(Q, t)=0$ в U, то $P\in\sigma_0$ и для всякой точки $Q\in\sigma_0$ ($Q\neq P$) или $Q\in\sigma_t$ ($t\neq 0$) выполнено неравенство $\varphi(Q)>\varphi(P)$. Доказывается, что пространство V является многообразием Штейна (по поводу определений см. РЖМат, 1956, 6543) тогда и только тогда, когда оно голоморфно выпукло и на нем существует положительно определенная функция Леви. А. Л. Онищик

8754. Об аффинном интеграле аналитической функции 2 n переменных. **Фантаппье** (Sull'integrale affine di una funzione analitica di due $n$uple di variabili. Fantappiè Luigi), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 20, № 5, 539—547 (итал.)

Выводятся некоторые интегральные свойства аналитических функций многих комплексных переменных и аналитических линейных функционалов от этих функций. Пусть $q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t_1, \ldots, t_n)$ — аналитическая функция, регулярная в областях

$$Q\equiv(|\alpha_1|\leqslant\rho_1, \ldots, |\alpha_n|\leqslant\rho_n);$$

$$Q'\equiv\left(|t_1|\leqslant\frac{1}{\rho_1}, \ldots, |t_n|\leqslant\frac{1}{\rho_n}\right)$$

и разлагаемая в области $Q\times Q'$ в ряд:

$$q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t_1, \ldots, t_n)=$$

$$=\sum_0^\infty{}_{r_1\ldots r_n s_1\ldots s_n} q^{r_1\ldots r_n r_1}_{s_1\ldots s_n s_n}\alpha_1^{r_1}\ldots\alpha_n^{r_n}\cdot t_1^{s_1}\ldots t_n^{s_n}. \quad (1)$$

Аффинным интегралом порядка n от функции q называется интеграл

$$\overset{\Delta}{\int} q\,d\alpha\equiv\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_1}d\alpha_1\ldots\int_{C_n}d\alpha_n\int_{\Omega}\frac{q\,d\omega}{\alpha_1\ldots\alpha_n},$$

где

$$q=q\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, -\frac{\tau_1}{\alpha_1}, \frac{\tau_1-\tau_2}{\alpha_2}, \ldots, \frac{\tau_{n-1}-1}{\alpha_n}\right),$$

C_k — окружность: $|\alpha_k|=\rho_k$ ($k=1, \ldots, n$), Ω есть область вида: $(0\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\ldots\leqslant\tau_{n-1}\leqslant 1)$, $d\omega=d\tau_1\ldots d\tau_{n-1}$. Проективным следом функции $q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t_1, \ldots, t_n)$ называется выражение (если определять этот след с помощью ряда (1)):

$$\overset{\Delta}{T}q=\sum_0^\infty{}_{r_1\ldots r_n}\left(\frac{(-1)^r r_1!\ldots r_n!}{r!}\right)q^{r_1\ldots r_n}_{r_1\ldots r_n}$$

$$(r=r_1+\ldots+r_n)$$

(даются и интегральные выражения этого следа).

Проективный след произведения двух аналитических функций: $p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $y(t_1, \ldots, t_n)$ обозначается $p\nabla y$ и называется функционально-проективным произведением этих функций. Основные результаты:

1) $\overset{\Delta}{\int} q\,d\alpha=\sum_0^\infty{}_{r_1\ldots r_n}\left(\frac{(-1)^r r_1!\ldots r_n!}{(r+n-1)!}\right)q^{r_1\ldots r_n}_{r_1\ldots r_n}$.

2) Всякий линейный аналитический функционал $F[y]$ есть $p\nabla y$, где

$$p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=F\left[\frac{1}{1+\alpha_1 t_1+\ldots+\alpha_n t_n}\right],$$

если функции p и y регулярны соответственно в областях Q и Q'. Формулировку остальных результатов мы не имеем возможности привести ввиду большого количества специальных терминов и формул.

В. С. Федоров

8755. Об одном классе обратимых операторов в кольце аналитических функций. **Евграфов М. А., Соловьев А. Д.**, Докл. АН СССР, 1957, 114, № 6, 1153—1154

Авторы переносят на пространство K_m функции многих комплексных переменных, аналитических в кольцевой бицилиндрической области $r_i<|z_i|<R_i$, $i=1, 2, \ldots m$, теорему, ранее доказанную М. А. Евграфовым для функций одного переменного, аналитических в круге $|z|<R$. Именно, формулируется теорема:

Пусть A — линейный оператор в K_m, определяемый равенствами

$$Az_1^{n_1}z_2^{n_2}\dots z_m^{n_m}=z_1^{n_1}\dots z_m^{n_m}\varepsilon_{n_1,\dots,n_m}(z_1,\dots,z_m),$$

$$-\infty<n_1,\dots,n_m<\infty,$$

где $\varepsilon_{n_1,\dots,n_m}(z_1,\dots,z_m)\to 0$ при $\max_i|n_i|\to\infty$, равномерно во всякой замкнутой части бицилиндрической области. Тогда для оператора $E+\lambda A$ имеют место теоремы Фредгольма.

Эту теорему авторы обобщают, беря функцию $\varepsilon_{n_1,\dots,n_m}(z_1,\dots,z_m,\lambda)$, зависящую от λ, и предполагая, что она целая по λ и стремится к нулю: 1) при $\max_i|n_i|\to\infty$ равномерно по λ в любом конечном круге; 2) при $\lambda\to 0$ и фиксированных $n_1, n_2, \dots, n_m$. В другом обобщении, теоремы Фредгольма устанавливаются для оператора B_λ, определяемого равенствами

$B_\lambda z_1^{n_1},\dots,z_m^{n_m}=z_1^{n_1},\dots,z_m^{n_m}h_{n_1,\dots,n_m}(z_1,\dots,z_m,\lambda)$, $-\infty<n_1,\dots,n_m<\infty$, где h — целые аналитические функции λ, удовлетворяющие условиям $h\neq 0$ при $r_i(1+\varepsilon)<|z_i|<R_i(1-\varepsilon)$ для $\max_i|n_i|>n_0$

$$\lim_{\max_i|n_i|\to\infty}\frac{h_{n_1+k_1,\dots,n_m+k_m}}{h_{n_1,\dots,n_m}}=1$$

равномерно по λ в любом конечном круге при фиксированных $k_1, \dots, k_m$ и

$$\lim_{\lambda\to 0}h_{n_1,\dots,n_m}=1$$

при фиксированных $n_1, \dots, n_m$.

Доказательства не приводятся. М. Г. Хапланов

8756. Обобщение одной теоремы о полноте. Еремин С. А., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1957, вып. 7, (а), 87—90

Референтом доказано, что если $\varphi(z)$ — аналитическая функция в полосе $-\pi\leqslant\operatorname{Im}(z)\leqslant\pi$, 2π-периодическая и все коэффициенты Фурье этой функции отличны от нуля, то множество производных $\{\varphi^{(k)}(z)\}$ полно в круге $|z|<\pi$ (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1947, 11, 75—100).

Автор настоящей заметки показал (РЖМат, 1957, 1352), что упомянутое утверждение остается в силе для множества производных функций двух переменных $\varphi(z, w)$ аналитической и 2π-периодической по каждому переменному. При этом не потребовалось преодоления каких-либо трудностей.

В настоящей заметке доказывается, что последнее утверждение автора остается в силе, если аналитическая функция $\varphi(z, w)$ 2π-периодическая по z и 2β-периодическая по w, что является очевидным фактом.

И. И. Ибрагимов

8757. Асимптотические места целых и мероморфных функций. Хейнс (Asymptotic spots of entire and meromorphic functions. Heins Maurice), Ann. Math., 1957, 66, № 3, 430—439 (англ.)

Основные результаты статьи были анонсированы в заметке РЖМат, 1957, 6305. Из остальных результатов отметим построение примера целой функции с бесконечным гармоническим индексом в асимптотическом месте, лежащем над конечной точкой, а также примера целой функции, у римановой поверхности которой множество проекций прямо критических точек совпадает с наперед заданным счетным множеством.

А. А. Гольдберг

8758. Структура множества точек, служащих образами точек неопределенности при мероморфном отображении. Тимм (Die Struktur der Menge der singulären Bildpunkte einer meromorphen Abbildung. Thimm Walter), Math. Ann., 1957, 134, № 2, 143—153 (нем.)

Ранее автором было доказано (РЖМат, 1953, 706), что множество образов точки неопределенности ξ мероморфного отображения есть алгебраическое многообразие $M(\xi)$.

Основная теорема реферируемой работы устанавливает зависимость алгебраического многообразия $M(\xi)$ от точки ξ. Оказывается, что множество точек неопределенности можно так подразделить на множества β_p, что пока ξ изменяется в β_p, коэффициенты алгебраических уравнений, определяющих $M(\xi)$, будут такими голоморфными функциями от ξ, что алгебраические многообразия $M(\xi)$ будут иметь постоянную размерность.

При доказательстве используются результаты автора о компактных аналитических 0-множествах (РЖМат, 1956, 5213).

А. В. Лебедев

8759. Наложения голоморфно полных комплексных пространств. Штейн (Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume. Stein Karl), Arch. Math., 1956, 7, № 5, 354—361 (нем.)

Пусть Φ — голоморфное отображение комплексного пространства $\hat{X}$ на комплексное пространство X. Тройка $(\hat{X}, \Phi, X)$ называется неразветвленным наложением пространства X, если каждая точка $p\in X$ обладает окрестностью U, для которой $\Phi^{-1}(U)$ состоит из компонент V_j (здесь $j\in J$, где J — некоторое множество индексов), каждая из которых гомеоморфна U.

Доказываются теоремы: 1) Пусть X — голоморфно полное пространство, $(\hat{X}, \Phi, X)$ — его неразветвленное наложение. Тогда комплексное пространство $\hat{X}$ голоморфно полно.

Компактное подмножество P комплексного пространства X называется аналитическим полиэдром, если существуют такая его окрестность $U(P)$ и конечное множество голоморфных в X функций $f_1, \dots, f_k$, что $P=U(P)\cap\{|f_1|\leqslant 1,\dots|f_k|\leqslant 1\}$. 2) Если P — аналитический полиэдр в голоморфно полном пространстве X, то всякая функция, голоморфная в P, может быть равномерно аппроксимирована внутри P функциями, голоморфными в X.

Для случая, когда пространство X состоит из не более чем счетного множества связных компонент, более общий результат, содержащий эту теорему, получен Грауэртом (реф. 8760).

Б. А. Фукс

8760. Обобщение одной теоремы Рунге с применениями к теории расслоенных комплексных пространств. Грауэрт (Généralisation d'un théorème de Runge et application à la théorie des espaces fibrés analytiques. Grauert Hans). C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 5, 603—605 (франц.)

В заметке анонсирован ряд теорем, относящихся к аппроксимации голоморфных функций, заданных на комплексных пространствах со значениями, лежащими в других комплексных пространствах. Эти теоремы, вместе с их доказательствами, содержатся, наряду с другими результатами, в последующих работах автора (реф. 8761, 8762).

Б. А. Фукс

8761. Теоремы об аппроксимациях голоморфных функций со значениями в комплексных пространствах. Грауэрт (Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Räumen. Grauert Hans), Math. Ann., 1957, 133, № 2, 139—159 (нем.)

Голоморфная функция, определенная на комплексном пространстве $\mathfrak{R}$ со значениями в комплексном пространстве $\mathfrak{M}$ — это голоморфное отображение $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{M}$. Предполагается, что все рассматриваемые комплексные пространства состоят из не более чем счетного множества связных компонент и атласы покрытий этих пространств состоят из карт (аналитически разветвленных наложений), удовлетворяющих условию локальной голоморфной отделимости (иначе C-условию; определения всех этих понятий см. РЖМат, 1956, 7307, 1957, 8590). В работе указывается, что справедливы:

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{R}$ и $\breve{\mathfrak{R}}$ — голоморфно полные комплексные пространства, причем $\mathfrak{R}$ является подобластью $\breve{\mathfrak{R}}$ и может быть голоморфно расширено на все пространство $\breve{\mathfrak{R}}$. Тогда для всякой функции f, голоморфной в $\mathfrak{R}$, существует равномерно сходящаяся к ней внутри $\mathfrak{R}$ последовательность функций f_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$), голоморфных во всем пространстве $\breve{\mathfrak{R}}$. Если пространство $\mathfrak{R}$ не может быть голоморфно расширено на все пространство $\breve{\mathfrak{R}}$, то существуют функции, голоморфные в $\mathfrak{R}$, которые не могут быть равномерно внутри $\mathfrak{R}$ аппроксимированы функциями, голоморфными в $\breve{\mathfrak{R}}$.

Теорема 2. Голоморфно полное пространство $\mathfrak{R}$ являющееся подобластью голоморфно полного пространства $\breve{\mathfrak{R}}$, может быть на него голоморфно расширено в том и только в том случае, если $\mathfrak{R}$ выпукло по отношению к классу функций, голоморфных в $\breve{\mathfrak{R}}$.

Эти теоремы были ранее получены Виллем для голоморфно полных многообразий (Will H., Dissert. Münster, 1952). Определение голоморфно полного пространства см. РЖМат, 1956, 6543. Голоморфно полное пространство $\mathfrak{R}$, являющееся подобластью голоморфно полного пространства $\breve{\mathfrak{R}}$, может быть на него голоморфно расширено, если возможна такая непрерывная деформация $\mathfrak{R}$ в $\breve{\mathfrak{R}}$, что все получающиеся в процессе этой деформации промежуточные комплексные пространства, оказываются голоморфно выпуклыми.

В работе рассматривается следующая проблема: Пусть голоморфно полное пространство $\mathfrak{R}$ составляет подобласть голоморфно полного пространства $\breve{\mathfrak{R}}$ и может быть на него голоморфно расширено; пусть F — голоморфная в $\mathfrak{R}$ функция со значениями в комплексном пространстве $\mathfrak{M}$. При выполнении каких условий существует равномерно сходящаяся к F внутри $\mathfrak{R}$ последовательность функций F_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) со значениями в $\mathfrak{M}$, голоморфных во всем пространстве $\mathfrak{R}$.

Доказывается, что если $\mathfrak{R}$ — единичный круг, $\breve{\mathfrak{R}}$ — плоскость комплексного переменного z, $\mathfrak{M}$ — риманова поверхность гиперболического типа, то существуют функции F, которые в указанном смысле не могут быть аппроксимированы функциями F_ν. Наоборот, такая аппроксимация возможна, если $\mathfrak{M}$ — риманова поверхность параболического типа, конформно эквивалентная комплексной плоскости $z \neq \infty$. Она также возможна, если $\mathfrak{R}$ и $\breve{\mathfrak{R}}$ — некомпактные римановы поверхности, $\mathfrak{R}$ — односвязная относительно $\breve{\mathfrak{R}}$ и $\mathfrak{M}$ — плоскость комплексного переменного z без точки $z = 0$.

Далее рассматривается случай, когда $\mathfrak{M}$ — аналитически расслоенное комплексное пространство $L(\mathfrak{R}, L^*)$, базой которого служит комплексное пространство $\mathfrak{R}$, слоем — комплексная группа Ли L. Здесь L^* — некоторая комплексная группа Ли автоморфизмов группы L, для которой отображение $(l, l^*) \to l^*(l)$ произведения $L^* \times L$ на Z является голоморфным; тут l и l^* — элементы соответствующих групп, $l^*(l)$ — элемент группы L, отвечающий l в автоморфизме l^*. Одновременно L^* является группой голоморфной совместности карт атласа покрытий пространства $\mathfrak{R}$.

Основной результат работы для этого случая состоит в следующем:

Теорема 11. Пусть $\mathfrak{R}$ и $\breve{\mathfrak{R}}$ — голоморфно полные пространства, причем $\mathfrak{R}$ является подобластью $\breve{\mathfrak{R}}$ и может быть голоморфно расширено на все пространство $\breve{\mathfrak{R}}$. Тогда для всякой функции F, голоморфной в $\mathfrak{R}$ со значениями в пространстве $L(\breve{\mathfrak{R}}, L^*)$ голоморфно гомотопной функции $E(r)$ внутри $\mathfrak{R}$, существует равномерно сходящаяся к ней внутри $\mathfrak{R}$ последовательность функций $\breve{F}_\nu$, голоморфных в $\mathfrak{R}$ со значениями в $L(\breve{\mathfrak{R}}, L^*)$.

Здесь $E(r)$ — «нейтральная» функция, ставящая в соответствие точке r пространства $\breve{\mathfrak{R}}$ пару, состоящую из этой точки и единичного элемента группы L. Голоморфная функция $F(r)$, где $r \in \mathfrak{R}$ со значениями в $L(\breve{\mathfrak{R}}, L^*)$, называется голоморфно (непрерывно) гомотопной $E(r)$ внутри $\mathfrak{R}$, если для каждого компактного подмножества $\mathfrak{R}$ существует функция $F(r, t)$ (где $0 \leqslant t \leqslant 1$; $F(r, 0) = E(r)$; $F(r, 1) = F(r)$) со значениями в $L(\breve{\mathfrak{R}}, L^*)$, непрерывно зависящая от t и голоморфная (непрерывная) для каждого t на этом подмножестве. Приводятся также некоторые более общие предложения.

Часть результатов работы была анонсирована автором (реф. 8762). Б. А. Фукс

8762. Голоморфные функции со значениями в комплексных группах Ли. Грауэрт (Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. Grauert Hans), Math. Ann., 1957, **133**, № 5, 450—472 (нем.)

Работа является продолжением предыдущей (реф. 8761). В числе других, в ней доказываются следующие предложения:

1) Каждая функция $F(r)$, голоморфная в голоморфно полном пространстве $\mathfrak{R}$ со значениями в пространстве $L(\mathfrak{R}, L^*)$, тогда и только тогда голоморфно гомотопна функции $E(r)$, если она непрерывно гомотопна этой функции.

2) Каждая функция $S(r)$, непрерывная в голоморфно полном пространстве $\mathfrak{R}$ со значениями в пространстве $L(\mathfrak{R}, L^*)$, непрерывно гомотопна некоторой функции $F(r)$, голоморфной в пространстве $\mathfrak{R}$ со значениями в пространстве $L(\mathfrak{R}, L^*)$.

3) Пусть $\mathfrak{R}$ и $\overline{\mathfrak{R}}$ — голоморфно полные пространства, причем $\mathfrak{R}$ является подобластью $\overline{\mathfrak{R}}$ и может быть голоморфно расширено на все пространство $\overline{\mathfrak{R}}$. Тогда функция F, голоморфная в $\mathfrak{R}$ со значениями в пространстве $L(\overline{\mathfrak{R}}, L^*)$, в том случае может быть равномерно аппроксимирована внутри $\mathfrak{R}$ функциями, голоморфными в $\overline{\mathfrak{R}}$ со значениями в пространстве $L(\mathfrak{R}, L^*)$, если она может быть равномерно аппроксимирована внутри $\mathfrak{R}$ функциями, непрерывными в $\overline{\mathfrak{R}}$ со значениями в $L(\overline{\mathfrak{R}}, L^*)$. Б. А. Фукс

8763. К теории абелевых модулярных функций. Пятецкий-Шапиро И. И., Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 6, 973—976

Вводится понятие модулярной группы и модулярных функций, соответствующих некоторой алгебре комплексных умножений римановых матриц, и доказывается, что поле модулярных функций является полем алгебраических функций. Точные определения таковы

Рассматривается алгебра $\mathfrak{A}$ квадратных рациональных матриц порядка $2p$, для которой существует такая рациональная кососимметрическая матрица R_0, что $|R_0| \neq 0$ и при $A \in \mathfrak{A}$ $R_0 A' R_0^{-1} \in \mathfrak{A}$. Через $\Omega_{\mathfrak{A} R_0}$ обозначается совокупность таких матриц ω типа $(p, 2p)$, что $\omega R_0 \omega' = 0$, $i\bar{\omega} R_0 \omega' > 0$ и для $A \in \mathfrak{A}$ существует такая квадратная матрица α порядка p, что $\omega A = \alpha\omega$. $\Gamma_{\mathfrak{A}, R_0}$ обозначает группу всех целочисленных унимодулярных матриц, для которых $U' R_0 U = R^0$ и $U' A = A U'$ при $A \in \mathfrak{A}$. $\Gamma_{\mathfrak{A}, R_0}$ называется модулярной группой.

Многообразие $\Omega_{\mathfrak{A}, R_0}$ разбивается на классы эквивалентных матриц (ω_1 и ω эквивалентны, если $\omega_1 = \alpha\omega$, $|\alpha| \neq 0$). Множество классов образует многообразие $K_{\mathfrak{A}, R_0}$, про которое доказывается, что оно является однородной симметрической областью и разлагается на неприводимые области первых трех типов (Зигель, Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, М., стр. 120).

Через $Q(W, c, \mathfrak{A})$ обозначается совокупность $\omega \in \Omega_{\mathfrak{A}, R_0}$, для которых

$$\bar{\omega} S_c \omega' > 0, \quad S_c = W' \begin{pmatrix} 0 & iE \\ -iE & cE \end{pmatrix} W,$$

где W — такая рациональная матрица, что $W' J W = R_0$, $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$.

Аналитическая в $\Omega_{\mathfrak{A}, R_0}$ функция $f(\omega)$ называется модулярной формой веса m, если $f(\alpha\omega) = |\alpha|^{-m} f(\omega)$, $f(\omega U') = f(\omega)$ при $U \in \Gamma_{\mathfrak{A}, R_0}$ и $f(\omega)$ ограничена в любой области $Q(W, c, \mathfrak{A})$.

Модулярной функцией называется отношение двух модулярных форм одного веса. Доказывается, что поле модулярных функций есть поле алгебраических функций от n переменных (n — комплексная размерность $K_{\mathfrak{A}, R_0}$).

И. Р. Шафаревич

8764. Сингулярные модулярные функции. Пятецкий-Шапиро И. И., Изв. АН СССР, Сер. матем., 1956, 20, № 1, 53—98

Кососимметрическая матрица R с рациональными элементами, имеющая порядок $2p$, называется главной матрицей для комплексной матрицы ω типа $(p, 2p)$, если $\omega R \omega' = 0$, $i\bar{\omega} R \omega' > 0$. Автор называет допустимым конусом совокупность рациональных кососимметричных матриц, совпадающую с совокупностью всех главных матриц некоторой матрицы ω. Если N — некоторый допустимый конус, то совокупность всех матриц ω типа $(p, 2p)$, для которых все матрицы из N являются главными, обозначается через Ω_N. Все матрицы из Ω_N разбиваются на классы эквивалентности (ω_1 эквивалентна ω, если $\omega_1 = \alpha\omega$ $|\alpha| \neq 0$), множество которых обозначается через H_N. Через L_N обозначается группа таких унимодулярных целочисленных матриц U, что $U' N U = N$. Преобразование $\omega \to \omega U'$ при $U \in L_N$ определяет некоторое преобразование H_N. Группа этих преобразований обозначается через Γ_N и называется модулярной группой.

Эта схема исследуется для случая, когда N состоит из матриц вида $A(\alpha) R_0$, где R_0 — некоторая невырожденная кососимметрическая рациональная матрица, а $A(\alpha)$ — матрица такого представления $\alpha \to A(\alpha)$ некоторого чисто вещественного поля алгебраических чисел k, что $A(\alpha) R_0 = R_0 A(\alpha)$ и все собственные значения $A(\alpha)$ положительны. Предполагается, что поле k имеет степень n, а порядок матриц A и R равен $2np_0$.

Многообразие H_N является комплексным аналитическим многообразием. В рассматриваемом случае оно изоморфно произведению n обобщенных верхних полуплоскостей Зигеля степени p_0.

Автор исследует фундаментальную область группы Γ_N в многообразии H_N и вводит понятие автоморфной формы относительно Γ_N как регулярной функции на H_N, удовлетворяющей естественному функциональному уравнению и некоторым условиям в точках выхода фундаментальной области на границу H_N (число этих точек равно числу классов идеалов k).

Модулярная функция определяется как отношение модулярных форм одного веса. Основной результат работы заключается в том, что поле модулярных функций изоморфно полю алгебраических функций от $\frac{np_0(p_0+1)}{2}$ неизвестных.

Частными случаями этих результатов являются: при $n=1$ теория модулярных функций Зигеля (Зигель, Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, М., 1954) и при $p_0=1$ результаты Маса (Maaß H., Math. Ann., 1940, 177, № 4, 538—578).

И. Р. Шафаревич

8765. Об одном обобщении понятия моногенных функций. Морев И. А., Матем. сб., 1957, 42, № 2, 197—206

Рассматривается алгебра дуальных чисел: $e_1 = 1$; $e_2 = \omega$ ($(\omega)^2 = 0$). Устанавливаются следующие теоремы.

Теорема 1. Если $\zeta = a^1 + \omega a^2$, где a^1 и a^2 — комплекснозначные функции точки в области D, а функция f моногенная по ζ в области D (РЖМат. 1957, 5523), то

$$f = \varphi\{a^1\} + \omega[\varphi_{a^1} a^2 + H\{a^1\}],$$

причем производная f по ζ равна

$$f_\zeta = \varphi_{a^1} + \omega[\varphi_{a^1 a^1} a^2 + H_{a^1}].$$

Здесь $\varphi\{a^1\}$, $H\{a^1\}$ обозначают голоморфные функции от a^1 в некоторой окрестности каждой точки области D. В теореме 2 устанавливается справедливость предложения, обратного теореме 1. При этом предполагается, что a^1 — функция с непрерывными частными производными первого порядка по $x^1, \ldots, x^n$ в D, a^2 — любая непрерывная функция точки области D. Из доказанной теоремы следует, что всякая f, моногенная по ζ в области D, имеет производные всех порядков по ζ в этой области.

Теорема 3. Для моногенности $f = \varphi + \omega\Phi$ по ζ и η в области D в случае, когда $\zeta = \alpha + \omega\beta$, $\eta = p + \omega q$, $\alpha = x + iy$, $p = z + it$ ($i^2 = -1$; φ, Φ, β, q — обычные непрерывные комплексные функции точки (x, y, z, t) области D), необходимо и достаточно, чтобы f имела вид:

$$f = \varphi\{\alpha, p\} + \omega[\varphi_\alpha \cdot \beta + \varphi_p \cdot q + H\{\alpha, p\}], \qquad (1)$$

где: 1) φ и H — голоморфные функции от α и p в области D; 2) β и q — любые непрерывные функции точки области D (хотя бы и не имеющие производных по x, y, z, t в этой области).

Если $\varphi\{\alpha, p\}$ и $H\{\alpha, p\}$ — аналитические функции двух комплексных переменных α и p в некотором бицилиндре D и β, q — непрерывные функции точки D, то доказывается, что функция (1) есть аналитическая функция в D, как функция переменных ζ и η.

А. А. Темляков

8766. О моногенных функциях Мойсила. Шеерсон М. С., Матем. сб., 1958, 44, № 1, 113—122

Пусть $f=p+a\bar{\varepsilon}$; $\bar{\varepsilon}=i\varepsilon_1+j\varepsilon_2+k\varepsilon_3$; $\bar{\varepsilon}^2=-1$; p, a, ε_1, ε_2, ε_3 — комплексные функции от x, y, z и t с непрерывными частными производными до 2-го порядка включительно в некоторой односвязной четырехмерной области Δ, в которой $a\neq 0$; 1, i, j, k — базис кватернионной алгебры над полем комплексных чисел. Автор называет функцию f моногенной и функционально-инвариантной в области Δ, если: 1) f моногенная в смысле Мойсила в этой области, т. е. удовлетворяет в этой области уравнению

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}\right)f=0 \qquad (1)$$

и если 2) всякая аналитическая функция $A(f)$, регулярная в области Δ, будет моногенной в смысле Мойсила в этой области. При этом аналитическая функция $A(f)$ определяется заданием ее элемента вида $\sum_{k=0}^{\infty}b_k(f-f_0)^k$, где f_0, b_0, b_1, ... — комплексные постоянные, и аналитическими продолжениями этого элемента. Основные результаты:

1. Функция f будет моногенной и функционально-инвариантной в области Δ, если в этой области, кроме уравнения (1), выполнены следующие (необходимые и достаточные) условия:

$$\operatorname{rot}\bar{\varepsilon}+\frac{\partial\bar{\varepsilon}}{\partial t}=0;\quad \operatorname{div}\bar{\varepsilon}=0;\quad \bar{\varepsilon}^2=1, \qquad (2)$$

где $\bar{\varepsilon}$ есть вектор с проекциями ε_1, ε_2 и ε_3 на оси x, y и z соответственно.

2. Всякая действительная векторная функция $\bar{\varepsilon}(x, y, z, t)$, удовлетворяющая в области Δ системе (2), будет постоянной в этой области.

3. При условиях (1) и (2) в области Δ функции p, a, ε_k, $p\varepsilon_k$, $a\varepsilon_k$ $(k=1, 2, 3)$ будут гармоническими в этой области.

4. Пусть $\zeta=\alpha x+\beta y+\gamma z+it$, где постоянные α, β и γ удовлетворяют условиям: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$; $\alpha^2+\beta^2\neq 0$ и где $i^2=-1$, и пусть φ — любая аналитическая функция от ζ, регулярная в области Δ. В таком случае существуют решения системы (2) в области Δ вида:

$$\varepsilon_1=\frac{\cos\varphi}{\operatorname{ch}\psi};\quad \varepsilon_2=\frac{\sin\varphi}{\operatorname{ch}\psi};\quad \varepsilon_3=\operatorname{th}\psi,$$

где $\psi=i\varphi+i\left(\frac{\pi}{2}+\lambda\right)$, а постоянная λ определяется из уравнений:

$$\cos\lambda=-\frac{\beta+\alpha\gamma i}{\alpha^2+\beta^2};\quad \sin\lambda=\frac{\alpha-\beta\gamma i}{\alpha^2+\beta^2}.$$

А также, если положить

$$p=i\frac{d\varphi}{d\zeta};\quad a=\frac{d\varphi}{d\zeta};\quad \bar{\varepsilon}=(\alpha,\ \beta,\ \gamma),$$

то функция $p+a\bar{\varepsilon}$ будет моногенной и функционально-инвариантной в области Δ (условие $\alpha^2+\beta^2\neq 0$ не обязательно).

Имеются опечатки. Так, на стр. 114, 13 строка снизу, вместо b_0 следует поставить f_0. На стр. 117, в формуле (7), вместо $\approx$ следует поставить обычный знак равенства. В. С. Федоров

8767. Регулярные функции в алгебре Клиффорда. Рицца (Funzioni regolari nelle algebre di Clifford. Rizza Giovanni Battista), Rend. mat. e applic., 1956, 15, № 1-2, 53—79 (итал.)

Изучаются гиперкомплексные функции многих действительных переменных, причем значения этих функций — элементы алгебры Клиффорда C_n над полем действительных чисел:

$$C_n=Q^{(1)}\dotplus\ldots\dotplus Q^{(\mu)};\quad \mu=2^{n-2};\quad n\geqslant 2,$$

где $\dotplus$ означает знак прямой суммы; $Q^{(h)}$ $(h=1, \ldots, \mu)$ — известная алгебра кватернионов. База алгебры C_n состоит из 2^{n-2} четверок: $u_0^{(h)}$, $u_1^{(h)}$, $u_2^{(h)}$, $u_3^{(h)}$ $(h=1, \ldots, \mu)$ со следующим законом умножения:

$$u_0^{(h)}\cdot u_r^{(h)}=u_r^{(h)}\cdot u_0^{(h)}=u_r^{(h)};\quad \left(u_0^{(h)}\right)^2=-\left(u_r^{(h)}\right)^2=u_0^{(h)};$$

$$u_r^{(h)}\cdot u_s^{(h)}=-u_s^{(h)}\cdot u_r^{(h)}=u_t^{(h)};\quad u_p^{(h)}\cdot u_q^{(k)}=u_q^{(k)}\cdot u_p^{(h)}=0,$$

где h, $k=1, \ldots, 2^{n-2}$; $h\neq k$; p, $q=0, 1, 2, 3$; (r, s, t) — любая круговая перестановка чисел 1, 2, 3. Пусть $y_h^{(p)}$ — действительные функции класса C^1 действительных переменных x_h^p; $p=0, 1, 2, 3$; $h=1, \ldots, \mu$. Гиперкомплексная функция

$$y=\sum_1^{\mu}y^{(h)}\qquad\left(y^{(h)}=\sum_{p=0}^{3}y_h^pu_p^{(h)}\right)$$

называется регулярной функцией справа гиперкомплексного переменного

$$x=\sum_1^{\mu}x^{(h)}\qquad\left(x^{(h)}=\sum_{p=0}^{3}x_h^pu_p^{(h)}\right),$$

если имеем

$$\sum_{p=0}^{3}\frac{\partial y^{(h)}}{\partial x_h^p}u_p^{(h)}=0;\quad h=1, \ldots, \mu;$$

аналогично определяется регулярная функция слева. Для этих функций доказываются различные интегральные формулы (в том числе многомерный аналог известной интегральной формулы Коши теорий функций комплексного переменного), в которых берутся интегралы по некоторым гиперповерхностям. Формулировку этих результатов трудно привести ввиду их сложности. Библ. 16 назв. В. С. Федоров

8768. Определение моногенности с помощью многомерных ориентированных производных. Рошкулец (Definirea monogeneităţii cu ajutorul derivatelor polidimensionale orientate. Roşculeţ Marcel N.), Bul. Inst. politehn. Bucureşti, 1956, 18, № 1-2, 11—16 (рум.; рез русск., франц.)

Пусть $\omega=x_0+\theta_1x_1+\theta_2x_2$; $f(\omega)=U_0+\theta_1U_1+\theta_2U_2$, где 1, θ_1, θ_2 — база ассоциативной и коммутативной алгебры над полем действительных чисел, U_k $(k=0, 1, 2)$ — действительные функции действительных переменных x_k $(k=0, 1, 2)$.

Берется отношение

$$\frac{a}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)(\omega-\omega_3)},\quad \text{где}$$

$$a=f(\omega)-f(\omega_1)-f(\omega_2)-f(\omega_3)+f(\omega_4)+f(\omega_5)+f(\omega_6)-f(\omega_7) \qquad (1)$$

где ω, ω_k $(k=1, \ldots, 7)$ — значение ω в вершинах параллелепипеда с произвольной ориентацией его трех ребер: $\overline{\omega\omega_1}$, $\overline{\omega\omega_2}$ и $\overline{\omega\omega_3}$ в евклидовом пространстве (x_0, x_1, x_2) (ω_1, ω_2 и ω_3 — ближайшие вершины параллелепипеда к его вершине ω). Рассматривается, вообще, случай достаточно гладкого «криволинейного параллелепипеда», заданного с помощью криволинейных координат u, v, w, и тогда $\omega=u+\theta_1v+\theta_2w$.

Предел отношения (1) при $\omega_k \to \omega\,(k=1, \ldots, 7)$ и при неизменной ориентации параллелепипеда (если таковой предел существует) называется автором ориентированной трехмерной производной функции $f(\omega)$ в данной точке ω. Основной результат:

Существование трехмерной ориентированной производной, не зависящей от ориентации параллелепипеда, функции $f(\omega)$ в каждой точке ω данной области характеризует эту функцию как сумму произвольного квадратного полинома от u, v, w и функции от ω, моногенной в этой области.

Автор замечает, не приводя никаких рассуждений, что этот результат распространяется и на n-мерный случай $n>3$, с соответственной заменой квадратного полинома от u, v, w полиномом степени $(n-1)$ от n криволинейных координат.

Примечание референта. Моногенность функции $f(\omega)$ автор определяет условием:

$$\theta_j \frac{\partial f(\omega)}{\partial x_i} = \theta_i \frac{\partial f(\omega)}{\partial x_j} \quad (i, j=0, 1, 2;\ \theta_0=1)\ (i \neq j),$$

которое есть частный случай общего условия моногенности одной гиперкомплексной функции относительно другой такой функции в многомерном пространстве и для алгебры произвольного ранга, данного впервые референтом (Матем. сб., 1946, **18 (60)**, 353—378, стр. 359). Далее автор неявно ограничивается случаем функции $f(\omega)$, имеющей в данной области непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Библ. 4 назв. Имеются опечатки и неточные формулировки, исправленные в реферате. В. С. Федоров

8769. О полноте систем гармонических функций. Гагуа М. Б., Сообщ. АН ГрузССР, 1957, **19**, № 1, 3—10

Устанавливается ряд результатов, касающихся полноты как равномерной, так и в среднем систем функций:

$$r_{p_i}^{-n-1} P_n^m(\cos\theta_{p_i}) \begin{matrix}\sin n\varphi_{p_i}\\ \cos n\varphi_{p_i}\end{matrix},\quad m \leqslant n;\ n,\ i=0, 1, \ldots \qquad (1)$$

$$r^n P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{matrix},\quad m \leqslant n;\ n=0;\ 1, \ldots, \qquad (2)$$

где p_i $(i=0, 1, \ldots)$ — некоторая фиксированная последовательность точек трехмерного пространства, r_{p_i}, θ_{p_i}, φ_{p_i} — сферические координаты точки (x, y, z) относительно центра p_i; r, θ, φ — относительно начала координат, $P_n^m(t)$ — присоединенные функции Лежандра. Приведем некоторые из них. Пусть V с границей S — ограниченная трехмерная область, V_i с границами S_i, $i=0, 1, \ldots$, — связные компоненты $C\overline{V}$ дополнения $\overline{V}$ до полного пространства. Через H обозначим замыкание по норме:

$$\|u\|^2 = \int\int\int_V u^2(p)\, dV \qquad (3)$$

множества гармонических и ограниченных в области V функций.

Теорема 1. Если область V такова, что всякое регулярное в ней решение уравнения $\Delta^2 u = 0$, обращающееся на S вместе с производными первого порядка в нуль, совпадает с тривиальным, а $S = \sum_{i=0}^{\infty} S_i$, то система (1), где $p_i \in V_i$, полна в пространстве H в смысле нормы (3).

Пусть F — произвольный ограниченный континуум, G — множество его внутренних точек. Будем говорить, что F удовлетворяет условию (4), если существует такая последовательность конечносвязных областей $\{\Omega_n\}$ с гладкими границами, что

$$\left.\begin{aligned} &F \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega_n,\quad n=0, 1, \ldots\\ &\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}(\Omega_n - G) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Теорема 3. Если F — нигде не плотный континуум, удовлетворяющий условию (4), то система (1), где $p_i \in V_i$ $\left(CF = \sum_{i=0}^{\infty} V_i\right)$, полна в смысле равномерной сходимости в классе функций, непрерывных на F.

Через $\Gamma_n(p, q) = \frac{\alpha}{\left|\overrightarrow{pq}\right|} + W_n(p, q),\quad n=0, 1, \ldots,$ обозначим функцию Грина оператора Лапласа для области Ω_n. Будем говорить, что континуум F удовлетворяет условию (5); если система функций

$$K_n(p; R) = \int\int\int_{\Omega_n} W_n(p, q)\, R(q)\, d\Omega_n,\ n=0, 1, \ldots,$$
$$R \in M_c,$$

равностепенно непрерывна на F. Здесь через M_c обозначена совокупность многочленов 3 переменных, ограниченных в Ω_0 по модулю числом c.

Теорема 4. Если континуум F удовлетворяет условиям (4), (5), то система (1), $p_i \in V_i$, полна в смысле равномерной сходимости в классе функций, непрерывных на F и гармонических в G.

Примечание референта. 1. Очевидно, что условие (4) выполняется для тех и только тех нигде не плотных континуумов, объемная мера которых равна нулю. Поэтому утверждение автора о том, что теорема 3 обобщает результат М. В. Келдыша о полноте системы гармонических многочленов в классе функций, непрерывных на произвольном гомеоморфе плоского круга, либо непрерывных на нульмерном множестве, не разбивающем пространство, ошибочно.

2. Теорема 5, в том виде, в котором она сформулирована в работе, неверна. Е. Г. Гольштейн

8770. Теоремы Фейера—Рисса для сферы. Дю-Плесси (Spherical Fejér—Riesz theorems. Du Plessis N.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 4, 386—391 (англ.)

Пусть $f(P)$ — гармоническая функция внутри единичной сферы E $(n+1)$-мерного евклидова пространства и $\int_{E_\rho} |f(p)|^r\, dS < \infty$, где $\rho < 1$, E_ρ — сфера радиуса ρ. Тогда, если $r>1$, то для почти всех $Q \in E$ существует радиальное предельное значение $f(Q) = \lim_{P\to Q} f(P)$ и $M_r^r(f) = \int_E |f(Q)|^r\, dS < \infty$.

Теорема. Если $r>1$ и $2 \leqslant m \leqslant n+1$, то $\int_D (1-\rho)^{m-2} |f(P)|^r\, dV \leqslant A_{r,n} M_r^r(f)$, где ρ — расстояние от P до центра сферы, а D — часть $(n-m+2)$-мерной гиперплоскости, проходящей через центр E и заключающейся в E.

Для доказательства сфера с помощью инверсии преобразуется в полупространство и применяется теорема Фейера—Рисса для полупространства, доказанная автором ранее (J. London Math. Soc., 1955, **30**, 296—301). В случае $r=1$ теорема неверна. Однако, если

$$J = \int_E |f(Q)| \ln^+ |f(Q)|\, dS < \infty,$$

то $\int_D (1-\rho)^{m-2} |f(P)|\, dV < A_n J + B_n$. Для $m = n+1$ это было доказано иным методом в диссертации Булена (P. S. Bullen). Н. С. Ландкоф

8771. Основная теорема И. И. Привалова для пространственных потенциалов. Гегелиа Т. Г., Сообщ. АН ГрузССР, 1957, **18**, № 3, 257—264

Рассматриваются обобщенные потенциалы вида

$$\Phi(R)=\int_S \frac{M(Q,\ R)\varphi(Q)}{r^2(Q,\ R)}\,dS_Q, \qquad (1)$$

где S — замкнутая квадрируемая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, $r(Q,\ R)$ — расстояние между точками Q и R, а $\varphi(Q)$ — суммируемая плотность. Измеримая функция $M(Q,\ R)$ определена для почти всех точек $Q\in S$ и для всех точек R некоторой окрестности $G(S)$ и удовлетворяет условиям: 1) $|M(Q,\ R)|\leqslant M$ для всех $R\in G(S)$ и почти всех $Q\in S$; 2) для всех $R_1,\ R_2\in G(S)$ и почти всех $Q\in S$

$$|M(Q,\ R_2)-M(Q,\ R_1)|\leqslant \frac{Mr(R_1,\ R_2)}{r(R_1,\ Q)+r(R_2,\ Q)};$$

3) существует интеграл

$$\Gamma(P)=\lim_{\delta\to 0}\int \frac{M(Q,\ P)}{r^2(Q,\ P)}\,dS_Q,$$

где $P,\ Q\in S$, $S(P,\ \delta)$ — часть поверхности S, остающаяся после выбрасывания содержащей P связной компоненты той части S, которая попадает внутрь кругового цилиндра радиуса δ, имеющего осью нормаль в точке P. Обозначим еще через $\Gamma^+(P)$ и $\Gamma^-(P)$ граничные значения интеграла $\Gamma(R)$, которые получаются, когда точка $R\in G(S)\setminus S$ стремится к точке $P\in S$ соответственно изнутри и извне S, оставаясь внутри любого конуса $K(P,\ \theta)$ с вершиной P и углом раствора 2θ, $\theta<\pi/2$, имеющего осью нормаль в точке P. Основное содержание реферируемой работы составляет доказательство следующей теоремы, являющейся некоторым аналогом для пространства основной леммы И. И. Привалова. Граничные свойства аналитических функций, изд. 2, ГТТИ, М.—Л., 1950, стр. 184).

Теорема. Если точка $P\in S$ является точкой Лебега для суммируемой на S функции $\varphi(Q)$, в точке P существуют угловые граничные значения $\Gamma^+(P)$ и $\Gamma^-(P)$ и выполнены условия 1), 2), 3), то для существования угловых граничных значений $\Phi^+(P)$ и $\Phi^-(P)$ интеграла (1) необходимо и достаточно существование главного значения $\Phi(P)$ при $\delta\to 0$ интеграла (1), взятого по $S(P,\ \delta)$, причем

$$\Phi^{\pm}(P)=[\Gamma^{\pm}(P)-\Gamma(P)]\varphi(P)+\Phi(P).$$

Как замечает автор, эта теорема является обобщением результатов Фикеры (Fichera G., Ann. mat. pura ed appl., 1948, ser. 4, 27, 1—28), касающихся граничных значений потенциала двойного слоя или нормальной производной потенциала простого слоя для случая достаточно гладкой поверхности S. В работе имеются опечатки. Е. Д. Соломенцев

8772. Распределение масс для произведений субгармонических функций. Арсов (Mass distributions for products of subharmonic functions. Arsove Maynard G.), Duke Math. J., 1957, 24, № 2, 215—225 (англ.)

Рид (Reade M. O., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 89—95) и Исикава (Ishikawa O., РЖМат, 1956, 1305) рассматривали распределения масс для логарифмически-субгармонических функций и, в связи с этим, распределения масс для произведений субгармонических функций. Их результаты относились к непрерывным субгармоническим функциям. Автор рассматривает функции класса $\mathfrak{A}$, представимые в плоской области Ω в виде разностей локально ограниченных субгармонических функций; эти функции были им названы δ-субгармоническими (РЖМат, 1955, 3732).

Для функций класса $\mathfrak{A}$ получены формулы, выражающие распределение масс произведения двух функций и распределение масс композиции $\varphi[w(z)]$, где $w\in\mathfrak{A}$, $\varphi\in C^2$. Приводим формулировки соответствующих теорем.

Теорема 2. Если $w_1,\ w_2\in\mathfrak{A}$ и E — B-множество, лежащее внутри Ω, то

$$M_E(w_1w_2)=\int_E w_1d\mu_2+\int_E w_2d\mu_1-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_E\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x}+\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)d\sigma,$$

где μ_1 и μ_2 — распределения масс соответственно для w_1 и w_2, M_E — соответствующая w_1w_2 масса, покрывающая E; через σ обозначена лебегова плоская мера.

Теорема 3. Пусть $w\in\mathfrak{A}$ и $\varphi\in C^2$. Тогда функция $\varphi[w(z)]$ почти δ-субгармонична в Ω и ее распределение масс выражается формулой

$$\mu(E)=\int_E\varphi'[w]\,d\mu_w-\frac{1}{2\pi}\int_E\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\varphi''[w]\,d\sigma,$$

где E — B-множество, лежащее внутри Ω, а μ_w — распределение масс, соответствующее w. Е. Д. Соломенцев

8773. О псевдогармонических функциях. Токи, Тарумото (On the pseudo-harmonic functions. Tôki Yukinari, Tarumoto Kôichi), Osaka Math. J., 1955, 7, № 1, 103—107 (англ.)

На ориентируемой двумерной поверхности F рассматриваются псевдогармонические функции в смысле М. Морса (Топологические методы теории функций комплексного переменного, 1947, русск. пер. 1951). Доказывается теорема: Если $u(p)$ — псевдогармоническая функция на F, то существует локальная параметризация F, по отношению к которой F является римановой поверхностью, а на этой римановой поверхности $u(p)$ является гармонической функцией. Следствие: Для любой псевдогармонической функции $u(p)$ существует сопряженная псевдогармоническая функция $v(p)$ (т. е. такая функция, что при надлежащем гомеоморфизме окрестности любой точки F на круг $|z|<1$ $u(p)$, $v(p)$ переходят в пару сопряженных гармонических в $|z|<1$ функций). При этом $v(p)$, вообще говоря, многозначна на F. Доказательства носят конспективный характер.

Примечание референта. Понятия и объекты в ходе доказательств определяются недостаточно четко. Некоторые места работы неудобочитаемы из-за небрежной редакции текста. А. И. Фет

См. также: 8721, 8854, 8939, 8954, 8962—8964, 8969—8971, 8974, 8976, 8980, 8994, 9003

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, И. Н. Векуа, А. Г. Свешников*

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8774. Обзор теории дифференциально-разностных уравнений с постоянными и переменными отклонениями. Хан (Bericht über Differential-Differenzengleichungen mit festen und veränderlichen Spannen. Hahn Wolfgang), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1954, 57, № 2, 55—84 (нем.)

Обзор теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом по 1954 г. Библ. 124 назв. Г. А. Каменский

8775. О системах обыкновенных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами, содержащих постоянные параметры. Сибуя (Sur un système d'équations différentielles ordinaires à coefficients presque-périodiques et contenant des paramètres. Sibuya Yasutaka), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 1957, 7, № 4, 407—417 (франц.)

1. Рассматриваются линейные уравнения

$$dx_j/dt = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где коэффициенты $a_{jk} = a_{jk}(t, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ зависят от времени t и постоянных параметров $\xi_1, \ldots, \xi_r$, причем в области $D_\delta(|\xi_i| < \delta, \ \delta > 0, \ i = 1, \ldots, r, \ -\infty < t < \infty)$ эти коэффициенты непрерывны по всем своим аргументам, голоморфны по $\xi_1, \ldots, \xi_r$ и являются почти периодическими функциями t. Предполагается, что при $\xi_1 = \ldots = \xi_r = 0$ коэффициенты a_{jk} обращаются в постоянные величины $a_{jk}(t, 0) = a_{jk}^{(0)}$ и что матрица $\|a_{jk}^{(0)}\|$ имеет жорданову форму. Показывается, что существует линейное преобразование

$$x_j = p_{j1}y_1 + \ldots + p_{jn}y_n, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

с почти периодическими коэффициентами $p_{jk} = p_{jk}(t, \xi_1, \ldots, \xi_r)$, причем $p_{jk}(t, 0, \ldots, 0) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$ приводящие уравнения (1) к виду

$$dy_j/dt = b_{jj}(t, \xi_1, \ldots, \xi_r), \ j = 1, \ldots, n, \qquad (3)$$

где $b_{jj}(t, 0, \ldots, 0) = a_{jj}(t, 0, \ldots, 0)$.

При этом функции a_{jk}, p_{jk}, b_{jk} представляются почти периодическими рядами, расположенными по целым положительным степеням $\xi_1, \ldots, \xi_r$.

2. Далее рассматриваются неоднородные линейные уравнения

$$dy_j/dt = b_{j1}y_1 + \ldots + b_{jn}y_n + b_j, \qquad (4)$$

записываемые в матричной форме следующим образом

$$dy/dt = B(t, \xi)\, y + b(t, \xi). \qquad (4^*)$$

Коэффициенты $b_{jk} = b_{jk}(t, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ и функции $b_j = b_j(t, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ суть почти периодические функции, обладающие теми же свойствами, что и коэффициенты a_{ik} в уравнениях (1). Предполагается, что матрица $B(t, \xi)$ имеет жорданову форму, т. е. что система (4) распадается на s отдельных групп уравнений. В применении к одной из таких групп

$$d\tilde{y}/dt = \tilde{B}(t, \xi)\, \tilde{y} + b(t, \xi), \qquad (5)$$

обладающей единственным характеристическим числом λ, формулируется следующий результат:

Если матрица $\Phi(t, s, \xi)$ удовлетворяет уравнению

$$d\Phi/dt = \tilde{B}(t + s, \xi)\, \Phi,$$

причем $\Phi(0, s, \xi) = I$ (единичная матрица), то единственное почти периодическое решение $\tilde{y}(t, \xi)$ уравнений (5) определяется формулой

$$\tilde{y}(t, \xi) \int_{(\operatorname{sgn}\alpha)\cdot\infty}^{0} \Phi(s, t, \xi)^{-1}\, b(t + s, \xi)\, ds. \qquad (6)$$

3. Рассматриваются нелинейные уравнения

$$dx_j/dt = \mu_j x_j + \delta_j x_{j-1} + \sum f_{j_\rho}(t)\, x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}, \quad (j = 1, \ldots, n) \qquad (7)$$

где f_{j_ρ} — периодические коэффициенты периода ω а μ_j, δ_j суть постоянные (если $\delta_j \neq 0$, то $\mu_{j-1} = \mu_j$). При этом $\operatorname{Re}\mu_j < 0$.

После подстановки

$$x_j = e^{\nu_j t} y_j + \varphi_j(t, \xi), \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $\nu_j = I_{m\mu_j}$, $\varphi_j(t, \xi)$ почти периодическое решение уравнений (7), удовлетворяющее условиям $\varphi_j(t, 0) = 0$, автор получает систему уравнений относительно функций $y_1, \ldots, y_n$ с почти периодическими правыми частями. Показывается, что можно найти почти периодическое решение $y_j = y_j(t, \eta_1, \ldots, \eta_\rho, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ этих уравнений, разлагающееся в ряды по степеням $\eta_1, \ldots, \eta_\rho, \xi_1, \ldots, \xi_r$, где $\eta_1, \ldots, \eta_\rho$ — произвольные постоянные, причем $y_j(t, 0, \ldots, 0) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} y_j = 0$.

Ю. А. Рябов

8776. Замечание о функциях Матьё. Винтнер (A note on Mathieu's functions. Wintner Aurel), Quart. J. Math., 1957, 8, № 30, 143—145 (англ.)

Доказывается следующая теорема:

Всякое нетривиальное решение уравнения Матье

$$d^2y/d\varphi^2 + (p - 2q\cos 2\varphi)\, y = 0, \ p \geqslant 0, \ q > 0 \qquad (1)$$

представимо в форме

$$y = \int_0^\infty e^{-t\cos\varphi} \cos(t\sin\varphi)\, dF(t), \qquad (2)$$

где $F(t)$ — неубывающая функция переменного t.

Доказательство основывается на возможности приведения рассматриваемого уравнения к уравнению с алгебраическими коэффициентами, принадлежащему к классу, исследованному Дёчем (РЖМат, 1956, 8933 К).

Примечание референта. При подстановке $x = q^{1/2} e^{i\varphi}$, с помощью которой осуществляется переход от трансцендентной к алгебраической форме, автором статьи допущена вычислительная ошибка, после устранения которой условия применимости теоремы Дёча оказываются невыполненными и предложенное доказательство теряет силу. Н. Н. Лебедев

8777. Символический метод нахождения интеграла линейных разностных и дифференциально-разностных уравнений. Кук (A symbolic method for finding integrals of linear difference and differential-difference equations. Cooke K. L.), Math. Mag., 1958, 31, № 3, 121—126 (англ.)

8778. Метод решения дифференциального уравнения в полных дифференциалах. Пеннизи (A method for solving an exact differential equation. Pennisi L. L.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 2, 120—121 (англ.)

8779. Новый способ единообразной записи и получения общего решения линейных дифференциальных уравнений с применением к выводу их рекуррентных формул. Зборник (Ein neuartiges Verfahren zur Uniformierung und allgemeinen Lösung von linearen Differentialgleichungen und zur Herleitung ihrer Rekursions-formeln. Zbornik Josef), Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1957, Abt. 2, 166, № 1—5, 21—62 (нем.)

Рассматриваются уравнения типа

$$O(y) = E_m(y) + Bx^r E_n(y) = H(x), \qquad (1)$$

где

$$E_m(y) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu x^\mu y^{(\mu)}, \quad E_n(y) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu y^{(\nu)},$$

$a_m = b_n = 1$, $m \geqslant n$, $y = y(x)$, a_μ и b_ν — постоянные. С помощью элементарного оператора

$$O_p(y) = xy' - py \tag{2}$$

и характеристических полиномов

$$G_m(p) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu \binom{p}{\mu} \mu! = \prod_{i=1}^{m} (p - p_i);$$

$$G_n(q) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \binom{q}{\nu} \nu! = \prod_{j=1}^{n} (q - q_j) \tag{3}$$

любой оператор типа $O(y)$ может быть в единообразной форме представлен в виде

$$O(y) = \left(\prod_{i=1}^{m} O_{p_i} + Bx^r \prod_{j=1}^{n} O_{q_j}\right)(y) =$$

$$= [P_m(O_p) + Bx^r P_n(O_q)](y), \tag{4}$$

где $P_m(O_p) = O_{p_1} O_{p_2} \ldots O_{p_m}$;

$$P_n(O_q) = O_{q_1} O_{q_2} \ldots O_{q_n}.$$

Считая выражение $O(y) = [P_m(O_p) + Bx^r P_n(O_q)](y)$ функцией элементарных операторов

$$O_{p_1}, O_{p_2}, \ldots, O_{p_m}, O_{q_1}, \ldots, O_{q_n},$$

мы определяем производные операторы $O^{(\alpha)}(y)$ рекуррентной формулой:

$$O^{(\alpha)}(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial O^{(\alpha-1)}(y)}{\partial O_{p_i}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial O^{(\alpha-1)}(y)}{\partial O_{q_j}},$$

$$O^{(0)}(y) = O(y),$$

причем

$$O(y \ln^b x) = \sum_{\rho=0}^{b} \binom{b}{\rho} O^{(\rho)}(y) \ln^{b-\rho} x;$$

$$O^{(\alpha)}(cx^u) = cx^u \left[G_m^{(\alpha)}(u) + Bx^r G_n^{(\alpha)}(u)\right].$$

Совокупность всех показателей p_i и q_j оператора $O(y)$ мы разбиваем на группы конгруэнтных по модулю r показателей. Показатели одной и той же группы, имеющие вид $t_i = t_0 + h_i r$, где h_i — целые числа, располагаются в порядке убывания h_i со следующей оговоркой: если $t_i = p = q$, то мы повторяем t_i два раза подряд, считая, что q предшествует p. Если $h_i \gtreqless h_j$, то пишем $t_i \gtreqless t_j$. Из построенной таким образом последовательности показателей t_i выделяем те пары смежных показателей (q, p), в которых $q \geqslant p$, обозначив эти пары через $(q, p)_1$. Удалив пары $(q, p)_1$, из оставшейся последовательности показателей данной группы снова выделяем пары смежных показателей вида (q, p), где $q \geqslant p$, если такие пары существуют.

Обозначив эти пары через $(q, p)_2$ их удаляем и повторяем операцию до тех пор, пока оставшиеся показатели группы не оказываются расположенными в порядке $p_1' > p_2' > \ldots > p_s' > q_1' > \ldots > q_h'$. Допустим, что это наступает после удаления пар $(q, p)_{a_0}$. Вводим тогда несобственный показатель $q_0 = \infty$ и сопоставляем показателям p_1', p_2', .., p_s' несобственные пары

$$(q_0, p_1')_{a_0+1}, (q_0, p_2')_{a_0+2}, \ldots, (q_0, p_s')_{a_0+s}.$$

Таким путем каждому показателю p_i приводится в соответствие пара $(q_i, p_i)_{a_i}$, где $q_i = p_i + h_i r$, a_i и h_i — неотрицательные целые числа, a_i — порядок, h_i — длина пары. Если $q_i = q_0 = \infty$, то $h_i = \infty$. Каждой паре $(q, p)_a$ длины h сопоставляем полином (или бесконечный степенной ряд)

$$[q, p]_a = x^p \sum_{k=0}^{h} C_k x^{kr}. \tag{5}$$

Коэффициенты C_k определяются так: Если $a = 1$, то

$$C_k = (-B)^k \prod_{t=1}^{k} \frac{G_n[p + (t-1)r]}{G_m(p + tr)}, \quad C_0 = 1. \tag{6}$$

Если $a > 1$, то формула (6) теряет смысл, так как имеются пары $(q_j, a_j)_{a_j}$, лежащие между p и q, и соответствующие знаменатели $G_m(p + t_j r)$, где $t_j = \frac{p_j - p}{r}$, $1 \leqslant t_j \leqslant h$, равны нулю. Полином $[q, p]_a$ определяется тогда с помощью рекуррентного уравнения

$$O([q, p]_a) + \sum_{s=1}^{a-1} \binom{a-1}{s-1} \left(\int [q, p]_s\right) = 0, \tag{7}$$

где $\int [q, p]_s$ обозначает сумму всех полиномов $[q_j, p_j]_{a_j}$, принадлежащих парам $(q_j, p_j)_{a_j}$, лежащим внутри пары $(q, p)_s$. Из полиномов $[q_j, p_j]_{a_j}$ образуем выражения

$$L_i(x) = [q_i, p_i]_{a_i} + \sum_{s=1}^{a_i-1} \binom{a_i-1}{s-1} \times$$

$$\times \left(\int [q, p]_s\right) \ln^{a_i - s} x \tag{8}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Доказывается, что общее решение уравнения $O(y) = 0$, имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^{m} C_i L_i(x),$$

где C_i — произвольные постоянные.

Далее приводятся рекуррентные формулы для общих решений y_α уравнений $O(y; \alpha) = 0$, показатели которых $p_i = p_i(\alpha)$, $q_i = q_j(\alpha)$ являются функциями α, удовлетворяющими условиям:

$$p_i(\alpha + 1) - p_i(\alpha) \equiv p_1(\alpha + 1) - p_1(\alpha) \pmod r,$$

$$q_j(\alpha + 1) - q_j(\alpha) \equiv p_i(\alpha + 1) - p_1(\alpha) \pmod z.$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Далее рассматриваются операторы $O(y)$, показатели которых удовлетворяют условиям

$$p_k = q_k \quad (k = 1, 2, \ldots, a),$$

$$p_k = q_k + h_k r \quad (k = a + 1, a + 2, \ldots, b;$$

$$h_k = 1, 2, \ldots).$$

В качестве приложений рассматриваются: 1) уравнение Лежандра

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1) =$$

$$= (O_n O_{-n-1} - x^2 O_0 O_1)(y) = 0, \ a = 0, \ b = 2.$$

Получаем

$$y = C_1 \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n + C_2 \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2 - 1)^n \ln \frac{x+1}{x-1} - \right.$$

$$\left. - (x - 1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{n-k}}{n-k} (x+1)^k \right];$$

2) уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = (O_\nu O_{-\nu} + x^2)\,(y) =$$
$$= \mp[(O_1 \mp ix)\,(O_0 \mp ix) + (O_0 - \nu^2)]\,(y) = 0.$$

3) радиальное волновое уравнение

$$x^2y'' + \left(A^2x^2 + Abx + \frac{1}{4} - c^2\right)y = 0; \qquad (9)$$

при $b = in$ общее решение уравнения (9) имеет вид

$$y = x^{c+1/2}e^{iAx}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{-c+n/2}e^{-iAx}Z_{c-n/2}(x)\right).$$

Ю. Л. Рабинович

8780. Перенесение ретрактного метода Т. Важевского на уравнения в паратингенциях. **Белецкий** (Extension de la méthode du rétracte de F. Ważewski aux équations au paratingent. Bielecki Adam), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1955 (1957), **A9**, № 1—13, 37—61 (франц.; рез. русск., польск.)

Пусть в каждой точке P пространства определен конус направлений $M(P)$. Кривая K называется решением уравнения в паратингенциях (или интегралом поля $M(P)$), если для любой точки $P \in K$ и любых последовательностей точек $Q_i \to P$, $R_i \to P$, где $Q_i \in K$, $R_i \in K$, предельное положение хорды Q_iR_i есть прямая, принадлежащая $M(P)$. В частности, если в каждой точке конус сводится к одному линейному элементу, то уравнение в паратингенциях превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение.

В статье устанавливаются условия, при которых возможна регуляризация поля $M(P)$ в области B, т. е. замена его некоторым другим полем, например полем линейных элементов, с сохранением некоторых топологических свойств интегралов этого поля. Далее изучаются некоторые свойства множества точек выхода интегралов поля $M(P)$ из области B. Полученные результаты являются перенесением на уравнения в паратингенциях теорем Важевского (Ważewski T., Ann. Soc. polon. math., 1947, **20**, 279—313) и Плиса (РЖМат, 1956, 2972).

А. Ф. Филиппов

8781. Некоторые топологические свойства решений уравнений в паратингенциях. **Белецкий** (Certaines propriétés topologiques des solutions des équations au paratingent. Bielecki Adam), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1955 (1957), **A9**, № 1—13, 63—79 (франц.; рез. русск., польск.)

Излагается метод регуляризации уравнений в паратингенциях, отличный от метода предыдущей статьи автора (реф. 8780). Изучаются некоторые топологические свойства решений таких уравнений, аналогичные свойствам решений дифференциальных уравнений, рассмотренным Важевским (Ważewski T., РЖМат, 1956, 4492). Приведем один из результатов (в обозначениях реф. 8780).

Пусть в области W $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $|x_i| < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ поле конусов $M(P)$ определено и ограничено, т. е. угловые коэффициенты прямых, образующих конус, ограничены. В сечении с любой плоскостью $t = \text{const}$ конус дает замкнутое выпуклое множество: если $P_i \to P$, то $\overline{\lim} M(P_i) \subseteq M(P)$. Пусть V — замкнутое множество в W, U — левая интегральная воронка множества V (множество точек, принадлежащих отрицательным полутраекториям, проходящим через точки множества V), Π — гиперплоскость $t = \beta$. Тогда множества $W - U$ и $(\Pi - V) \times [0, 1]$ гомеоморфны.

А. Ф. Филиппов

8782. Обобщение некоторых результатов в задаче двух тел с переменной суммой масс. **Михайлович** (Uopštenje nekih rezultata u problemu dvaju tela s promenljivim masama. Михаилович Добривоје), Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, 8, № 3—4, 195—198 (сербо-хорв., рез. нем.)

Рассматривается задача двух тел с переменными массами

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = -\frac{M}{s^3}\mathbf{s},$$

где переменная сумма масс M изменяется по следующему закону:

$$M = -\frac{C_2^2}{C}\cdot\frac{1}{C_2t + C_3}.$$

Совершая преобразование искомого вектора $\mathbf{s}$ и аргумента t к новым переменным $\mathbf{r}$ и τ по формулам:

$$\mathbf{r} = -\frac{\mathbf{s}}{C(C_2t + C_3)}, \quad \tau = -\frac{1}{C^2(C_2t + C_3)},$$

автор приходит к обычным уравнениям задачи двух тел:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mathbf{r}}{\rho^3} = 0 \quad (\rho = |\mathbf{r}|,\ \rho^2 = \xi^2 + \eta^2),$$

которые позволяют получить следующий вывод: орбиты представляют собой плоские спирали; при $C_2 > 0$ ориентация плоскости движения и само движение прямое, при $C_2 < 0$ ориентация и направление движения обратные.

Г. А. Мерман

8783. Неравенства, встречающиеся в ограниченной задаче трех тел. **Парс** (Inequalities occurring in the restricted problem of three bodies. Pars L. A.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 3, 355—356 (англ.)

Выводятся некоторые неравенства, имеющие место для коллинеарных точек либрации в ограниченной задаче трех тел. Координаты этих точек ($x = n_1$, $x = n_2$, $x = n_3$) удовлетворяют условиям минимума потенциальной функции

$$U = \frac{\alpha + \beta}{2l^3}x^2 + \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{s},$$

где $l > 0$, $\alpha > \beta > 0$, $r = |x + a|$, $s = |x - b|$,

$$a = \frac{\beta}{\alpha + \beta}l, \qquad b = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}l,$$

α, β — конечные массы, a, b — их координаты, l — их расстояние.

Автор устанавливает следующие два неравенства:

$$U(n_2) > U(n_3),\ U(n_3) > U(n_1).$$

Г. А. Мерман

8784. О треугольных решениях Лагранжа задачи трех тел. **Курт** (On Lagrange's triangular solution of the problem of three bodies. Kurth R.), Arch. Math., 1957, 8, № 5, 381—392 (англ.)

Доказывается существование решений, аналогичных лагранжевым в задаче трех тел, для произвольных центральных сил $f(\bar{r})$. В частности, доказывается следующая теорема:

Пусть начальная конфигурация $\mathring{r}$ системы трех тел представляет равносторонний треугольник; пусть $\dot{\rho}(0)$ — произвольное число и

$$\mathring{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathring{\omega}_z & \mathring{\omega}_y \\ \mathring{\omega}_z & 0 & -\mathring{\omega}_x \\ -\mathring{\omega}_y & \mathring{\omega}_x & 0 \end{pmatrix}$$

— произвольная антисимметричная постоянная матрица, такая, что вектор

$$\mathring{\omega} = \begin{pmatrix} \mathring{\omega}_x \\ \mathring{\omega}_y \\ \mathring{\omega}_z \end{pmatrix}$$

(вектор угловой скорости) перпендикулярен плоскости $\mathring{r}$. Тогда, для начальных скоростей

$$\mathring{r}(0) = \{\mathring{\rho}(0)\, E + \mathring{\Omega}\}\, \mathring{r}_i$$

($i = 1, 2, 3$, E — единичная матрица),

три тела образуют равносторонний треугольник в любой момент.

Вводятся понятия гомографического решения (для которого конфигурация тел в любой момент подобна начальной) и центральной конфигурации (для которой $f_i = \sigma m_i \mathring{r}_i$, где σ — скалярный множитель) и доказывается следующее утверждение:

Если центральная сила $f(r)$ пропорциональна степени r^α расстояния r, $\alpha \neq -3$, то для всякого гомографического решения тела образуют центральную конфигурацию в любой момент и движутся так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в центре тяжести. Г. А. Мерман

8785. Об интегральных инвариантах теории возмущений. Вилькенс (Über die Integral — Invarianten der Störungstheorie. Wilkens Alexander), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math., Naturwiss. Kl. 1955, München, 1956, 123—173. (нем.)

Автор ищет для дифференциальных уравнений небесной механики соотношения вида

$$\int f_x dx + f_y dy + f_z dz + f_{\dot{x}} d\dot{x} + f_{\dot{y}} d\dot{y} + f_{\dot{z}} d\dot{z} = \text{const}, \quad (1)$$

$$\int f_a da + f_e de + f_i di + f_\omega d\omega + f_\Omega d\Omega + f_\varepsilon d\varepsilon = \text{const}, \quad (2)$$

где коэффициенты и дифференциалы координат, скоростей и элементов вычисляются вдоль решения. Такие соотношения находятся для плоской и пространственной ограниченной задачи трех тел, а также для общей задачи трех тел. Для элементов соотношения типа (2) выводятся с помощью уравнения Лагранжа путем разрешения их относительно частных производных пертурбационной функции, а для координат и скоростей — путем комбинации уравнений движения в прямоугольных координатах.

Соотношения типа (1) и (2), соответствующие известным интегралам энергии и площадей, имеют точный смысл, остальные — приближенный.

Кроме того, имея в виду применение этих соотношений для контроля интегрирования, автор исключает из этих соотношений члены, зависящие от возмущающих тел, ценой уменьшения числа этих соотношений. При этом простые линейные соотношения получаются лишь в ограниченной задаче, а в общей проблеме трех тел получаются алгебраические соотношения относительно дифференциалов. Г. А. Мерман

8786. О феноменологических зависимостях Онсагера. Караниколов Хр. (Върху феноменологичните релации на Onsager. Караниколов Хр), Годишник Минно-геол. ин-т, 1952—1954 (1954), 1, ч. 2, 139—149 (болг.; рез. русск., франц.)

Попов (Z. angew. Math. und Phys., 1952, III, 440—448; см. также РЖМат, 1954, 2936) установил, что термодинамические соотношения

$$dx_i/dt = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} X_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ n \geqslant 2) \quad (1)$$

можно рассматривать как интегралы системы дифференциальных уравнений

$$d^2x_i/dt^2 = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

при условии: $x_i(t_0) = x_i^0$, $x_i(\infty) = 0$, где

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(-\Delta s)$$

и

$$\Delta s = -\frac{1}{2} \sum_{i,\ k=1}^{n} g_{ik} x_i x_k \quad (g_{ik} = g_{ki})$$

— положительно определенная квадратичная форма.

Автор доказывает: 1) что для коэффициентов L_{ik} имеют место соотношения:

$$\sum_{k=1}^{n} L_{ik} L_{ks} = \frac{1}{g} G_{si} \quad (i,\ s \leqslant n;\ n \geqslant 2),$$

где G_{ik} — алгебраические дополнения элементов g_{ik} определителя $g = \det \| g_{ik} \|$; 2) если $L = \| L_{ik} \|$ — несимметричная матрица, то система

$$\sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{ks} = \frac{1}{g} G_{si} \quad (i,\ s \leqslant n)$$

имеет бесконечное множество решений относительно неизвестных l_{ik}.

Как следствие получается, что при $n = 3$ и $n = 4$ матрица L симметрическая. Б. П. Демидович

8787. Теорема единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения $x^n = f(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)})$. Мерли (Sul teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo alla equazione differenziale $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \ldots x^{(n-1)})$. Merli Luigi), Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 22, № 5, 578—584 (итал.)

Если $f(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)})$ непрерывна на множестве, состоящем из области $0 < t < a$, $|x^{(k)} - c_k| < b_k$, $b_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и точки $(t, x, \ldots, x^{(n-1)}) = (0, c_0, \ldots, c_{n-1})$ и для любых двух точек $(t, x, \ldots, x^{(n-1)})$ и $(t, y, \ldots, y^{(n-1)})$ этой области

$$|f(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}) - f(t, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)})| \leqslant$$
$$\leqslant L_n t^{-n} |x - y| + L_{n-1} t^{-n+1} |x^{(1)} - y^{(1)}| + \ldots$$
$$\ldots + L_1 t^{-1} |x^{(n-1)} - y^{(n-1)}|,$$

где $\sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{k!} \leqslant 1$, то на некотором отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$ при начальных условиях $x(0) = c_0$, $x'(0) = c_1, \ldots, x^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$ существует только одно решение уравнения $x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$. Это обобщает теорему Винтнера (РЖМат, 1957, 8601).

Опечатки: в формулировке теоремы вместо $\sum \frac{Lk}{k!}$ надо $\sum \frac{Lk}{k!}$. А. Ф. Филиппов

8788. Об одном аналоге теории расширений эрмитовых операторов и несимметрической одномерной краевой задаче на полуосн. Глазман И. М., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 2, 214—216

Определенный во всем гильбертовом пространстве H линейный оператор J называется оператором сопряжения, если для любых f и $g \in H$ выполняются условия $(Jf, Jg) = (f, g)$ и $J^2 f = f$. Оператор A с областью определения D_A называется J-симметрическим, если для всех f и $g \in D_A$ $(Af, Jg) = (f, JAg)$. J-симметрический оператор A с плотной областью опреде-

ления D_A называется J-самосопряженным, если $JAS = A^*$. Оператор A называется диссипативным, если $\operatorname{Im}(Af, f) \geqslant 0$ для всех $f \in D_A$. J-симметрическим в $L_2(0, +\infty)$ является оператор

$$l(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_{n-k}(x)\frac{d^k}{dx^k}y\right], \qquad (1)$$

определенный на гладких финитных функциях; $p_{n-k}(x)$ вообще комплексны. Оператор сопряжения в этом случае вводится по формуле $J[f(x)] = \overline{f(x)}$.

В реферируемой работе ряд теорем теории расширений эрмитовых (симметрических) операторов переносится на случай J-симметрических диссипативных операторов. Отметим из них следующие:

Теорема 2. Любой J-симметрический диссипативный оператор A с плотной областью определения допускает расширение до J-самосопряженного диссипативного оператора.

Теорема 3. При условии $\operatorname{Im} p_k(x) \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_{n-k}(x)\frac{d^k y}{dx^k}\right] = \lambda y$$

при любом λ $(\operatorname{Im}\lambda < 0)$ имеет одно и то же число m линейно независимых решений, принадлежащих $L_2(0, +\infty)$; причем $m \geqslant n$. В. Б. Лидский

8789. Оценка для собственных значений и несамосопряженных краевых задач. Слободянский М. Г., Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 3, 330—338

Пусть A — линейный оператор, обладающий вполне непрерывным обратным. Для оценки числа собственных значений оператора, находящихся внутри контура C, автор предлагает приблизить оператор A^{-1} некоторым другим оператором A_1^{-1}, собственные значения которого известны; после чего следует воспользоваться теоремой С.-Надя. (Bela Sz.-Nagy, Acta sci. math. Szeged, 1951, 14, 125—137), согласно которой число собственных значений операторов A^{-1} и A_1^{-1}, попавших внутрь C, совпадает, если раствор соответствующих подпространств меньше единицы ($\|P - P_1\| < 1$, где P и P_1 — проекционные операторы). Эти рассмотрения автора поясняются примером, в котором оцениваются собственные числа краевой задачи

$$\sum_{i=0}^{2s} p_i \frac{d^i u}{dx^i} - \lambda u = 0$$

с нулевыми условиями на концах интервала (a, b). В. Б. Лидский

8790. О спектральных функциях дифференциального оператора. Штраус А. В., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 1, 67—70

Рассматривается симметрический оператор порядка $2n$:

$$l(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left(p_{n-k}(x)\frac{d^k y}{dx^k}\right) \qquad (1)$$

с минимальной областью определения в гильбертовом пространстве $L^2(a, b)$. Используя ранее найденную формулу для обобщенных резольвент указанного оператора (РЖМат, 1958, 305), автор приводит в реферируемой статье эффективное построение всех спектральных функций указанного оператора. Эти результаты привлекаются далее при исследовании следующей краевой задачи, в граничные значения которой входит параметр:

$$l(y) = \lambda y,$$
$$A(\lambda)\hat{y}(a) + B(\lambda)\hat{y}(b) = 0. \qquad (2)$$

Здесь $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ — целые матрицы-функции параметра λ; причем ранг прямоугольной матрицы $\|A(\lambda)\,B(\lambda)\|$ $(2n \times 4n)$ предполагается равным $2n$ при любом λ; $\hat{y}$ — вектор-столбец, компонентами которого является решение $y(x)$ и его последовательные квазипроизводные до порядка $2n-1$ включительно. Предполагается далее, что матрицы $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ удовлетворяют следующему условию:

$$\frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}[B(\lambda)IB^*(\lambda) - A(\lambda)IA^*(\lambda)] \geqslant 0,$$

где I — невырожденная кососимметрическая матрица с сигнатурой, равной нулю.

В этих предположениях доказывается, что задача (2) приводит к дискретному спектру и любая функция $f(x) \in L^2(a, b)$ разлагается в сходящийся ряд по собственным функциям краевой задачи. В. Б. Лидский

8791. Уточнение асимптотических формул для собственных значений некоторых краевых задач второго и четвертого порядка. Чайкина З. С., Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1957, вып. 3, 31—38

Пусть λ_n — n-е собственное значение и $y_n(x)$ — n-я собственная функция задачи

$$y'' + \lambda y = q(x)\,y, \qquad (1)$$
$$y'(0) - hy(0) = 0, \qquad (2)$$
$$y'(1) + Hy(1) = 0. \qquad (3)$$

Пусть μ_n — n-е собственное значение и $\varphi_n(x)$ — n-я собственная функция этой же задачи при $q(x) = 0$.

Доказывается, что если $q(x) \in L_1(0, 1)$, то при больших n

$$\lambda_n = \mu_n + \int_0^1 q(x)\,\varphi_n^2(x)\,dx + O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (4)$$

Доказательство основано на тождестве

$$\lambda_m = \mu_n + \frac{\int_0^1 q(x)\,y_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx}{\int_0^1 y_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx},$$

которое в работе выведено излишне сложно. Это тождество получается, если в уравнении (1) заменить λ на λ_m, затем умножить на $\varphi_n(x)$ и проинтегрировать. Интегрируя дважды по частям, получим

$$\int_0^1 y_m'' \varphi_n dx = -\mu_n \int_0^1 y_m \varphi_n dx.$$

Изучается также аналог формулы (4) для задачи

$$y^{IV} - \lambda y = q(x)\,y,$$
$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0.$$

Б. М. Левитан

8792. О пределе коэффициентов в разложениях по собственным функциям некоторых несамосопряженных дифференциальных систем. Мишу, Форд (On the limit of the coefficients of the eigenfunction series associated with a certain nonself-adjoint differential system. Mishoe Luna I. Ford Gloria C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 2, 260—266 (англ.)

На конечном интервале (a, b) рассматривается краевая задача $(A+\lambda B)u=0$; $u(a)=u(b)=0$, где $A=d^2/dx^2+q(x)$, $B=d/dx+p(x)$, $q(x)$ вещественна и непрерывна, $p(x)$ вещественна и дважды непрерывно дифференцируема.

Собственные функции этой задачи, их нормировка и возможность разложения функции ограниченной вариации $F(x)$ в ряд

$$F(x)=\sum_{n=\infty}^{+\infty} a_n u_n(x) \qquad (1)$$

по собственным функциям были исследованы ранее (РЖМат, 1957, 4802). Выбор нормировки $u_n(x)$ в упомянутом реферате таков, что коэффициенты a_n, вообще говоря, не стремятся к нулю, даже если ряд (1) сходится.

Доказывается, что если $F'(x)$ имеет ограниченную вариацию на (a, b) и выполнены все прочие условия, обеспечивающие сходимость ряда (1) к $F(x)$ (см. цитированную статью), то $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ тогда и только тогда, когда $F(a)=F(b)=0$. В. А. Марченко

8793. Об обратной задаче спектрального анализа для дифференциального оператора с особенностью в нуле. Сташевская В. В., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1957, 80, Зап. Матем. отд. физ.-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва, 25, 49—86

Дается подробное доказательство ранее опубликованных теорем (РЖМат, 1955, 5808). Пусть

$$L[y]=y''(x)-\left[q(x)+\frac{n(n-1)}{x^2}\right]y(x)$$

$$(0<x<\infty), \qquad (1)$$

$n>1$ — целое, $q(x)$ — вещественная, существует $\mu<1/2$ такое, что

$$\int_0^1 x^{\mu}|q(x)|\,dx<\infty.$$

Если $y(x, s)$ — решение уравнения $L[\varphi]+s^2\varphi=0$, удовлетворяющее условию $\lim_{x\to 0} x^{-n}y(x, s)=2^{1/2-n}\times$ $\times\Gamma^{-1}(n+1/2)$, то существует монотонная функция $\rho(s)$ (спектральная функция оператора L) такая, что

$$\int_0^\infty f(x)\bar{q}(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} E(f, \sqrt{s})\,\bar{E}(g, \sqrt{s})\,d\rho(s);$$

$$\int_0^\infty f(x)\,y(x, s)\,dx=E(f, s),$$

для любых $f(x)$, $g(x)\in L^2(0, \infty)$.

Доказывается, что

I. Спектральная функция $\rho(s)$ однозначно определяет $q(x)$.

II. Для того чтобы монотонно растущая функция $\rho(s)$ была спектральной функцией некоторого оператора L вида (1), достаточно, чтобы:

а) при всех $x>0$ существовал $\int_{-\infty}^{0}\exp(\sqrt{|s|}x)\,d\rho(s)$;

б) если $\sigma(s)=\rho|s|-s^{n+1/2}(2n+1)^{-1}$, то функция

$$F(x, u)=\int_0^\infty\left\{\int_0^x\sqrt{t}\,J_\nu(t\sqrt{s})\,dt\right\}\times$$

$$\times\left\{\int_0^u\sqrt{t}\,J_\nu(t\sqrt{s})\,dt\right\}s^{-\nu}d\sigma(s)$$

($\nu=n-1/2$) имеет четыре непрерывные производные;

в) если $N(x)$ — число точек роста $\rho(s)$ на интервале $(0, x)$, то $\overline{\lim}_{x\to\infty} N(x)\,x^{-1/2}=\infty$. Условия а) и в) также необходимы.

Примечание референта. Необходимые и достаточные условия недавно получены другим методом М. Г. Крейном (РЖМат, 1958, 3069).

В. А. Марченко

8794. Оценка для собственных значений. Пойа (Estimates for eigenvalues. Pólya G.), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 200—207 (англ.)

Излагаются методы оценок собственных значений задачи

$$u''_{xx}+u''_{yy}=-\lambda u,\ (x, y)\in D,\ u_\Gamma=0,$$

основанные на вариационных принципах. Высказывается предположение, что для собственных значений этой задачи λ_k и собственных значений λ''_k ее конечноразностного аналога имеют место неравенства

$$\lambda''_1<\lambda_1,\ \lambda''_2<\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda''_n<\lambda_n.$$

Для первого собственного значения это предположение высказано Форсайтом (Forsythe G. E.). Отмечается, что неравенства

$$\lambda_1<2\lambda''_1,\ \lambda_2<2\lambda''_2,\ \ldots,\ \lambda_n<2\lambda''_n$$

можно доказать. В. А. Марченко

8795. Представление решений систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки. Зубов В. И., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 6, 1095—1097

Рассматриваются системы уравнений

$$z\frac{dy_s}{dt}=\sum_{i=1}^n \tilde{p}_{si}(z)\,y_i+\tilde{p}_s(z)\,z+$$

$$+Y_s(z, y, \ldots, y_n), \qquad (1)$$

$$s=1, 2, \ldots, n$$

где Y_s разлагаются в степенные ряды по $z, y, \ldots, y_n$, $\tilde{p}_{si}(z)$, $\tilde{p}_s(z)$ непрерывны и ограничены при $z\in(0, 1)$.

Пусть λ_σ — характеристические числа системы $dx_s/dt=\sum_{i=1}^n p_{si}(t)\,x_i$, и эта система линейных уравнений правильна. Если $\lambda_\sigma>0$ при $\sigma\leqslant\beta$, то система (1) имеет семейство решений представимые в форме рядов

$$y_s=\sum_{m+\sum_{i=1}^\beta m_i\geqslant 1}\tilde{K}_s^{(m,\,m,\,\ldots,\,m_\beta)}(z)\,z^{m+\sum_{i=1}^\beta m_i\lambda_i}\times$$

$$\times c_i^{m_1}c_2^{m_2}\ldots c_\beta^{m_\beta},\quad s=1, 2, \ldots, n,$$

сходящихся при $|z|\leqslant z_0$, $|c_\sigma|\leqslant c_0$, $\sigma=1, \ldots, \beta$, где $K_s^{m,\,m_1,\,\ldots,\,m_\beta}(z)$ непрерывные функции, обладающие свойством $\tilde{K}_s^{m,\,m_1,\ldots,m_s}(z)\,z^\alpha\to 0$, $\alpha>0$. При этом $y_s(z)\to 0$ при $z\to 0$, $s=1, 2, \ldots, n$. Если коэффициенты $\tilde{p}_{si}$ и $\tilde{p}_s$ постоянны, то $\tilde{K}_s^{m,\,m_1,\,\ldots,\,m_s)}$ — полиномы относительно $\ln z$. Доказательства основаны на теоремах существования решения некоторых уравнений в частных производных. В. В. Немыдкий

8796. Теоремы сравнения при качественном исследовании решений дифференциальных уравнений. У Чжоу-цюнь (Comparison theorems on the qualitative investigation of solutions of differential

equations. W u u J w o-c h u n), Дунбэй женьминь дасюэ цзыжанькэсюэ сюэбао; Acta scient. natur., 1957, № 1, 131—140 (кит.; рез. англ.)

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X_1(x, y),\ \dot{y} = Y_1(x, y), \tag{1}$$

$$\dot{x} = X_2(x, y, t),\ \dot{y} = Y_2(x, y, t), \tag{2}$$

$$\dot{x} = X_3(x, y),\ \dot{y} = Y_3(x, y), \tag{3}$$

где X_i, Y_i — непрерывные и достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям единственности решений в области

$$x^2 + y^2 < H,\ t \geqslant 0. \tag{4}$$

Кроме того, предполагается, что имеется лишь конечное число кривых $y = \varphi_j(x)$ ($\varphi_j(0) = 0$), на которых $X_i(x, y, t) = 0$.

Выводятся теоремы сравнения, позволяющие судить об устойчивости решения $x = y = 0$ системы (2) (или о существовании периодических решений этой системы) по соответствующим свойствам систем (1) и (3). Приведем для примера некоторые результаты. Если $x = y = 0$ есть единственная особая точка системы (1) и в области (4) выполняются неравенства

$$X_1 X_2 \geqslant 0,\quad \begin{vmatrix} X_1 X_2 \\ Y_1 Y_2 \end{vmatrix} \leqslant 0, \tag{5}$$

то решение $x = y = 0$ системы (2) устойчиво. При некотором дополнительном условии, обеспечивающем определенную положительность формы $X_2^2 + Y_2^2$, условия (5) определяют асимптотическую устойчивость решения $x = y = 0$ и при $H = \infty$ — устойчивость в большом (при наличии соответствующего свойства у системы (1)). Если система (2) автономна, $x = y = 0$ — единственная особая точка систем (1), (2) и (3) системы (1) и (3) имеют периодические траектории C_1, C_3 соответственно, C_1 лежит внутри C_3 и в области (4) при $H = \infty$ выполняются неравенства (5) и

$$X_2 X_3 \geqslant 0,\quad \begin{vmatrix} X_2 X_3 \\ Y_2 Y_3 \end{vmatrix} \leqslant 0,$$

то система (2) имеет по крайней мере одну периодическую траекторию, лежащую в замкнутой области G, ограниченной кривыми C_1, C_3. Приводятся условия устойчивости и существования периодических решений в частных случаях, когда системы (1), (2), (3) сводятся к уравнению второго порядка.

Н. Н. Красовский

8797. Свободные колебания при сильно нелинейном демпфировании. З е м б а (Free vibration with damping of marked non-linear character. Z i e m b a S t e f a n), Arch. mech. stosowanej, 1957, 9, № 5, 525—548 (англ.; рез. польск., русск.)

Методом фазовой плоскости проводится качественное исследование поведения при $t \to \infty$ решений уравнения

$$A\ddot{y} + (B + F(\dot{y}))\dot{y} + Cy = 0, \tag{1}$$

где $A > 0$, $C > 0$, $B \geqslant 0$, $F(v) \geqslant 0$ — четная функция, убывающая при $v > 0$. Случай, когда $F(v)$ — возрастающая, содержится в теореме Сансоне (Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II, М., Изд-во ин. лит., 1954, 300—309; РЖМат, 1955, 2676 К).

Один из результатов: Если $B + F(v) \geqslant 2\sqrt{AC}$ при $0 < v \leqslant V$, где $V > 0$, $B + F(v) < 2\sqrt{AC}$ при $v > V$, то каждое решение уравнения (1) стремится к нулю при $t \to \infty$ и на интервале (t_0, ∞) обращается в нуль лишь конечное число раз, т. е. колебательная система, сделав конечное число колебаний, монотонно приближается к положению равновесия.

Остальные результаты аналогичны результатам Сансоне (цит. выше). А. Ф. Филиппов

8798. Некоторые достаточные условия существования предельных циклов. Ж е л е з н о в Е. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 56—59

Рассматривается система

$$\dot{x} = y - F(x),\quad \dot{y} = -g(x). \tag{1}$$

Функции $F(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $-\infty < x < +\infty$ и удовлетворяют условиям, обеспечивающим единственность.

Т е о р е м а. Система (1) имеет предельный цикл, если функции $F(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

1) $xg(x) > 0$, $xF(x) > 0$, $|x| < \delta$;

2) существует такое число $c > 0$ и постоянное M, что

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left[F(x) + c\int_0^x g(x)\,dx\right] < M;$$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[-F(x) - \int_0^x \frac{g(x)\,dx}{y_0 - F(x)}\right] = -\infty$ при достаточно больших y_0;

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[-F(x) - \int_0^x \frac{g(x)\,dx}{y_1 - F(x)}\right] = \infty$ при отрицательных и достаточно больших по абсолютной величине y_1.

В. В. Немыцкий

8799. Локальные сжатия и теорема Пуанкаре. Ш т е р н б е р г (Local contractions and a theorem of Poincaré. S t e r n b e r g S h l o m o), Amer. J. Math., 1957, 79, № 4, 809—824 (англ.)

Пусть

$$dx_i/dt = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),\quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $X_i = \lambda_i x_i +$ члены высших порядков. Изучается вопрос о существовании преобразования координат, приводящего (1) к линейному виду

$$dy_i/dt = \lambda_i y_i.$$

С помощью топологических рассмотрений автор устанавливает ряд обобщений теорем Пуанкаре и Ляпунова, относящихся к аналитическому случаю. Например:

Т е о р е м а. Если все $\operatorname{Re}\lambda_i$ имеют одинаковый знак и $\lambda_j \neq \sum m_i \lambda_i$ при любых натуральных m_i, таких, что $\sum m_i > 1$, и если $X_i \subset C^k$, где $k > \Lambda/\lambda$, $\Lambda = \max|\operatorname{Re}\lambda_i|$, $\lambda = \min|\operatorname{Re}\lambda_i|$, то существует искомое преобразование класса C^k.

Т е о р е м а. Если $\lambda_i < 0$ для $i \leqslant p$, то существует аналогичное преобразование, переводящее (1) в

$$dy_i/dt = \lambda_i y_i + G(y_1, \ldots, y_n),$$

где $G(y_1, y_2, \ldots, y_p, 0, \ldots, 0) = 0$ $i > p$.

Р. Э. Виноград

8800. О взаимодействии нелинейных колебаний. М и н о р с к и й (Sur l'interaction des oscillations non-linéares. M i n o r s k y N i c o l a s), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1953—1954 (1955), 25, 145—163 (франц.; рез. итал.)

Автор ставит задачу: из анализа зависимости периодических решений (циклов) нелинейного дифференциального уравнения от параметров уравнения вывести закон, по которому указанные циклы представимы как результат взаимодействия циклов, порождаемых уравнением при некоторых частных значениях параметров. Такой закон должен был бы соответствовать закону суперпозиции решений линейных уравнений.

Реферируемая статья посвящена некоторым подходам к решению одного частного случая указанной выше общей задачи.

После вводных замечаний, посвященных беглому описанию возможных ситуаций в семействе циклов уравнения нелинейных колебаний, зависящего от параметра, автор обращается к изучению уравнения

$$x'' + e(x^2 - 1)x' + [1 + (a - cx^2)\cos 2t]x = 0 \quad (' \equiv d/dt), \qquad (1)$$

которое названо им уравнением Ван-дер-Поля—Матье. Разыскивается связь между циклами уравнения (1) общего вида и его специализаций — уравнения Ван-дер-Поля ($a = c = 0$) и нелинейного уравнения Матье ($e = 0$). Исследование ведется с помощью развитого автором стробоскопического метода, основанного на принципе гармонической линеаризации Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.

В предположении, что a, c, $e = O(\varepsilon)$, где ε — малый параметр, определяются первые приближения амплитуды и частоты устойчивых циклов (1). Детально изучается расположение циклов. Среди циклов выделяется ближайший к единственному состоянию равновесия (1). Производится разбиение пространства параметров (точнее — пересечения бесконечно малой окрестности начала с первым и третьим) $ac > 0$, $e > 0$ (октантами пространства параметров) уравнения (1) на области, в которых сохраняется качественная структура семейства решений (1). Исследуются точки бифуркации.

Особое внимание уделяется физическому истолкованию полученных (в первом приближении) результатов.

Статья по содержанию близка к ранее опубликованной работе (РЖМат, 1955, 215). Библ. 18 назв. Замечания референта. Первая часть уравнения (3.1) и соответствующих уравнений дальше должна иметь дополнительный множитель (ρ), что ведет к появлению новой особой точки (неустойчивой) у системы (3.1)—(3.2). На стр. 149, строка 13 снизу, должно быть (3) $\rho_{03} = A/c$. Реферируемая работа нашла развитие в статье Фуруя (РЖМат, 1956, 4487).

Ю. С. Богданов

8801. **О комбинационных нелинейных колебаниях. Коломбо** (Sulle oscillazioni non-lineari di combinazione. Colombo Giuseppe), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte 1, 1957, 27, 162—175 (итал.)

Рассматривается уравнение вида

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(t, x, \dot{x}, \varepsilon),$$

где f — периодическая по t с периодом T кратным 2π, а также различные частные случаи этого уравнения. Изучается случай простого субгармонического резонанса. Устанавливаются общие критерии для определения существования периодических решений периода T или nT и изучается их устойчивость.

Проблема сводится к анализу некоторых преобразований уравнения (1) с точки зрения единственности.

Ю. А. Митропольский

8802. **Нелинейные системы второго порядка. Применение к электронике. Сидериадес** (Systèmes non linéaires de deuxième ordre. Applications à l'électronique. Sideriades Lefteri), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 23, 1850—1852 (франц.)

Рассматриваются системы вида

$$[m]\Gamma + [f]V + [F](Z - Z_0) = 0,$$

где $[m]$, $[f]$, $[F]$ — квадратные матрицы, или эквивалентная ей система

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{du}{\overline{U}{\overline{W}}} = \frac{dv}{\overline{V}{\overline{W}}} = dt,$$

где U, V — линейные формы от u и v ($W = \text{const}$, если $[m] = \text{const}$).

Автор обсуждает возможность применения к этим системам топологических методов. Приводятся некоторые общие рассуждения о применимости рассматриваемой теории к задачам механики и электротехники.

Ю. А. Митропольский

8803. **О линейных возмущениях. Винтнер** (On linear perturbations. Wintner Aurel), Quart. Appl. Math., 1958, 15, № 4, 428—430 (англ.)

Пусть $x = u(t)$ и $x = v(t)$ — два линейно независимых решения уравнения

$$x'' + f(t)x = 0.$$

Насколько можно изменить коэффициент $f(t)$, чтобы асимптотика решений при $t \to \infty$ сохранилась? Имеет место теорема:

Если

$$\int^{\infty} |f - g| \{|u|^2 + |v|^2\} dt < \infty,$$

то общее решение уравнения

$$y'' + g(t)y = 0$$

может быть представлено в виде

$$y = c_1 u(t) + c_2 v(t) + o(|u| + |v|),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные ($f(t)$ и $(g(t)$ предполагаются непрерывными при $t \geqslant t_0$).

И. М. Соболь

8804. **Множества, заполненные асимптотическими интегралами обыкновенных дифференциальных уравнений. Плись А.**, Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 11, 741—744

Рассматривается система

$$x' = f(x, y, t),\ y' = g(x, y, t),$$

где x и f — k-мерные, а y и g — m-мерные векторы. Функции f и g предполагаются непрерывными на открытом множестве S, через каждую точку которого проходит единственная интегральная кривая системы. Если точки (x, y, t) и $(\bar{x}, \bar{y}, t)$ лежат в S, то

$$[g(x, y, t) - g(\bar{x}, \bar{y}, t)](y - \bar{y}) \geqslant \alpha(t)(y - \bar{y})^2,$$

при $|x - \bar{x}| \leqslant |y - \bar{y}|$

$$[f(x, y, t) - f(\bar{x}, \bar{y}, t)](x - \bar{x}) \leqslant \alpha(t)(x - \bar{x})^2,$$

при $|x - \bar{x}| = |y - \bar{y}|$.

Функция $\alpha(t)$ суммируема на каждом конечном интервале.

При этих предположениях легко доказывается теорема: Пусть $x(t)$, $y(t)$ и $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ — решения, остающиеся при $a \leqslant t < b$ в области S. Если

$$|x(a) - \bar{x}(a)| \leqslant |y(a) - \bar{y}(a)|,$$

то при всех значениях $t\,(a \leqslant t < b)$

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leqslant |y(t) - \bar{y}(t)|$$

и

$$|y(t) - \bar{y}(t)| \geqslant |y(a) - \bar{y}(a)| \exp \int_0^t \alpha(s)\,ds.$$

Эта теорема используется для исследования множества решений, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \to \infty} |y(t)| \exp\left(-\int_a^t \alpha(e)\,ds\right) = 0.$$

И. М. Соболь

8805. **Теорема об асимптотическом поведении решений систем дифференциальных уравнений. Альбрехт Ф.**, Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 11, 729—731

Известный топологический принцип Важевского обобщается на случай, когда существуют точки внутреннего скольжения, т. е. (грубо говоря) точки, в которых интегральная кривая касается границы и затем вновь уходит внутрь области. И. М. Соболь

8806. **К вопросу об асимптотическом представлении решений системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Шкиль Н. И.** (До питання про асимптотичне представлення розв'язків системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь. Шкіль М. І.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 2, 123—127) (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается вопрос об асимптотическом представлении решений системы уравнений

$$dx/dt = A(\tau, \varepsilon)\,x + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)\,e^{i\theta}, \qquad (1)$$

где x — четырехмерный вектор, $A(\tau, \varepsilon)$ — действительная квадратная матрица четвертого порядка, $B(\tau, \varepsilon)$ — четырехмерный вектор, причем допускается существование формальных разложений:

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau), \quad B(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_s(\tau, \varepsilon), \qquad (2)$$

$\tau = \varepsilon t$, $0 \leqslant \tau \leqslant L$, ε — действительный малый параметр, $\dfrac{d\theta}{dt} = k(\tau) > 0$, в случае, если один корень $\lambda_1(\tau)$ уравнения

$$\mathrm{Det}\,|A_0(\tau) - \lambda E| = 0 \qquad (3)$$

второй кратности и чисто мнимый.

В зависимости от значений этого корня и функций $ik(\tau)$ на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$ рассматриваются два случая — «резонансный», когда при некотором значении $\tau \in [0, L]$ $\lambda_1(\tau) = ik(\tau)$, и «нерезонансный», когда ни при каких значениях $\tau \in [0, L]$ $ik(\tau) \neq \lambda_\nu(\tau)$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$. Ю. А. Митропольский

8807. **Об асимптотических свойствах интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений. (Реферат лекции проф. К. В. Аткинсона). Курцвейль** (O asymptotických vlastnostech integrálů obyčejných diferenciálnich rovnic. Referát o přednašce prof K. V. Atkinsona. Kurzweil Jaroslav), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 2, 252—255 (чешск.)

Краткий обзор небольшого числа асимптотических свойств решений некоторых уравнений, например: если $\dot{y} = A(t)\,y$ и $\int^{\infty} \|A\|\,dt < \infty$, то существуют $\lim_{t\to\infty} y(t)$; если $\ddot{y} + [1 + g(t)]\,y = 0$ и $\int^{\infty} |g|\,dt < \infty$, то $y = B\cos\left(\int_0^t \sqrt{1 + g(u)}\,du + c\right) + o(1)$, и т. п.

Р. Э. Виноград

8808. **Об асимптотическом поведении интегралов дифференциального уравнения $u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$. Опяль** (Sur l'allure asymptotique des intégrales de l'équation différentielle $u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$. Opial Z.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, cl. 3, 5, № 9, 847—853 (франц.; рез. русск.)

Пусть коэффициенты уравнения

$$u'' + a(t)\,u' + b(t)\,u = 0$$

непрерывны при $t \geqslant 0$ и $0 < c \leqslant b(t) \leqslant C$, $2\sqrt{C} \leqslant a(t)$. Тогда все решения $u(t)$ при $t \to \infty$ стремятся к конечным пределам. Обозначим $A(t) = \exp\int_0^t a(s)\,ds$. Если интеграл $\int_0^{\infty} \dfrac{ds}{A(s)} \int_0^s A(\tau)\,d\tau$ расходится, то все решения стремятся к нулю; если этот интеграл сходится, то найдется решение $u(t)$, стремящееся к 1.

Примечание референта. Если рассматриваемое уравнение привести к самосопряженному виду (т. е. умножить на $A(t)$,) то легко видеть, что последнее утверждение — это частный случай леммы Винтнера (Wintner A., Duke Math. J., 1948, 15, № 1, 55—67). И. М. Соболь

8809. **Асимптотические формулы для линейных колебаний. Аткинсон** (Asymptotic formulae for linear oscillations. Atkinson F. V.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1957, 3, № 3, 105—111 (англ.)

Пусть в уравнении

$$\ddot{x} + \{f(t) + g(t)\}\,x = 0$$

$f(t) > 0$, $\dot{f}(t)$ и $g(t)$ непрерывны при $t \geqslant t_0$.

Теорема. Если $\dot{f}f^{-3/2} = h(t) + h_1(t)$, где функция $h(t)$ непрерывно дифференцируема,

$$\int_{t_0}^{\infty} |\dot{h}|\,dt < \infty, \quad -4 < h(\infty) < 4,$$

а

$$\int_{t_0}^{\infty} |h_1 f^{1/2}|\,dt < \infty \text{ и } \int_{t_0}^{\infty} |g f^{-1/2}|\,dt < \infty,$$

то общее решение при $t \to \infty$ имеет вид

$$x = Af^{-1/4}\cos\left\{\int_{t_0}^t f^{1/2}(1 - h^2/16)^{1/2}\,dt + B + o(1)\right\}.$$

В доказательстве используется замена независимого переменного $u = \int_{t_0}^t f^{1/2}\,dt$. Если $g(t)$ и $h_1(t)$, которые играют роль абсолютно интегрируемых добавок в новых переменных, равны нулю, то получается результат Хартмана и Винтнера (РЖМат, 1956, 4496).

Теорема. Если $F(t) \geqslant a > 0$, $\dot{F}$ непрерывна и существует постоянная $\beta < 3/2$ такая, что

$$\int^{\infty} |\ddot{F}F^{-3/2} - \beta\dot{F}^2F^{-5/2}|\,dt < \infty,$$

то решения уравнения $\ddot{x} + F(t)\,x = 0$ ограничены при $t \to \infty$.

Автор доказывает, что эта теорема обобщает условия ограниченности Соболя (Матем. сб., 1951, 28, № 3, 710), а последние являются более общими, чем критерий Гусарова (РЖМат, 1955, 734), передоказанный Белманом (РЖМат, 1956, 6564).

Примечание референта. Условия референта, с которыми автор сравнивает свою теорему,— частный случай более точной теоремы (доказанной там же). Если $\lim_{t\to\infty} \dot{F}F^{-3/2} = a$, где $|a| < 4$, при-

чем вариация $\dot{F}F^{-3/2}$ ограничена, то все решения $x = O(F^{-1/4})$.

Из условий последней теоремы реферируемой статьи, как показано самим Аткинсоном (РЖМат, 1956, 404), следует, что вариация $\dot{F}F^{-3/2}$ ограничена и $\alpha = 0$. Таким образом, эта теорема содержится в приведенной теореме референта. И. М. Соболь

8810. **Об устойчивости диссипативных систем. Пожарицкий Г. К.**, Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 4, 503—512

Исследуется устойчивость голономных систем, на которые, помимо консервативных сил, действуют также диссипативные силы с полной диссипацией.

Показывается, что система с диссипативными силами

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \qquad (1)$$

не допускает движений, в которых обобщенные скорости и координаты сохраняют свои начальные значения, причем обобщенные скорости не суть нули, и ставится вопрос о возможности приложения к системе дополнительных сил F_i так, чтобы система допускала движение

$$\dot{q}_1 = 0, \ \ldots, \ \dot{q}_k = 0, \ \dot{q}_{k+1} = \dot{q}^0_{k+1}, \ \ldots, \ \dot{q}_n = \dot{q}^0_n,$$

$$q_1 = q^0_1, \ \ldots, \ q_k = q^0_k, \ q_{k+1} = \dot{q}^0_{k+1}(t - t_0), \ \ldots,$$

$$q_n = \dot{q}^0_n (t - t_0), \qquad (2)$$

соответствующее случаю циклических переменных при отсутствии диссипативных сил. Выводятся условия для определения сил F_i. Исследуется устойчивость движения (2) системы (1) с присоединенными силами F_i. В исследовании устойчивости основную роль играют функции

$$W = \left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^0 \eta_i \eta_j + 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\right)^0 \eta_i \xi_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\right)^0 \xi_i \xi_j \right];$$

$$\overline{W} = \left[\sum_{i,j=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^0 \eta_i \eta_j + 2 \sum_{i,j=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\right)^0 \eta_i \xi_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\right)^0 \xi_i \xi_j \right]$$

$$\left(H = \sum_{i=1}^{n} (\partial L / \partial \dot{q}_i)\, \dot{q}_i - L \right),$$

используемые для построения функций, удовлетворяющих условиям теорем Ляпунова и Четаева об устойчивости (или неустойчивости). Отметим некоторые выводы: 1) если $\overline{W}$ — функция знакоопределенная, то движение (2), устойчивое при наличии консервативных сил, переходит в асимптотически устойчивое при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией и сил, уравновешивающих диссипативные на движении (2), 2) если $\overline{W}$ может принимать отрицательные значения, то при добавлении диссипативных и уравновешивающих (на (2)) сил, устойчивость, существовавшая лишь при консервативных силах, нарушается, а неустойчивость не стабилизируется.

Рассматривается пример механической системы (гибкий вал с маховиком при учете диссипативных сил).

Н. Н. Красовский

8811. **Об устойчивости периодических решений слабо нелинейных дифференциальных систем. Бейли, Гамбилл** (On stability of periodic solutions of weakly nonlinear differential systems. Bailey H. R., Gambill R. A.), J. Math. and Mech., 1957, 6, № 5, 655—668 (англ.)

Используя развитый Гамбиллом и Хейлом метод (РЖМат, 1958, 5714) последовательных приближений для нахождения периодических решений слабо нелинейных дифференциальных систем, а также теоремы Ляпунова, устанавливаются критерии асимптотической устойчивости периодических решений уравнений

$$\ddot{y}_i + \sigma_i^2 y_i = \varepsilon f_i(y_1, \ \ldots, \ y_n \ \dot{y}_1, \ \ldots, \ \dot{y}_n \ t, \ \varepsilon)$$
$$(i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n).$$

Метод иллюстрируется на примере системы уравнений

$$\ddot{y}_1 + \sigma_1^2 y_1 = \varepsilon\left(\alpha - \gamma y_2^2\right)\dot{y}_1 + p\cos t,$$

$$\ddot{y}_2 + \sigma_2^2 y_2 = \varepsilon\left(\delta - \rho y_1^2\right)\dot{y}_2 + r\cos 2t.$$

Ю. А. Митропольский

8812. **Об устойчивости периодических движений в критическом случае, когда характеристическое уравнение имеет одну пару чисто мнимых корней (упрощенный метод). Калинин С. В.**, Прикл. матем. и мех., 1957, 21, № 1, 125—128

Рассматриваются уравнения возмущенного движения

$$dx/dt = -\lambda y + X,$$

$$dy/dt = \lambda x + Y,$$

$$dx_s/dt = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s, \quad s = 1, \ \ldots, \ n, \ (1)$$

где λ — вещественное число, X, Y, X_s разлагаются в ряды по целым положительным степеням x, y, x_1, $\ldots$, x_n, начинающиеся с членов не ниже второго порядка, а коэффициенты этих разложений и p_{s1}, $\ldots$, p_{sn} суть периодические функции t с периодом ω. Все указанные коэффициенты представляются в виде

$$p = c + \varepsilon f(t),$$

где c — среднее значение функции p, функция $f(t)$ периодическая и ε — постоянная величина.

После осреднения периодических коэффициентов уравнения (1) за один период и замены x, y полярными координатами r, θ, автор приходит к уравнениям

$$\frac{dr}{d\theta} = rR, \ \frac{dx_s}{d\theta} = \frac{c_{s1}}{\lambda}x_1 + \ldots + \frac{c_{sn}}{\lambda}x_n + Q_s \qquad (2)$$

$$(s = 1, \ \ldots, \ n),$$

где разложение функций rR и Q_s по степеням r и x_1, $\ldots$, x_n начинаются с членов не ниже второго порядка, коэффициенты этих разложений суть многочлены относительно $\cos\theta$ и $\sin\theta$, а c_{s1}, $\ldots$, c_{sn} — средние значения коэффициентов p_{s1}, $\ldots$, p_{sn}.

Разложения rR и Q_s представляются следующим образом:

$$rR = (g + \varepsilon G)\, r^{2m+1} + p^{(1)}r + \ldots + p^{(m+1)}r^{m+1} +$$
$$+ Q + R^1, \qquad (3)$$

$$Q_s = P_s^{(1)}r + P_s^{(2)}r^2 + \ldots + P_s^{(m)}r^m + Q_s^1,$$

где g — постоянная величина, отличная от нуля, ε — некоторый параметр, G — периодическая функция θ с периодом 2π. $\left(\int_0^{2\pi} G d\theta = 0\right)$, $P^{(k)}$ и $P_s^{(k)}$ — линейные, а Q — квадратичная формы переменных $x_1, \ldots, x_n$ с периодическими по θ коэффициентами, разложения R^1, Q_s^1 не имеют членов ниже 3-го порядка, причем в линейных относительно x_s членах переменная r содержится в степенях не ниже $m+2$ и $m+1$ соответственно. (Ниже показывается, что наинизшая степень r нечетная).

Далее автор опять осредняет коэффициенты уравнений (3) за один период 2π и составляет для этих осредненных уравнений функцию Ляпунова V:

$$V = \frac{1}{2} r^2 + U^{(1)} r^2 + \ldots + U^{(m)} r^{m+1} + W, \qquad (4)$$

где $U^{(k)}$ линейные, а W — квадратичная формы переменных $x_1, \ldots, x_n$. При этом функции $U^{(k)}$ и W выбираются так, чтобы в выражении для производной $dV/d\theta$ в силу уравнений, получающихся из 2 после осреднения, совокупность членов наинизшего порядка имела вид $g\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)$. После этого автор рассматривает вопрос о характере производной функции V в силу исходных уравнений (1) и приходит к результату, что эта производная при достаточно малых $x_1, \ldots, x_n$ будет знакоопределенной функцией одного знака с постоянной g. Теорема Ляпунова позволяет тогда сформулировать следующий результат:

При $g < 0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а при $g > 0$ — неустойчиво.

Примечание референта. Следует заметить, что полученный результат можно считать строго доказанным лишь при достаточной малости параметра ε в формуле (2), т. е. в случае, когда периодические коэффициенты уравнения (1) близки к постоянным, на что автор не указывает. Ю. А. Рябов

8813. Об устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом. Репин Ю. М., Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 2, 253—261

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим временем

$$dx_i/dt = X_i(t, x_1(t-\tau_1(t)), \ldots, x_n(t-\tau_m(t)), \ldots$$
$$\ldots, x_n(t-\tau_m(t)), \qquad (1)$$

где функции $X_i(t, x_{kj})$ $(k = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$ определены и непрерывны в области

$$t \geqslant A,\ |x|_{1j} + \ldots + |x_{nj}| < H$$

и удовлетворяют условиям Липшица

$$\left|X_i\left(t, x_{kj}\right) - X_i\left(t, x_{kj}^0\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant L \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left|x_{kj} - x_{kj}^0\right|. \qquad (2)$$

Изучается задача о сохранении устойчивости решения $x = 0$ системы (1) при малых изменениях функций X_i и запаздываний $\tau_j(t)$ (запаздывания $\tau_j(t)$ предполагаются непрерывными, неотрицательными и ограниченными). Приведем некоторые результаты:

Теорема 1. Если решения системы (1) удовлетворяют неравенству

$$|x_1(t)| + \ldots + |x_n(t)| \leqslant B\delta e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (B,\ \alpha > 0) \qquad (3)$$

для всех начальных кривых $x_{i0}(t) = \varphi_i(t)$, $|\varphi_1(t)| + \ldots + |\varphi_n(t)| < \delta$ ($\delta > 0$ — любая достаточно малая постоянная) и

$$|X_i(t, x_{kj}) - Y_i(t, x_{kj})| \leqslant \sigma \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |x_{kj}|$$

при $\sum_{k=1}^{n} |x_{kj}| < h < H$, то при σ достаточно малом ($\sigma > 0$) решения системы

$$dy_i/dt = Y_i(t, y_1(t-\tau_1(t)), \ldots, y_1(t-\tau_m(t)), \ldots$$
$$\ldots, x_n(t-\tau_1(t)), \ldots, x_n(t-\tau_m(t))) \qquad (4)$$

также равномерно асимптотически устойчивы.

Теорема 2 утверждает, что при выполнении условий (3) асимптотическая устойчивость решения $x = 0$ системы (1) не нарушается при достаточно малых изменениях величины запаздываний $\tau_j(t)$.

Теорема 3 утверждает, что в случае равномерной асимптотической устойчивости решения $x = 0$ системы (1) это решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях запаздываний. Последнее означает, что в случае равномерной асимптотической устойчивости решения $x = 0$ системы (1) для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать числа $\delta > 0$ и $\rho > 0$ такие, что будет выполняться неравенство $\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| < \varepsilon$, если только начальные кривые $x_i = \varphi_i(t)$ удовлетворяют неравенству $\sum_{i=1}^{n} (|\varphi_1(t)| + \ldots + |\varphi_n(t)|) < \delta$, а «возмущения» запаздываний — неравенству $|\tau_j(t) - \tau_j^0(t)| < \rho$.

Доказательства опираются на обобщение на случай уравнений с запаздываниями времени t метода, предложенного С. П. Горшиным (Изв. АН Каз. ССР, 1948, 56) для исследования устойчивости при постоянно действующих возмущениях обыкновенных дифференциальных уравнений. И. Н. Красовский

8814. Условно устойчивые регулируемые системы (Об одном классе оптимальных регулируемых систем). Летов А. М., Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 7, 601—614

Рассматривается регулируемая система

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\xi \quad (k = 1, \ldots, n),$$
$$\xi = Kf(t)\,\eta_1, \qquad (1)$$

где $f(t) = 1$ при $t \leqslant t_*$ и $f(t) = -1$ при $t > t_*$. Система (1) при $f(t) = 1$ оптимально устойчива.

Рассматривается случай, когда при $f(t) = -1$ один из корней характеристического уравнения системы (1) имеет положительную вещественную часть. При этом вещественные части остальных корней по абсолютной величине становятся больше вещественных частей соответствующих корней системы (1) при $f(t) = +1$. При $t = t_*$ значения координат решения системы (1) при $f(t) = +1$ рассматриваются как начальные уравнения, определяющие решение системы (1) при $f(t) = -1$. Эти значения могут быть таковы, что в решении системы (1) при $f(t) = -1$ отсутствует парциальное колебание, отвечающее корню с положительной вещественной частью. Момент времени t_*, таким образом, определяется условием достижения координатами системы (1) при $f(t) = +1$ таких значений. Получено уравнение, определяющее t_*. Рассмотрены примеры и предложена структурная схема вычислительного устройства для определения момента переключения t_*. Б. С. Разумихин

8815. Об устойчивости в «целом» одной системы регулирования. Тузов А. П., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 1, 57—75, 209 (рез. англ.)

Рассматривается система уравнений

$$dx/dt = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + f(y),$$
$$dy/dt = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \qquad (1)$$
$$dz/dt = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,$$

где a_{ik} — постоянные, $f(y)$ — функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решений. Кроме того, функция $f(y)$ удовлетворяет неравенству $\alpha y^2 < yf(y) < \beta y^2$ при $y \neq 0$, где α, β — границы изменения параметра a, при котором характеристическое уравнение линейной системы, получающейся из (1) заменой $f(y)$ на ay, имеет корни с отрицательными вещественными частями. Рассматриваются различные случаи соотношений между параметрами a_{ik} (9 случаев), и в каждом из рассмотренных случаев устанавливаются условия устойчивости решения $x = y = z = 0$, причем указывается область начальных возмущений («в целом», «в большом» и т. д.), относительно которых имеет место устойчивость. Исследование опирается на метод функций Ляпунова.

Н. Н. Красовский

8816. Применение второго метода Ляпунова в динамических реакторах. Эрген, Липкин, Ноэл (Applications of Liapounov's second method in reactor dynamics. Ergen W. K., Lipkin H. J., Nohel J. A.), J. Math. and Phys., 1957, 36, № 1, 36—48 (англ.)

Применяется второй метод Ляпунова для установления устойчивости и асимптотической устойчивости температурного и энергетического режимов в динамических реакторах.

Показано, что при $\alpha > 0$, $\tau > 0$, $\varepsilon > 0$ решение $P = 1$, $T = 0$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \log P = -\dfrac{\alpha}{\tau} T, \\ \varepsilon \dfrac{dT}{dt} = P - 1 \end{cases} \tag{1}$$

устойчиво, где P — энергия, а T — температура однородного реактора.

Если $\alpha > 0$, $\tau > 0$, $\varepsilon > 0$, то решение $P = 1$, $T = 0$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \log P = -\dfrac{\alpha}{\tau} T, \\ \varepsilon \dfrac{dT}{dt} = P - T - 1 \end{cases} \tag{2}$$

будет асимптотически устойчивым, где P и T есть энергия и температура в однородном реакторе с охлаждением по закону Ньютона.

Рассмотрение неоднородного реактора приводит авторов к системе

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \log P = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j T_j, \\ \varepsilon_i \dfrac{dT_i}{dt} = \eta_i (P - 1) - \sum_{j=1}^{n} X_{ij} (T_i - T_j), \\ \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{3}$$

где $X_{ij} = X_{ji}$, $\sum_{i=1}^{n} \eta_i = 1$. Для системы (3) авторы проводят исследование об асимптотической устойчивости решения $P = 1$, $T_1 = \ldots = T_n = 0$ лишь при $n = 2, 3$. Библ. 8 назв.

В. И. Зубов

8817. Об устойчивости периодических движений в одном специальном случае. Старжинский В. М., Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 5, 720—722

Путем распространения метода Ляпунова оценки характеристической постоянной на общий случай системы двух линейных уравнений первого порядка

$$du/dt = P(t)\,u; \quad u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad P(t + \omega) = P(t)$$

были ранее выведены критерии устойчивости тривиального решения этой системы (РЖМат, 1955, 213, 2198); в предположении

$$\int_0^{\omega} [p_{11}(t) + p_{22}(t)]\, dt < 0.$$

В реферируемой статье содержится замечание, что полученные результаты распространяются и на случай, когда $\int_0^{\omega} [p_{11}(t) + p_{22}(t)]\, dt = 0$. Автор отмечает, что идея доказательства возникла из беседы с М. Я. Леоновым.

В. И. Бурдина

8818. Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. Гермаидзе В. Е., Красовский Н. Н., Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 6, 769—774

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = X_i(x_1, \ldots, x_n t) + R_i(x_1, \ldots, x_n, t), \tag{1}$$

где функции X_i непрерывны, удовлетворяют условиям Липшица, обращаются в нуль в начале координат.

Наряду с системой (1) рассматривается система

$$dx_i/dt = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \tag{2}$$

Нулевое решение системы (2) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем, если для любой пары чисел $\varepsilon > 0$, $T > 0$ можно указывать числа $\delta > 0$, $\eta > 0$ такие, что при выполнении неравенства $\int_t^{t+T} \varphi(\xi)\, d\xi < \eta$, где $\varphi(t)$ — какая-либо непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$|R_i(x_1, \ldots, x_n, t)| \leqslant \varphi(t) \text{ в области } \|x\| < \varepsilon, \tag{3}$$

каждое решение $x(x_0, t_0, t)$ система (1) с начальными данными $\|x_0\| < \delta$ удовлетворяет при всех $t \geqslant t_0$ неравенству $\|x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon$.

Доказано, что если нулевое решение системы (2) равномерно асимптотически устойчиво, то оно устойчиво при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем. Аналогичная задача рассматривается для уравнения с запаздываниями.

Пусть теперь функции X_i системы (1) будут периодическими, а функции R_i удовлетворяют условиям Липшица. Пусть существует по крайней мере одно число $\tau > 0$ такое, что при каждом фиксированном $x = x^0$ выполняется для всех $t \geqslant t_0$ равенство

$$\int_t^{t+\tau} R_i(x^0, \xi)\, d\xi = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Теорема. Если нулевое решение системы (2) равномерно асимптотически устойчиво, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $\delta > 0$ и $\tau_0 > 0$ такие, что решения $x(x_0, t_0, t)$ системы (1) с начальными данными, удовлетворяющими неравенству $\|x_0\| \leqslant \delta$, будут удовлетворять при всех $t \geqslant t_0$ неравенству $\|x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon$, коль скоро условие (4) выполняется хотя бы для одного $\tau \leqslant \tau_0$.

Эта теорема говорит о том, что при наложении на равномерно асимптотически устойчивую систему достаточно быстрых колебаний, хотя бы и не малой амплитуды, устойчивость этой системы не нарушается.

Е. А. Барбашин

8819. Об обращении теоремы Ляпунова об устойчивости и теоремы Персидского о равномерной устойчивости. Курцвейль Ярослав,

Вркоч Иво, Чехосл. матем. ж., 1957, 7, № 2, 254—272 (рез. англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(t, x), \qquad (1)$$

где x, X — векторы $\{x_1, \ldots, x_n\}$ $\{X_1, \ldots, X_n\}$ с нормой $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$. Функции X_i определены и непрерывны в области $G = E(\|x\| < h,\ t \geqslant 0)$. Выясняются исчерпывающим образом условия существования функций $v(x, t)$ из теорем Ляпунова об устойчивости (Общая задача об устойчивости движения, М.—Л. Гостехиздат, 1950) и Персидского о равномерной устойчивости (Докл. АН СССР, 14, № 9, 1937). Доказываются необходимые и достаточные условия существования этих функций. Изучается вопрос о гладкости функций V, причем устанавливается следующий интересный факт: если существует непрерывная функция $V(x, t)$, удовлетворяющая условиям одной из цитированных теорем, то существует и функция $V^*(x, t)$, удовлетворяющая тем же условиям и обладающая частными производными всех порядков в области G. Показывается, что непрерывная функция Ляпунова не обязательно существует в случае устойчивости, если функции X_i предполагать лишь непрерывными. Если добавить некоторое дополнительное условие (выполняющееся, в частности, в случае единственности решений), то непрерывная функция Ляпунова есть и достаточное и необходимое условие устойчивости. Н. Н. Красовский

8820. **О периодических решениях уравнения вынужденных колебаний. Розенберг** (On the periodic solutions of the forced oscillator equation. Rosenberg R. M.), Quart. Appl. Math., 1958, 15, № 4, 341—354 (англ.)

Рассматриваются периодические решения нелинейного уравнения

$$\ddot{x} + f(x) = P_0 \cos \omega t, \qquad (1)$$

которое часто встречается в различных задачах теории колебаний. Разработаны методы приближенного построения периодических решений. Для периодических решений (1) вводится следующая классификация: решение называется субгармоническим порядка $\frac{1}{r}$ (r — целое число), если в разложении решения в ряд Фурье содержится член $A_r \cos(\omega_r t + \varphi_r)$ ($\omega_r = \omega/r$). Если $x = A_r \cos\left(\frac{\omega}{r} t + \varphi_r\right) + \sum_{i \neq r} A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ и $|A_r| \geqslant |A_i|$ $(i \neq r)$, то решение называется сильно субгармоническим. Если $A_r \neq 0$, $A_i = 0$ $(i \neq r)$, то решение называется чисто субгармоническим. Рассматриваются также решения, имеющие период $2\pi r/\omega$, разложение которых в ряд Фурье имеет вид

$$x = B_0 + \sum_{j=1, 2, \ldots} B_j \cos\left(\frac{j\omega}{r} t + \varphi_j\right).$$

В качестве основной нелинейной модели рассматриваются уравнения вида

$$\ddot{x} + f_r(x) = P_0 \cos \omega t, \qquad (2)$$

где $f_r(x) = \sum_n^r \gamma_r^n x^n$, которые имеют чисто субгармонические решения $x = x_0 \cos \frac{\omega}{r} t$. Указывается метод нахождения коэффициентов функций $f_r(x)$. Показано, что эти функции определяются однозначно. Приведена таблица коэффициентов для значений r от 1 до 9. Далее показано, как с помощью уравнений типа (2) можно находить приближения для периодических решений (1) различных типов. Разработаны некоторые графические методы, с помощью которых можно производить соответствующие вычисления. Библ. 22 назв. В. М. Волосов

8821. **Замечание к некоторым работам по системам линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Якубович В. А.,** Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 5, 707—713

Анализируются появившиеся в недавнее время работы итальянских математиков Чезари, Хейла и Гамбилла (РЖМат, 1955, 5783, 5784, 5785) по устойчивости линейных систем с периодическими коэффициентами.

Автор указывает, что содержащиеся в упомянутых работах результаты прямо следуют из хорошо известной теоремы Ляпунова, согласно которой характеристическое уравнение рассматриваемых систем является возвратным. Отмечается также, что советскими математиками были получены в указанной области гораздо более глубокие результаты. В статье содержатся и некоторые новые факты. В. Б. Лидский

8822. **О периодических решениях системы нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. Задирака** (Про періодичні розв'язки системи нелинійних диференціальних рівнянь з малим параметром при похідних. Задирака К. В.), Доповіді АН УРСР, № 2, 1958, 131—134 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx}{ds} = f(t, x, z), \quad \mu \frac{dz}{dt} = F(t, x, z) \qquad (1)$$

(μ — малый параметр) и вырожденная система ($\mu = 0$)

$$\frac{dx}{dt} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} = \varphi(t, \mathbf{x}), \qquad (2)$$

где $\mathbf{x}$ и f — n-мерные векторы, z и F — m-мерные векторы, $z = \varphi(t, x)$ — корень уравнения $F(t, x, z) = 0$. Предполагается, что в области $-\infty < t < \infty$, $x \in G$, $|z - \varphi(t, x)| \leqslant \rho_0$, $0 < \mu < \mu^*$ функция f и ее производные по x и z непрерывны и ограничены, F и ее производные по t до второго порядка и по x, z до третьего порядка включительно непрерывны и ограничены, вектор φ и его производные по всем аргументам до второго порядка включительно непрерывны и ограничены, векторы f и F периодичны по t с периодом 2π, корни уравнения $\mathrm{Det}\|pE - u\| = 0$, где матрица $u(t, x) = F_z\big|_{z=0}$, удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\{p_i(t, x)\} \leqslant \alpha < 0$, система (2) имеет непрерывное изолированное периодическое решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ периода 2π, лежащее вместе со своей δ-окрестностью в указанной области. Решение $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{z}(t)$ изолировано в том смысле, что соответствующее уравнение в вариациях не имеет периодических решений.

При указанных условиях доказывается, что существует единственное периодическое решение $x = x(t, \mu)$, $z = z(t, \mu)$ системы (1) периода 2π, которое равномерно по t стремится к $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{z}(t)$ при $\mu \to 0$. При доказательстве используются некоторые результаты прежних работ автора, относящиеся к представлению интегральных многообразий систем вида (1).

Указывается, что эти результаты могут быть обобщены на тот случай, когда часть корней уравнения $\mathrm{Det}\|pE - u\| = 0$ имеет положительные действительные части, а у остальных действительные части отрицательны. В. М. Волосов

8823. **Обобщенное обыкновенное дифференциальное уравнение и непрерывная зависимость от параметра.**

Курцвейль (Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. Kurzweil Jaroslav), Чехосл. матем. ж., 1957, 7, № 3, 418—449 (англ.; рез. русск.)

Вводится обобщенный интеграл Перрона. Пусть $U(\tau, t)$ определена при $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $|t-\tau| \leqslant \delta(\tau)$, где $\delta(\tau) > 0$. Функция $M(\tau)$ называется верхней функцией, если существует такая функция $\delta'(t) > 0$, что

$$(\tau - \tau_0)(M(\tau) - M(\tau_0)) \geqslant (\tau - \tau_0)(U(\tau, \tau_0) - U(\tau_0, \tau_0)$$

для $\tau_1 \leqslant \tau_0 \leqslant \tau_2$, $|\tau - \tau_0| \leqslant \delta'(\tau_0)$. Функция $m(\tau)$ называется нижней функцией, если она удовлетворяет обратному неравенству. Если верхние и нижние функции существуют и

$$\inf_{M(\tau)}(M(\tau_2) - M(\tau_1)) = \sup_{m(\tau)}(m(\tau_2) - m(\tau_1)) = a,$$

то число a называется обобщенным интегралом Перрона от DU и обозначается $\int_{\tau_1}^{\tau_2} DU(\tau, t)$.

Автор доказывает существование этого интеграла при некоторых предположениях относительно $U(\tau, t)$ и изучает его основные свойства.

Функция $x(t)$ называется решением обобщенного дифференциального уравнения

$$dx/d\tau = DF(x, \tau, t), \qquad (1)$$

если $x(\tau_2) - x(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} DF(x(\tau), \tau, t)$ для любых τ_1 и τ_2. Аналогично определяется решение системы дифференциальных уравнений. Если $f(x, t)$ непрерывна и если $F(x, \tau, t) = f(x, \tau)t$ (или $F(x, \tau, t) = \int_{\tau}^{t} f(x, s)\,ds$), то каждое решение уравнения $dx/d\tau = f(x, \tau)$ будет решением уравнения (1), и наоборот.

Рассматривается частный случай уравнения (1) — уравнение

$$dx/d\tau = DF(x, t). \qquad (2)$$

В предположении, что функция $F(x, t) - F(x, t_1)$ удовлетворяет условию Липшица по x, и при некоторых других ограничениях доказывается теорема существования решения уравнения (2) и теорема о непрерывной зависимости решения от параметра; для линейных уравнений доказывается теорема единственности.

Указанным методом автор обобщает теорему Красносельского и Крейна (РЖМат, 1956, 4493) о непрерывной зависимости решения от параметра. А. Ф. Филиппов

8824 Д. **Об одной специальной задаче для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Бекташи Т. Г.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. Азерб. ун-т, Баку, 1958

8825 Д. **Периодические решения уравнения Даффинга с вынуждающей силой, содержащей первую и третью гармоники. Йетт** (Periodic solutions of Duffing's equation with forcing term containing first and third harmonics. Yett Fowler Redford. — Abstr. doct. diss., Iowa State Coll., 1955), Iowa State Coll. J. Sci., 1957, **31**, № 3, 552—553 (англ.)

Резюме докторской диссертации. Методом малого параметра разыскиваются периодические решения $x = x(t)$ уравнения Дюффинга

$$\ddot{x} + Ax + Bx^3 + C\dot{x} = F_1\cos(\omega t + \varphi_1) + F_3\cos(3\omega t + \varphi_3),$$

$A > 0$, удовлетворяющие условию; $x(t_0) = E$, $\dot{x}(t_0) = 0$. Исследуется устойчивость этих решений.

Б. П. Демидович

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

8826. **Теорема сравнения для самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка. Рид** (A comparison theorem for self-adjoint differential equations of second order. Reid William T.), Ann. Math., 1957, 65, № 1, 197—202 (англ.)

На интервале J рассматриваются два дифференциальных уравнения

$$(R_\alpha(t)\,y'(t))' + P_\alpha(t)\,y(t) = 0, \quad \alpha = 1, 2. \qquad (1)$$

Функции $R_\alpha(t)$ положительны и непрерывно дифференцируемы. $P_\alpha(t)$ вещественны и непрерывны на J.

Точка t_1 называется фокусом для точки t_0 относительно уравнения (1), если существует нетривиальное решение $y_\alpha(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее условиям: $y'_\alpha(t_0) = 0$, $y_\alpha(t_1) = 0$. Через $T_\alpha^+(t_0)$ обозначается наименьший из фокусов точки t, расположенных справа от этой точки. ($T_\alpha^-(t_0)$ — наибольший из фокусов, расположенных слева от t_0).

Доказано, что если $\left(\frac{R_2}{R_1}\right)' \geqslant 0$, $P_1 \geqslant 0$, $\frac{P_2}{R_2} - \frac{P_1}{R_1} \leqslant 0$ на J, а $T_2^+(t_0)$ существует, то $T_1^+(t_0)$ также существует и $T_1^+(t_0) \leqslant T_2^+(t_0)$ (соответствующий результат получен для $T_1^-(t_0)$, $T_2^-(t_0)$).

Отсюда выводится несколько теорем об относительном расположении фокусов для пары уравнений вида (1).

Затем, сравнивая уравнение вида (1) на интервале $a \leqslant t \leqslant \infty$ с уравнением

$$(e^{mt}y')' + e^{mt}y(t) = 0, \qquad (2)$$

автор получает теоремы о колеблемости и неколеблемости решений. Приведем одну из них: Если существует такая положительная постоянная $m < 2$, что

$$|[(R \cdot P)^{1/2}]'/P| \leqslant m$$

при $a \leqslant t \leqslant \infty$, то все решения уравнения (1) колеблются на этом интервале и

$$\int_{t_1}^{t_2} [P(S)/R(s)]^{1/2} ds \leqslant 2g_m,$$

где t_1, t_2 — последовательные нули решения уравнения (1), а g_m зависит только от m. В. И. Карабегов

8827. **Пример линейного уравнения в частных производных с гладкими коэффициентами, не допускающего никакого решения. Леви** (An example of a smooth linear partial differential equation without solution. Lewy Hans), Ann. Math., 1957, 66, № 1, 155—158 (англ.)

Показывается, что если комплексное уравнение

$$L(u) \equiv -\frac{\partial u}{\partial x_1} - i\frac{\partial u}{\partial x_2} + 2i(x_1 + ix_2)\frac{\partial u}{\partial y_1} = \psi'(y_1),$$

в котором x_1, x_2, y_1 — действительные независимые переменные, $\psi(y_1)$ — действительная функция класса C^1, допускает комплексное решение $u(x_1, x_2, y_1)$ класса C^1 в окрестности точки $P = (0, 0, y_1^0)$, $y_1^0 > 0$, то $\psi(y_1)$ аналитична в точке P. На основании этого

результата строится уравнение вида $Lu = F(x_1, x_2, y_1)$, $F(x_1, x_2, y_1)$ — действительная функция класса C^∞ во всем пространстве переменных (x_1, x_2, y_1), которое не имеет решения класса $C^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, ни в какой открытой части пространства (x_1, x_2, y_1).

Б. В. Боярский

8828. **О построении интеграла линейного уравнения в частных производных первого порядка со счетным множеством независимых переменных. Жаутыков О. А.**, Уч. зап. Алма-Атинск. гос. пед. ин-т, 1957, 8, 32—41

Решается задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{k=1} a_k(t, x_1, x_2, \ldots) \frac{\partial z}{\partial x_k} = f(t, x_1, x_2, \ldots)$$

в предположении, что функции a_k и f удовлетворяют некоторым условиям (непрерывность, равномерная ограниченность, выполнимость некоторых неравенств типа условия Липшица как для самих функций, так и для их первых производных). Начальное значение искомой функции удовлетворяет аналогичным условиям. Решение дается на основании применения к системе

$$dx_k/dt = a_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

метода последовательных приближений с использованием непрерывной зависимости характеристик от начальных данных.

И. С. Аржаных

8829. **О преобразовании краевых задач для кругового кольца. Комацу** (Über eine Übertragung zwischen Randwertaufgaben für einen Kreisring. Komatu Yûsaku), Ködai Math. Semin Repts, 1954, № 4, 101—108 (нем.)

8830. **О преобразовании краевых задач для сферы. Кумацу, Мидзумото** (On transference between boundary value problems for a sphere. Komatu Yûsaku, Mizumoto Hisao), Ködai Math. Semin Repts, 1954, № 4, 115—120 (англ.)

8831. **Добавление к статье «Преобразование краевых задач». Комацу** (A supplement to «On transference of boundary value problems». Komatu Yûsaku), Ködai Math. Semin Repts, 1954, № 4, 97—100 (англ.)

См. РЖМат, 1956, 1378.

8832. **Об одной системе уравнений в частных производных. Крейсиг** (Über ein System partieller Differentialgleichungen. Kreyszig Erwin), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1957, 1, № 1, 46—53 (нем.)

Рассматривается некоторый подкласс E систем уравнений вида

$$u_{x\alpha x_\alpha} + u_{y_\alpha y_\alpha} + \varphi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) u = 0, \quad \alpha = 1, 2, \qquad (1)$$

где φ_1 и φ_2 — не равные нулю аналитические функции действительных переменных (x_1, y_1), (x_2, y_2). Определения класса E мы здесь не приводим ввиду его сложности; при $\varphi_\alpha \equiv 1$ система (1) принадлежит классу E. Показывается, что каждая система класса E обладает полной системой решений, которые являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений относительно каждой из переменных x_α, y_α. Порядок этих уравнений определяется свойствами φ_1 и φ_2. Для доказательства используются представления решений системы (1) через аналитические функции двух комплексных переменных $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ и $z_\alpha^* = x_\alpha - iy_\alpha$ в виде так называемых операторов Бергмана.

Б. В. Боярский

8833. **Новые методы интегрирования в конечном виде уравнений в частных производных. Фантаппье** (Les nouvelles méthodes d'intégration en termes finis, des équations aux dérivées partielles. Fantappié Luigi), 2-me colloq. équations aux dérivées patielles, CBRM, Bruxelles, 1954, Paris, 1955, 95—128 (франц.)

Автор дает обзор, проиллюстрированный примерами, трех новых методов интегрирования в конечном виде уравнений в частных производных, именно метода «внутренних» операторов, метода «характеристических операторов» и метода фундаментальных функций. Все эти методы основаны на теории аналитических функционалов, развиваемой уже больше тридцати лет автором и его учениками. Эта теория и ее приложения изложены в ряде работ, список которых прилагается в конце статьи. В частности, обстоятельное изложение методов, которым посвящена статья, имеется в монографии: Fantappié L., I funzionali analitici e le loro applicazioni alla risoluzione delle equazioni alle derivate parziali, Cours litographié tenu au «International Summer Centre», Varenna, 1954.

Пусть K — некоторый линейный оператор, определенный в некотором пространстве H функций $f(x)$. Предположим, что уравнение $\lambda\gamma - K\gamma = f$ допускает единственное решение $\gamma(x, \lambda) = L_\lambda f$, принадлежащее пространству H как функция x и аналитическое по параметру λ. Для любой функции $h(\lambda, x)$, аналитической относительно λ и принадлежащей H как функция от x, можно определить оператор

$$h(K, x) = SKh(\lambda, x)$$

следующей формулой

$$h(K, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C L_\lambda h(\lambda, x)\, d\lambda,$$

где C — соответствующим образом подобранная замкнутая кривая на плоскости комплексной переменной λ. В общих чертах метод «внутренних» операторов состоит в следующем: 1) преобразовать заданное дифференциальное уравнение в уравнение, в которое входят функции подходящего оператора K, 2) подставить λ вместо K в преобразованном уравнении, чтобы получить уравнение относительно параметра, которое можно надеяться решить, 3) применить оператор S_K к решению параметризованного уравнения, чтобы в результате получить решение заданного уравнения. Этот метод, в применении, например, к уравнению

$$z_{xy} + a(y) z_x + b(y) z_y + c(y) z = f(x, y),$$

если K — оператор интегрирования, позволяет решить задачу Дарбу посредством трех квадратур и подсчета одного вычета. Метод фундаментальных функций позволяет решать задачу Коши для всякой линейной системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами любого порядка и с любым числом независимых переменных.

J. Szarski

8834. **Решение задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных с весом больше единицы. Сидоров Ю. В.**, Успехи матем. наук, 1958, 13, № 2, 237

8835. **Вычетный метод решения краевых и смешанных задач для линейных дифференциальных уравнений и связанные с ним формулы разложения. Расулов М. Л.**, Успехи матем. наук, 1958, 13, № 2, 233—236

8836. **Некоторые советские работы по применению функционального анализа к дифференциальным уравнениям. Соболев С. Л.**, Шусюэ цзиньчжань, 1957, 3, № 4, 577—593 (кит.)

См. РЖМат, 1957, 8646

8837. Об одном применении теории операторного уравнения с частными производными. Халилов З. И., Докл. АН АзербССР, 1957, 13, № 5, 465—468 (рез. азерб.)

Заметка содержит замечание о том, что результаты работы автора (Докл. АН СССР, 1952, 85, № 5) справедливы, в частности, для следующей задачи:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\sum k_s \leqslant M} A_{ij}^{(k_1 \ldots k_n)}(t,\ y)\, \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} u_j(t,\ x,\ y)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\sum l_s \leqslant M_2} \int_0^1 \ldots(\alpha)\ldots \int_0^1 K_{ij\alpha}^{(l_1 \ldots l_m)}(t,\ y,\ \eta) \times$$

$$\times \frac{\partial^{l_1+\ldots+l_m} u_j}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}}\, d\eta + f_i(t,\ x,\ y),$$

$$u_i|_{t=0} = \varphi_i(x,\ y),$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ x = (x_1,\ \ldots,\ x_m);\ y = (y_1, y_2\ \ldots,\ y_n);$$

$$-\infty < x_r < \infty,\ 0 \leqslant y_s \leqslant 1;$$

функции $u_i(t,\ x,\ y)$, $f_i(t,\ x,\ y)$ определены в полосе $\{-\infty < x_r < \infty,\ r = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ 0 \leqslant y_s \leqslant 1,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $K_{ij\alpha}^{(l_1 \ldots l_m)}$ — в параллелепипеде $\{0 \leqslant y_s \leqslant 1;\ 0 \leqslant \eta_s \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $A_{ij}^{(k_1 \ldots k_m)}(t,\ y)$ — в параллелепипеде $(0 \leqslant y_s \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, если ядра $K_{ij\alpha}^{(l_1 \ldots l_m)}$ квадратично суммируемы по совокупности переменных y и η, а остальные функции входят, как функции аргумента y (при каждом (x, t)) в пространство $L_2(0, 1)$. С. Д. Эйдельман

8838. Об уравнениях с операторами, образующими острый угол. Соболевский П. Е., Докл. АН СССР, 1957, 116, № 5, 752—757

В статье вводится новое понятие: операторы A и B, действующие в гильбертовом пространстве H и имеющие область определения D, образуют острый угол, если они обращаются в нуль только в нуле и если $(Ax,\ Bx) \geqslant m\|Ax\| \cdot \|Bx\|$, где $m > 0$. Показывается, что новое понятие полезно при доказательстве теорем существования и при исследовании некоторых приближенных методов решения операторных уравнений. Указаны важные примеры операторов, образующих острый угол.

Теорема 1. Если линейные операторы A и B образуют острый угол, то их индексы дефекта одинаковы, т. е. одинаковы размерности ортогональных дополнений к множествам значений операторов A и B. При доказательстве этой теоремы автор отправляется от некоторых предложений М. Г. Крейна и рецензента (Крейн М. Г., Красносельский М. А. Успехи матем. наук, 1947, 12, вып. 3 (19)).

Пусть P_n — операторы ортогонального проектирования на инвариантные подпространства R_n самосопряженного оператора A, причем $\overline{UR_n} = H$; пусть A и B образуют острый угол. Тогда (теорема 2) уравнения $P_nBx = P_nf$ имеют решения x_n, которые по норме сходятся к решению уравнения $Bx = f$, а нормы невязок $Bx_n - f$ стремятся к нулю.

Аналогичное утверждение (теорема 3) имеет место, если в качестве приближенных решений $x_n(t)$ задачи $dx/dt + Bx = 0,\ x(0) = x_0 \in D$ рассматривать решения приближенной задачи $dx/dt + P_nBx = 0,\ x(0) = P_nx_0$.

Пусть нормально разрешимые операторы A и B образуют острый угол; тогда острый угол образуют и операторы $A + F_1$ и $A + F_2$, если F_1 и F_2 имеют достаточно малые нормы. Автор указывает условия (теорема 4), при которых острота угла сохраняется и при некоторых неограниченных возмущениях. В случае дифференциальных операторов A и B найденные условия означают, что острота угла сохраняется, если к операторам добавлять производные низших порядков, и одновременно добавлять единичный оператор, умноженный на достаточно большое число.

Через H_1 обозначается гильбертово пространство функций со значениями в H, интегрируемых с квадратом на $[0, T]$. Указаны условия (теорема 5), при которых операторы $d/dt + B(t) + F(t) + kJ$ и $d/dt + A(t)$ образуют в H_1 остый угол, если $B(t)$ и $A(t)$ образуют острый угол в пространстве H.

Общие теоремы позволяют автору указать новые условия существования решений у эллиптических и параболических уравнений (при меньших ограничениях на гладкость коэффициентов, чем это обычно делается), а также новые утверждения о сходимости метода Бубнова—Галеркина приближенного решения эллиптических и параболических уравнений. Для получения этих приложений автор устанавливает новое неравенство для дифференциальных операторов, представляющее самостоятельный интерес.

Через $\mathring{W}_2^2$ обозначается замыкание по норме W_2^2 множества трижды непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций, обращающихся в нуль на границе, где Ω — ограниченная односвязная область n-мерного пространства с достаточно гладкой границей. Рассматриваются действующие в L_2 и определенные на $\mathring{W}_2^2$ операторы

$$A \equiv -\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + a(x) I,$$

$$B \equiv -\sum_{i,\ k=i}^{n} b_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + b(x) I,$$

где a_{ik} и b_{ik} непрерывно дифференцируемы, а a_i, a, b_i, b — непрерывны, формы $\sum a_{ik}\xi_i\xi_k$ и $\sum b_{ik}\xi_i\xi_k$ положительно определены при каждом $x \in \bar{\Omega}$.

Теорема 6. Существуют такие числа m, $n > 0$, что для всех $u(x) \in \mathring{W}_2^2$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} AuBu\,dx \geqslant m \int_{\Omega} \sum_{i,\ k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right)^2 dx -$$

$$- n \int_{\Omega} \left[u^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right] dx.$$

Примечание референта. В статье изложены результаты, полученные автором в 1956 г. и доложенные на совещании при Воронежском университете в марте 1957 г. (РЖМат, 1958, 3423).

М. А. Красносельский

8839. Оператор Грина и решение задачи Дирихле. Шварц (L'opérateur de Green et la résolution du problème de Dirichlet. Schwartz Laurent) Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1955—56, 3, № 1, 1—4 (франц.)

Дословное воспроизведение статьи того же названия (РЖМат, 1957, 439). А. А. Дезин

8840. Предварительные сведения. Шварц (Rappels divers. Schwartz Laurent), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1955—1956, 3, № 2, 1— (франц.)

Пусть E — полное локально выпуклое топологическое векторное пространство; $\mathfrak{D}'_t(E)$ — пространство обобщенных функций от одной переменной t, со значениями в E. Если $T \in \mathfrak{D}'_t(E)$ и 1) носитель T принадлежит $[0, \infty]$, 2) выполняется (в соответствующем смысле) условие «не слишком быстрого возрастания», то для T определено преобразование Лапласа: $\bar{F}(p) = \langle T, e^{-pt} \rangle$. Если E — банахово, то справедлива теорема: $\bar{F}(p)$ — голоморфная функция p со значениями в E и

$$\|\bar{F}(p)\|_E \leqslant \text{полином от } |p| \text{ при } \xi = \operatorname{Re} p > \xi_0. \quad (1)$$

Обратно, если $\bar{F}(p)$ — голоморфная функция p со значениями в E и при некотором ξ_0 выполняется (1), то существует единственное $\bar{F} \in \mathfrak{D}'_t(E)$, удовлетворяющее условиям 1), 2), для которого $\bar{F}(p)$ является преобразованием Лапласа. Пусть G_{p^2} — функция Грина задачи Дирихле в области Ω для оператора $-\Delta + p^2$, рассматриваемая как элемент пространства $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}_1)$ отображений $\mathfrak{D}'_1$ (пространства правых частей, см. РЖМат, 1957, 439) в $\mathfrak{D}_1$ (пространство решений). В $\mathfrak{C}$ может быть введена топология банахова пространства. Взяв $\mathfrak{C}$ в качестве E и используя оценки $\|G_{p^2}\|_\alpha$ в зависимости от p, удается показать, что существует $\bar{G}_t \in \mathfrak{D}'(\mathfrak{C}(\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}_1))$, для которой G_{p^2} является преобразованием Лапласа. А. А. Дезин

8841. Обращение преобразования Лапласа для G_{p^2}. Шварц (Effet d'une transformation de Laplace inverse sur G_{p^2}. Schwartz Laurent), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1955—1956, 3, № 3, 1—2 (франц.)

Пусть J — оператор канонического вложения пространства $\mathfrak{D}_1$ (реф. 8840) в $\mathfrak{D}'_1$; I (соответственно I') — тождественный оператор в $\mathfrak{D}_1(\mathfrak{D}'_1)$. Пусть обратное преобразование Лапласа, осуществленное над G_{p^2}, обозначено $G(t)$ $(G(t) \in \mathfrak{D}'_1(\mathfrak{C}(\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}_1)))$. Если $\square \equiv \equiv J\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ (элемент $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}'_1)$), то для $G(t)$ справедливы символические соотношения: (1) $G(t)\square = I \times \delta(t)$, (2) $\square G(t) = I' \times \delta(t)$, смысл которых заключается в том, что для $A \in \mathfrak{D}'_{t+}$ (+ обозначает дополнительное условие: носитель A — нуль вне $[0, \infty]$) свертка по t с правыми частями (1) или (2) дает снова A. А. А. Дезин

8842. «Грубая» задача Коши и выражение G как функции от t. Шварц (Probléme de Cauchy grossier et expression de G comme fonction de t. Schwartz Laurent), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1955—1956, 3, № 4, 1—4 (франц.)

Задача: найти $X \in \mathfrak{D}'_{t+}(\mathfrak{D}_1)$, удовлетворяющий уравнению $\square X \equiv A$; $A \in \mathfrak{D}'_{t+}(\mathfrak{D}'_1)$ (реф. 8841). Доказывается, что решение задачи существует, единственно и задается формулой $X = G(t) \underset{(t)}{*} A$, где свертка понимается в соответствующем смысле. Исследуются свойства X в зависимости от A; выясняется, что если рассматривать значения $G(t)$ не в $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}_1)$, а в $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_1)$, то можно ослабить требования на A, но тогда значения X будут лежать в $\mathfrak{D}'_1$ вместо $\mathfrak{D}'_1$. Вместе с тем и дифференциальные свойства $G(t)$ как функции t зависят от выбора пространства $\mathfrak{C}$, в котором она рассматривается. А. А. Дезин

8843. Свойства оператора Грина и «тонкая» задача Коши. Шварц (Propriétés de l'opérateur de Green et problème de Cauchy fin. Schwartz Laurent), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1955—1956, 3, № 5, 1—4 (франц.)

Продолжается изучение (реф. 8842) функции Грина, рассматриваемой как элемент $\mathfrak{C}(E, F)$ (первоначально предполагалось $E \equiv \mathfrak{D}'_1$, $F \equiv \mathfrak{D}_1$) в зависимости от свойств E и F. Оставляя $E = \mathfrak{D}'_1$, можем расширять F, или оставляя $F = \mathfrak{D}_1$, — сужать E. Далее изучаются свойства решения уравнения $\square u = g$ в зависимости от гладкости g и от выполнения для g дополнительных условий типа граничных. Рассматриваются неоднородные граничные условия для u. Построения используют полученные свойства функции Грина. А. А. Дезин

8844. Метод стационарных волн. Шварц (Méthode des ondes stationnaires. Schwartz Laurent), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1955—1956, 3, № 6, 1—6 (франц.)

Рассматривается метод разделения переменных (Фурье) для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$. Собственные функции U_ν уравнения $\Delta U + s^2 U = 0$, $U \in \mathfrak{D}_1$ (реф. 8840) рассматриваются как собственные функции соответствующего оператора Грина, являющегося вполне непрерывным. Функции u_ν образуют полную ортогональную систему в $\mathfrak{D}'_1$. Если $U = \sum c_\nu U_\nu$ в смысле $\mathfrak{D}'_1$, то необходимыми и достаточными условиями принадлежности U тому или иному пространству являются соответственно:

$$U \in \mathfrak{D}_1 \Leftrightarrow \sum |c_\nu|^2 < \infty;$$

$$U \in L^2 \Leftrightarrow \sum |c_\nu|^2/s_\nu^2 < \infty;\ U \in \mathfrak{D}'_1 \Leftrightarrow \sum |c_\nu|^2/s_\nu^4 < \infty$$

(s_ν — собственное значение, соответствующее U_ν). А. А. Дезин

8845. Дополнение к заметке № 6. Шварц (Complément á l'exposé № 6. Schwartz Laurent), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1955—1956, 3, № 6, 7—8 (франц.)

Доказывается теорема: Если Ω — ограниченная область, то вложение $\mathfrak{D}_1(\Omega)$ (реф. 8840) и $L^2(\Omega)$ вполне непрерывно. А. А. Дезин

8846. Эскиз решения смешанной задачи методом стационарных волн. Шварц (Esquisse d'une résolution du problème mixte par la méthode des ondes stationnaires. Schwartz Laurent), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1955—1956, 3, № 7, 1—2 (франц.)

Результаты, относящиеся к разложимости произвольной $u \in \mathfrak{D}'_1$ по собственным функциям уравнения $\Delta v - s^2 v = 0$ (реф. 8845) обобщаются на случай, когда u — обобщенная функция произвольного порядка к $(u \in \mathfrak{D}'_k)$. Затем рассматривается решение смешанной задачи для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = g(t)$, где правая часть — функция t со значениями в $\mathfrak{D}'_k$, методом Фурье. Рассмотрения совпадают с проводимыми в классическом случае. А. А. Дезин

8847. Об одном обобщении задачи З. Шмыдт для уравнения $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$. Лясота (Sur une généralisation d'un problème de Z. Szmydt concernant l'équation $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$. La-

sota A.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 1, 15—18 (франц.; рез. русск).

Пусть π — прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ и S_1 и S_2 — две поверхности в пространстве $(\pi, u) = (x, y, u)$, $-\infty < u < +\infty$, заданные уравнениями $y = k(x, u)$ и $x = l(y, u)$ соответственно. Ищется решение уравнения $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$, удовлетворяющее условиям: 1) $u_x(x, y) = g(\bar{x}, \bar{u}, u_y(\bar{x}, \bar{y}))$ и $u_y(\bar{x}, \bar{y}) = h(\bar{y}, \bar{u}, u_x(\bar{x}, y))$ в каждой точке пересечения поверхностей $u = u(x, y)$ с S_1 и S_2 соответственно, 2) $u(x_0, y_0) = u_0$; здесь $g(x, u, q)$, $q = u_y$, $h(y, u, p)$, $p = u_x$, — непрерывные функции, определенные для $(x, y) \in \pi$, $-\infty < u < +\infty$ и $-\infty < p, q < +\infty$; (x_0, y_0) — произвольная точка π, u_0 — заданное число. Кроме непрерывности, от заданных функций f, g, h, $k(x, u)$ и $l(y, u)$ требуется еще выполнения условия Липшица по некоторым (не всем) аргументам. При некоторых ограничениях на соответствующие константы Липшица, используя принцип неподвижной точки Шаудера, автор доказывает существование решения рассматриваемой задачи, принадлежащего классу C^1 и обладающего непрерывной производной u_{xy} Эта задача представляет собой обобщение задачи З. Шмидт, которая рассмотрела случай, когда S_1 и S_2 — цилиндры с образующими, параллельными оси u. Б. В. Боярский

8848. **Комплексные аналитические координаты на почти комплексных многообразиях. Ньюлендер, Ниренберг** (Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. Newlander A., Nirenberg L.), Ann. Math., 1957, 65, № 3, 391—404 (англ.)

Действительное многообразие четной размерности $2n$ называется почти комплексным, если существует линейное преобразование J его касательного пространства в каждой точке, заданное дифференцируемым относительно локальных параметров тензором h^μ_λ, $\mu\lambda = 1, \ldots, 2n$, который удовлетворяет условию

$$h^\mu_\lambda h^\nu_\mu = -\delta^\nu_\lambda, \quad \nu, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Почти комплексное многообразие называется интегрируемым, если оно может быть превращено в комплексное аналитическое многообразие с локальными параметрами $z^j = x^j + x^{j+n}$, $j = 1, \ldots, n$, где x^μ — действительные локальные координаты многообразия. Было известно, что в случае аналитических многообразия и тензорного поля h^μ_λ это всегда возможно, если выполнены некоторые условия интегрируемости (см. ниже). Авторы устанавливают этот результат в предположении, что многообразие принадлежит классу C^{2n+1}, а поле h^μ_ν — классу C^{2n}. Основной результат, из которого следует это утверждение, содержится в следующей теореме:

Если коэффициенты системы (используется тензорная запись):

$$\bar{\partial}_j w - a^k_j \partial_k w = 0, \quad a^k_j = 0 \text{ при } z^j = 0,$$

$$j, \ u = 1, \ldots, n,$$

$\partial_j = \partial/\partial z^j$, $\bar{\partial}_j = \partial/\partial \bar{z}^j$ принадлежат классу C^{2n} в окрестности начала координат и удовлетворяют условиям интегрируемости:

$$\bar{\partial}_m a^k_j - a^p_m \partial_p a^k_j = \bar{\partial}_j a^k_m - a^p_j \partial_p a^k_m, \quad j, \ k, \ m = 1, \ldots, n,$$

то в некоторой окрестности начала координат существует n решений $\zeta^1, \ldots, \zeta^n$ этой системы таких, что якобиан от $\zeta^1, \ldots, \zeta^n, \bar{\zeta}^1, \ldots, \bar{\zeta}^n$ по отношению к $z^1, \ldots, \bar{z}^n$ отличен от нуля; уравнения системы превращаются в уравнения Коши—Римана $dw/\partial\zeta^j = 0$, $j = 1, \ldots, n$; каждая функция $\zeta^j \in C^{2n+3}$ при любом $\beta < 1$, если же $a^i_j \in C^{k+\alpha}$, $k \geqslant 2n$, — целое, $0 < \alpha < 1$, то $\zeta^j \in C^{k+1+\alpha}$ ($C^{k+\alpha}$ — класс функций, k-е производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем α). Библ. 12 назв. И. И. Данилюк

8849. **Принцип Дирихле на многообразиях. Спенсер** (Dirichlet's principle on manifolds. Spencer D. C.), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 127—134 (англ.)

Рассматривается применение принципа Дирихле к решению краевых задач на многообразиях.

Пусть M — n-мерное ориентируемое риманово многообразие класса C^∞. Операторы d, $*$, $\delta = (-1)^{np+n+1} * d *$, $\Delta = \delta d + d\delta$ имеют тот же смысл, что и в другой работе автора (РЖМат, 1956, 4456; см. также 1958, 703 К). Пространство p-форм φ с конечной нормой $\|\varphi\|$, определяемой равенством $(\varphi, \varphi) = \|\varphi\|^2 = \int_M \varphi \wedge * \varphi$, обозначается через A^p, а пространство форм класса C^∞ с компактными носителями — через K^p.

Пусть s — произвольное положительное число; для уравнения $\mu_s \varphi \equiv \Delta\varphi + s\varphi = \beta$ строится функционал $E_s(\varphi) = (d\varphi, d\varphi) + (\delta\varphi, \delta\varphi) + s\left(\varphi - \frac{\beta}{s}, \varphi - \frac{\beta}{s}\right)$, для которого это уравнение является уравнением Лагранжа—Эйлера. Задача минимизации этого функционала решается в двух пространствах: в пространстве p-форм, для которых $D_s(\varphi) = (d\varphi, d\varphi) + (\delta\varphi, \delta\varphi) + s(\varphi, \varphi) < \infty$, обозначаемом D_p и в пространстве D^k_p, являющемся замыканием пространства K^p в смысле сходимости по норме $D_s(\varphi)$. Получаемые таким путем формы являются, быть может, в обобщенном смысле (рассматриваемые как потоки), решениями уравнения $\Delta_s\varphi = \beta$. Полагая для решений соответствующих задач $\varphi = N_s\beta$ и $\varphi = G_s\beta$, автор исследует свойства операторов N_s и G_s; поведение $N_s\beta$ и $G_s\beta$ на «границе» области (т. е., например, предельное поведение $N_s\beta$ и $G_s\beta$ на границах подобластей, сходящихся к M в случае некомпактности M) позволяет рассматривать N_s и G_s как операторы Неймана и Грина соответственно. Из дальнейших результатов отметим, что оператор G_s на ограниченном многообразии M вполне непрерывен. В. В. Рыжков

8850. **Элементарное доказательство теоремы Бернштейна о минимальных поверхностях. Ниче** (Elementary proof of Bernstein's theorem on minimal surfaces. Nitsche Johannes C. C.), Ann. Math., 1957, 66, № 3, 543—544 (англ.)

Дается простое доказательство следующего факта: регулярное на всей плоскости (класса C^2) решение уравнения

$$rt - s^2 = 1 \ (r = z_{xx}, \ t = z_{yy}, \ s = z_{xy}), \ r > 0, \qquad (1)$$

есть квадратичный полином. Использованный прием позволяет найти оценки третьих и высших производных решений уравнения (1) через вторые производные. Кроме того, имеется оценка максимального радиуса регулярности решения уравнения (1). Б. В. Боярский

8851. **Локальное поведение решений общих линейных уравнений эллиптического типа. Берс** (Local behavior of solutions of general linear elliptic equations. Bers Lipman), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 4, 473—496 (англ.)

Автор дает обобщение некоторых теорем о локальных свойствах решений дифференциальных уравнений эллиптического типа с двумя независимыми переменными на случай большего числа переменных. В последнем случае эти теоремы были известны только для

уравнений с аналитическими коэффициентами. Предположим, что все коэффициенты однородного уравнения эллиптического типа порядка m ($m \geqslant 2$) вида

$$L\Phi \equiv \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=\nu} a_{i_1\ldots i_n}(x) \frac{\partial^\nu \Phi}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}} = 0, \quad x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (1)$$

удовлетворяют условию Гёльдера в некоторой окрестности точки 0, причем пусть ε ($0 < \varepsilon < 1$) — показатель Гёльдера коэффициентов при производных порядка m. Через $J(x)$ обозначим фундаментальное решение уравнения

$$L_0\Phi \equiv \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=m} a_{i_1,\ldots,i_n}(0) \frac{\partial^m \Phi}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}} = 0 \qquad (2)$$

с постоянными коэффициентами. Пусть запись $\Phi(x) = O_k(|x|^A)$ обозначает, что функция $\Phi(x)$ обладает производными до порядка k включительно в некоторой окрестности точки 0, исключая, может быть, точку 0, и что имеют место соотношения:

$$\frac{\partial^l \Phi}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}} = O(|x|^{A-l}) \quad \text{для} \quad l = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Автор показывает, что для любого решения $\Phi(x)$ (класса C^m) уравнения (1) такого, что $\Phi(0) = 0$ и $\operatorname{Lim\,inf} \frac{|\Phi(x)|}{|x|^q} > 0$ для некоторого q, существует однородный полином $p_N(x)$ порядка N, удовлетворяющий уравнению (2) и такой, что

$$\Phi(x) = p_N(x) + O_m(|x|^{N+\varepsilon}). \qquad (3)$$

Чтобы пояснить идею доказательства, предположим, что $\Phi(x) = O(|x|^A)$, $A > 0$, $n > m$. Тогда из одной леммы, учитывая априорные оценки Дуглиса и Ниренберга, следует, что $\Phi(x) = O_m(|x|^A)$. Поэтому $|L_0\Phi| = |(L_0 - L)\Phi| = O(|x|^{A-m+\varepsilon})$. Из одной леммы теории потенциала, для $A + \varepsilon$ нецелого, следует, что

$$\psi(x) = \int_{|\xi|<R} J(x-\xi) L_0\Phi(\xi)\, d\xi = P(x) + O(|x|^{A+\varepsilon}),$$

где $P(x)$ — полином. Так как $L_0(\Phi - \psi) = 0$, то функция $\Phi - \psi$ аналитическая, т. е. $\Phi(x) = \tilde{P}(x) + O(|x|^{A+\varepsilon})$, где $\tilde{P}$ — полином.

Автор рассматривает также решения $\Phi(x)$, определенные в кольце $0 < |x| < R$ ($R > 0$). Если $\Phi(x) = o(|x|^{m-n})$ при $n > m$ или n нечетном или если $\Phi(x) = o(|x|^{m-n}\log|x|)$ при $n \leqslant m$ и n четном, то особенность решения $\Phi(x)$ в точке 0 устранима. Если же $\Phi(x) = O(|x|^{m-n-1+\lambda})$ для $1 - \varepsilon < \lambda < 1$, то

$$\Phi(x) = CJ(x) + O_m(|x|^{m-n-1+\lambda+\varepsilon}), \qquad (4)$$

где C — постоянная. Автор доказывает также существование функций $\xi_\mu(x)$ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots, n$), обладающих производными вплоть до порядка m, удовлетворяющими условию Гёльдера в некоторой окрестности точки 0, и таких, что преобразование $\xi_i = \xi_i(x)$ ($i = 1, \ldots, n$), $\psi = \Phi/\xi_0$ переводит уравнение (1) в уравнение эллиптического типа следующего вида:

$$\sum_{\nu=2}^{m} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=\nu} A_{i_1\ldots i_n}(\xi) \frac{\partial^\nu \psi(\xi)}{\partial \xi_1^{i_1}\ldots\partial \xi_n^{i_n}}, \qquad (5)$$

причем $\operatorname{Det}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(0)\right) = 1$ и $\xi_0(0) = 1$.

Более того, если коэффициенты при производных порядков 2, 3, ..., m в уравнении (1) обладают производными порядка k, $k \geqslant 1$, а коэффициенты при первых производных и неизвестной функции Φ обладают производными вплоть до порядка $k-1$ и все эти производные удовлетворяют условию Гёльдера, то функции $\xi_\mu(x)$ ($\mu = 0, 1, \ldots, n$) обладают производными до порядка $m + k - 1$ и коэффициенты уравнения (5) обладают производными до порядка k, причем эти производные удовлетворяют условию Гёльдера. Кроме того, при этих предположениях, соотношения (3) и (4) можно заменить соотношениями

$$\Phi(x) = O_{m+k}(|x|^{N+\varepsilon}),$$

$$\Phi(x) = cJ(x) + O_{m+k}(|x|^{m-n-1+\lambda+\varepsilon})$$

соответственно.

Отметим более важные опечатки в формулировке теорем: стр. 488, 7-я строка снизу, вместо «k» должно быть «$m + k$»; стр. 491, строка 15, вместо «m четно» должно быть «n четно»; стр. 495, 13 строка, вместо $\Phi(x) = c_1\Phi(x) + c_2(x)$ должно быть $\Phi(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x)$. A. Pliś

8852. Многозначные гармонические функции от трех переменных. Бергман (Multivalued harmonic functions in three variables. Bergman Stefan), Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 3, 327—338 (англ.)

Пусть $\{\chi(\tau, \tau^*)\}$ — алгебра аналитических функций вида

$$\chi(\tau, \tau^*) = 2(\tau\tau^*)^{1/2}\chi_1(\tau, \tau^*) + \chi_2(\tau, \tau^*),$$

где χ_1, χ_2 — аналитические функции двух комплексных переменных τ, τ^*, регулярные в начале координат. Рассматривается интегральный оператор

$$C_3(\chi) \equiv B_3(f, L, X_0), \quad B_3(f, L, X_0) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_L f(u, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

$$f(u, \zeta) = 2\int_0^1 u^{1/2}\frac{d\,[u^{1/2}\chi(u\zeta^{-1}T^2,\ u\zeta(1-T)^2)]}{du}\,dT, \qquad (1)$$

$$X \in N(X_0), \qquad X \equiv (x, y, z), \quad X_0 = (x_0, y_0, z_0),$$

где $u = x + Z\zeta + Z^*\zeta^{-1}$, $2Z = iy + z$, $2Z^* = iy - z$, L — спрямляемая (замкнутая или нет) кривая в плоскости комплексной переменной ζ, $N(X_0)$ — достаточно малая окрестность точки X_0.

Оператор $C_3(\chi)$ отображает функции $\chi(\tau, \tau^*)$ в гармонические функции $H(x, y, z)$ трех действительных переменных x, y, z, в предположении, что допустимо дифференцирование под знаком интеграла при $X \in N(X_0)$. Если L есть окружность $|\zeta| = 1$ и $X_0 = 0$, то обратное отображение имеет вид

$$\chi(Z, Z^*) = H(2(ZZ^*)^{1/2}, Z, Z^*)$$

для любой гармонической функции $\tilde{H}(x, Z, Z^*)$, аналитической в начале координат. Выражение (1) есть обобщение и видоизменение представления гармонических функций, данное Уиттекером; о других отображениях поля аналитических функций в векторное пространство решений эллиптических уравнений, полезных при изучении краевых задач и других вопросов, см. И. Н. Векуа (Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л, 1948; Матем. сб., 1952, 2, 31 (73)).

Используя оператор (1), автор изучает классы (вообще многозначных) гармонических функций, соответ-

ствующих алгебро-логарифмическим и алгебраическим функциям $f(u, \zeta)$. В последнем случае показывается, что при некоторых предположениях все эти гармонические функции могут быть представлены через конечное число из них. Изучаются также особенности этих функций и их разложения в окрестности множеств их особых точек.

Даются представления решений других уравнений и систем от трех или более независимых переменных через аналитические функции двух комплексных переменных. Например, для вектор-решения q системы

$$\operatorname{rot} q = 0, \quad \operatorname{div} q = 0$$

приводится представление

$$q = \Big\{ B_3[f, L, X_0],\ B_3\Big[\frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) f(u, \zeta), L, X_0\Big] + \operatorname{Re}[g(Z)],\ B_3\Big[\frac{1}{2}(\zeta - \zeta^{-1}) f(u, \zeta), L, X_0\Big] - \operatorname{Im}[g(Z)] \Big\}$$

через произвольную аналитическую функцию $f(u, \zeta)$ от двух комплексных переменных u, ζ и через произвольную функцию $g(Z)$ комплексного переменного $Z = y + iz$. Библ. 19 назв. И. И. Данилюк

8853. **Априорные оценки и регулярность обобщенных решений уравнений Монжа-Ампера. Бакельман И. Я.**, Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 5, 719—722

Рассматривается уравнение Монжа-Ампера эллиптического типа вида

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q), \qquad (1)$$

где $\varphi(x, y, z, p, q) \geqslant k_0 = \text{const} > 0 - m$ раз дифференцируемая функция ($m \geqslant 3$). Для решения $z(x, y)$ этого уравнения в круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ при выполнении некоторых условий для функции φ и граничных значений ψ указывается на возможность получения априорных оценок $z(x, y)$ и его производных первых двух порядков. Отсюда делается вывод о разрешимости при этих условиях задачи Дирихле для уравнения (1) и в силу единственности обобщенного решения заключается об его регулярности.

А. В. Погорелов

8854. **Контрпримеры для неравенства Пуанкаре. Хаммел** (Counterexamples to the Poincaré inequality. Hummel J. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 207—210 (англ.)

Указывается простой пример гармонической в области D функции $\Phi(x, y)$, удовлетворяющей условиям

$$\iint_D \Phi dx dy = 0, \quad \iint_D (\Phi_x^2 + \Phi_y^2)\, dx dy < \infty$$

и $\iint_D \Phi^2 dx dy = \infty$. Область D односвязна, ограничена, но граница ее не есть кривая Жордана. Рассматривается также комплексная форма неравенства Пуанкаре. Б. В. Боярский

8855. **О некоторых свойствах регулярных функций на плоскости и в пространстве. Богданэску** (Asupra unor proprietăți ale funcțiilor regulate în plan și in spatiul cu trei dimensiuni. Bogdănescu V.), Lucrările inst. petrol. și gaze Bucuresti, 1957, 2, № 2, 217—230 (рум.; рез. русск. англ.)

Приводится вывод представления регулярной функции в виде суммы объемного потенциала и потенциалов двойного и простого слоев. Новых результатов статья не содержит. Б. В. Боярский

8856. **Некоторые краевые задачи с косой производной. Лауверир** (Enige randproblemen met een scheve afgeleide. Lauwerier H. A.), Rapp. Math. centrum, 1954, № 016, 1—7 (гол.)

Даны явные выражения функции Грина для задачи $\operatorname{Re}[e^{i\omega_k} f(x)] = 0$, при $x_k < x < x_{k+1}$, для полуплоскости $y > 0$ в классе аналитических функций $f(x + iy)$; здесь $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — некоторая заданная последовательность точек действительной оси, ω_k — действительные постоянные. Кроме того, рассматривается аналогичная задача для уравнения $\Delta u = k^2 u$.

Б. В. Боярский

8857. **Элементарное решение задачи Дирихле для эллиптической области. Водичка** (Elementare Fälle des Dirichletschen Problems für elliptische Gebiete der Ebene. Vodička Václav v.), Z. angew. Math. und Phys., 1957, 8, № 4, 309—313 (нем.; рез. англ.)

Отыскивается решение уравнения Лапласа в эллипсе (в виде линейной комбинации гармонических многочленов), принимающее в дискретных точках границы заданные значения.

Способ применим (Вашакидзе Д. Р., Тр. Тбилисск. пед. ин-та, 1949, 6, 329—337) для решения задач Дирихле, Неймана и смешанной краевой задачи, в случае произвольных областей; он применим также для решения бигармонического уравнения.

Ш. Е. Микеладзе

8858. **Функции Грина и воспроизводящие ядра. Ароншайн** (Green's functions and reproducing kernels. Aronszajn N.), Proc. Sympos. Spectral Theory and Different. Probl., Stillwater, Oklahoma, 1955, 355—411 (англ.)

Работа содержит изложение теории воспроизводящих ядер в применении к исследованию функций Грина краевых задач для уравнений эллиптического типа любого порядка. Все результаты приводятся без доказательств. В первой части работы излагается теория линейных дифференциальных формально положительных операторов, т. е. операторов вида

$$A = \sum_{k=1}^{m} A_k^* A_k;$$

A_k — конечная сумма операторов вида $a(x, y) \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}$; коэффициенты $a(x, y)$ — аналитические функции переменных x и y в замыкании области D, ограниченной аналитической кривой C; через A_k^* обозначен оператор, сопряженный с A_k. Порядок оператора A равен $2t$, где $t = \max(j + i)$. Под линейной дифференциальной системой автор понимает совокупность дифференциального оператора A и граничных операторов Λ_i; граничный оператор Λ_i представляет собой конечную сумму выражений $a(s) \frac{\partial^{k+l}}{\partial n^k \partial s^l}$, где $a(s)$ — аналитическая функция дуги s кривой C, а $\partial/\partial n$ и $\partial/\partial s$ обозначают дифференцирование вдоль нормали и касательной соответственно; если $\partial^m/\partial n^m$ есть единственное слагаемое в Λ_i наивысшего порядка, то Λ_i называется нормальным оператором (порядка m). Система $\{A; \Lambda_i\}$ называется формально положительной, если оператор A формально положителен и существуют граничные операторы Ω_j (порядка $\leqslant i - 1$) такие, что

$$\iint_D (Au)\, \bar{u}\, dx dy = \sum_{k=1}^{n} \iint_D |A_k u|^2\, dx dy + \sum_{j=1}^{n} \int_C |\Omega_j u|^2\, ds \qquad (1)$$

для всякой функции u (достаточно регулярной в $\bar{D}$), для которой $\Lambda_i(u) = 0$ на C. Задав формально положительный оператор A, граничные операторы Ω_j и нормальные граничные операторы Φ_k ($k = 0, 1, \ldots, t-1$), где k — порядок оператора Φ_k, при помощи некоторого интегрального равенства определяются нормальные операторы Ψ_{2t-1-k}, $k = 0, 1, \ldots, t-1$ (индекс равен порядку оператора) таким образом, что при k', k'', пробегающих непересекающиеся подмножества индексов интервала $(0, 1, \ldots, t-1)$, вместе покрывающие весь этот интервал, система граничных операторов $\{\Lambda_j\} = \{\Phi_{k'}, \Psi_{2t-1-k''}\}$, названная автором минимальной системой, вместе с оператором A образует формально положительную систему. Для всякой системы нормальных операторов $\{\Lambda'_j\}$, вместе с A образующих формально положительную систему, существует минимальная система $\{\Lambda_j\}$, более слабая, чем заданная система, т. е. такая, что из равенств $\Lambda'_j u = 0$ следуют равенства $\Lambda_j u = 0$. Разложения вида (1), а также соответствующие им минимальные системы иллюстрируются автором на примере операторов $-\Delta$, $-\Delta - \mu I$, Δ^2.

В дальнейшем автор дает определение функции Грина системы $\{A, \Lambda_j\}$. Если функция Грина существует, то в множестве $\bar{X}$ функций, обладающих производными порядка $t-1$, абсолютно непрерывными относительно каждой из переменных, и производными порядка t, суммируемыми с квадратом, и удовлетворяющих граничным условиям $\Phi_{k'} u = 0$, выражение

$$\|u\| = \left(\sum_k \int\int_D |A_k u|^L \, dxdy + \sum_j \int_C |\Omega_j u|^2 \, ds\right)^{1/2}$$

определяет норму, и относительно скалярного произведения, соответствующего этой норме, функция Грина $G(x, y; x', y')$ обладает воспроизводящим свойством:

$$u(x', y') = (G(x, y; x', y'), u(x, y))_{x, y}.$$

Пополняя пространство $\bar{X}$, мы получаем некоторое гильбертово пространство $\bar{\bar{X}}$; в случае $t > 1$ элементы этого пространства — функции, определенные всюду в $\bar{D}$ (класса C^{t-2} в $\bar{D}$); из сходимости по норме в $\bar{\bar{X}}$ следует сходимость всюду.

Пусть F — гильбертово пространство функций, определенных всюду на множестве E. Функция $N(x, y)$, определенная в $E \times E$, называется воспроизводящим ядром, если 1) для каждого фиксированного y $N(x, y)$ есть функция из F, 2) $f(y) = (f(x), N(x, y))_x$, если $f \in F$ и $y \in E$. В частности, функция Грина есть воспроизводящее ядро в $\bar{\bar{X}}$. Гильбертово пространство функций обладает воспроизводящим ядром тогда и только тогда, когда отображение $f \to f(y)$ непрерывно для любого фиксированного y. Тогда ядро $N(x, y)$ единственно и удовлетворяет условию $N \geqslant 0$ (т. е. $\sum_{i,j} N(y_i, y_j)\eta_i\eta_j \geqslant 0$). Наоборот, если $N \geqslant 0$, то существует единственное гильбертово пространство функций, для которого N есть воспроизводящее ядро. Если $F' \subset F$ (в частности, $\bar{X}' \subset \bar{X}$, если $t < t'$ и минимальная система $\{\Lambda_j\}$ слабее минимальной системы $\{\Lambda'_j\}$), то $N \leqslant \alpha N'$ и $\|f'\| \leqslant \sqrt{\alpha}\,\|f\|$ при некоторой постоянной α. Если F_1 — ортогональное дополнение F' относительно F (в частности, если минимальная система $\{\Lambda_j\}$ слабее, чем $\{\Lambda'_j\}$, то при некотором A ортогональное дополнение $\bar{X}'$ до $\bar{X}$ состоит из тех u, для которых $Au = 0$ и $\Psi_{2t-1-k''} u = 0$ в некотором обобщенном смысле), то $N - N' = N_1$.

Эти утверждения применяются для исследования свойств функции Грина и установления соотношений между функциями Грина различных краевых задач (обобщение формул Зарембы и Бергманна—Шиффера, оценки собственных значений). Излагаемая теория частично обобщается на случай гильбертовых пространств функций, определенных вне некоторых исключительных множеств (псевдовоспроизводящие ядра, применения в случае $t = 1$). S. Lojasiewicz

8859. К вопросу об N-метагармоническом уравнении. Магер (Asupra unei ecuaţii n-metaarmonice. Mager V.), Bul. Inst. politehn. Bucureşti, 1956, 18, № 3-4, 133—138 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор решает граничную задачу для уравнения

$$\Delta^n u + \lambda_1 \Delta^{n-1} u + \ldots + \lambda_n u = 0, \quad \Delta^n u = \Delta(\Delta^{n-1} u),$$
$$\Delta^i u|_c = f_i(\alpha),$$

ранее изучавшуюся Германеску (Ghermănescu M., Bul. ştiinţ Scolii Politehnice din Timisora, 1935, 5, 3—4). Решение этой проблемы в случае различных корней характеристического уравнения

$$\eta^n + \lambda_1 \eta^{n-1} + \ldots + \lambda_n = 0$$

дается в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{\delta\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} G_k(\rho_1\varphi; R, \alpha)[f_0(\alpha) A_{0k} +$$
$$+ f_1(\alpha) A_{1k} + \ldots + f_{n-1}(\alpha) A_{n-1\,k}]\, d\alpha,$$

где a_{im}; b_{im} — коэффициенты Фурье функции $f(\alpha)$, а

$$G_k(\rho, \varphi; R, \alpha) = (-1)^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_m(\mu_k\rho)}{J_m(\mu_k R)} \cos m(\varphi - \alpha).$$

Во второй части работы рассматривается случай, когда характеристическое уравнение допускает множество корней, решение в этом случае представляется в виде:

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{P_i - 1} \frac{\partial^j}{\partial \mu_i{}^j} J_m(\mu_i\rho) \times$$
$$\times \left[c_m^{ij} \cos m\varphi + d_m^{ij} \sin m\varphi\right].$$

В конце работы рассматривается частный случай уравнения, характеристическое уравнение которого имеет единственный корень, и он — кратный.

Из резюме автора

8860. Одна теорема о сферах в теории потенциала. Ладфорд, Мартинек, Е (The sphere theorem in potential theory. Ludford G. S. S., Martinek J., Jeh G. C. K.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 2, 389—393 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть $\varphi_0(r) \equiv \equiv \varphi_0(r, \theta, \psi)$ есть потенциал вещества, заключенного внутри сферы $r = a$, общая масса которого равна нулю тогда:

$$\varphi_1(r, \theta, \psi) = \frac{a}{r} \varphi_0\left(\frac{a^2}{r}\right) + \frac{2}{ar} \int_a^{\infty} \lambda \varphi_0\left(\frac{\lambda^2}{r}\right) d\lambda$$

будет гармонической функцией внутри и на поверхности сферы $r = a$ и удовлетворяющей на сфере $r = a$ следующему равенству:

$$\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_0 + \varphi_1) = 0,$$

где n есть внешняя нормаль к поверхности сферы. Эта общая теорема получает ряд применений к гидродинамике: определяется поток, создаваемый внутри сферы: а) диполем произвольного расположения; б) источником и равным по мощности стоком, находящимися внутри сферы; в) вихревым кольцом, заключенным внутри сферы.

Дается обобщение указанной теоремы и строится функция φ_1, удовлетворяющая на поверхности сферы $r=a$ условию

$$\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_0+\varphi_1)+h(\varphi_0+\varphi_1)=0, \quad h\geqslant 0.$$

Функция φ_1 определяется и для области, внутренней к сфере $r=a$, и для области внешней. Вместе с тем указываются формулы для решения аналогичных задач по отношению к окружности.

Л. Н. Сретенский

8861. Параметрическая теория уравнения $\Delta u+ku^2=0$. **Миранкер** (Parametric theory of $\Delta u+ku^2=0$. Miranker W. L.), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1957, **1**, № 2, 139—153 (англ.)

В § 1 делается общий обзор состояния параметрической теории дифференциальных уравнений. Автор уделяет особенное внимание результатам Биркгоффа (Birkhoff G. D., Bull. Amer. Math. Soc., 1933, 681) и их обобщениям другими авторами. Сущность этого метода заключается в том, что дается путь для построения ряда определенного вида, который асимптотен к решению колебательного уравнения.

В § 2 по вышеупомянутому методу Биркгоффа строится асимптотическое решение следующей задачи: найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$1)\ \Delta u+k^2u=0 \text{ в } D,$$

$$2)\ u=e^{ik\Phi(x,y)}\sum_{n=0}^{m}\frac{a_n(x,y)}{(ik)^n} \text{ на } L,$$

$$3)\ \lim_{R\to\infty}\int_{\Sigma_R}\left|\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right|^2 dS=0,$$

где D — внешняя область с границей L, а Σ_R — окружность с радиусом R.

В § 3 определяется понятие правильной области и доказываются две леммы. При помощи этих лемм в последнем § 4 доказываются некоторые теоремы. Эти теоремы иллюстрируют соотношение между асимптотическим и точным решением. Д. З. Аваазашвили

8862. Доминирование и гиперболические операторы. **Трев** (Domination et opérateurs hyperboliques. Trèves François), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 5, 680—683 (франц.)

Рассматриваются линейные дифференциальные операторы $P(x, D)=P(x_1, \ldots, x_n, \partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$. Оператор P равномерно доминирует операторы $Q_i(x, D)$ $(i\in I)$ на открытом множестве $\Omega\subseteq R^n$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $h\in R^n$, для которого

$$\left\| e^{-\langle x,\,h\rangle}Q_i(x, D)\varphi\right\|_{L^2}\leqslant\varepsilon\left\| e^{-\langle x,\,h\rangle}P(x, D)\varphi\right\|_{L^2}$$

при всех $i\in I$ и $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$. Оператор называется гиперболическим в Ω, если для любого $x=x_0\in\Omega$ он нормально гиперболичен (в обычном смысле) относительно некоторого направления в R^n. Без доказательства формулируются некоторые (отчасти известные) необходимые и достаточные условия гиперболичности. Для операторов с постоянными коэффициентами отметим, например, критерии: $P(D)$ равномерно доминирует все D^p $(|p|\leqslant m-1)$; существуют $h\in R^n$ и $A\in(0, \infty)$, для которых $|y+ih|^{m-1}\leqslant A|P_m(y+ih)|$ при всех $y\in R^n$ (P_m — главная часть оператора P, который считается m-го порядка); существуют $h\in R^n$, $A_1\in[0, \infty)$, для которых при любых $\varphi\in\mathscr{D}$, $t\geqslant 1$ будет

$$\sum_{|p|\leqslant m-1}\left\| e^{-t\langle x,\,h\rangle}D^p\varphi\right\|_{L^2}\leqslant$$

$$\leqslant A_1t^{-1}\left\| e^{-t\langle x,\,h\rangle}P(D)\varphi\right\|_{L^2}.$$

Последний критерий переносится и на операторы с переменными достаточно гладкими коэффициентами: для любого $x_0\in D$ должна существовать окрестность $U(x_0)$, для которой неравенство должно выполняться для всех $t\geqslant 1$, $\varphi\in\mathscr{D}(U(x_0))$. В некоторых случаях от этого локального критерия можно перейти к тотальному. Относительно аналогичным образом видоизмененного первого критерия показана только его необходимость. А. Д. Мышкис

8863. О нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных параболического типа. **И. Мураками** (On non-linear partial differential equations of parabolic types. I. Murakami Haruo), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 9, 530—535 (англ.)

Статья представляет собой первую часть работы, посвященной решению смешанной задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=f(x, y, u)$$

и для некоторых более общих уравнений. Теоремы существования доказываются с помощью метода Перрона. В реферируемой части вводится понятие обобщенного оператора теплопроводности и доказываются некоторые вспомогательные неравенства. Д. М. Эйдус

8864. Классы решений линейных систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. **Фридман** (Classes of solutions of linear systems of partial differential equations of parabolic type. Friedman Avner), Duke Math. J., 1957, **24**, № 3, 433—442 (англ.)

Статья посвящена изучению решений параболической в смысле И. Г. Петровского системы

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{0\leqslant\sum k_s\leqslant m}a_{ij}^{(k_1k_2\ldots k_n)}(x, t)\times$$

$$\times\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}u_j(x, t)+g_i(x, t); \qquad (1)$$

$$i=1, 2, \ldots, N.$$

Определяется следующий класс функций.

Пусть D — ограниченная область $(n+1)$-мерного пространства $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $\{M_q\}_{q=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Через $C(M_q, D, \nu)$ обозначается класс функций $f(x, t)$, определенных в D, бесконечно дифференцируемых и удовлетворяющих оценке

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial t^p}\frac{\partial^q f(x, t)}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}}\right|\leqslant H_0H^qB^pM_{\nu p+q} \qquad (p, q=0, 1, 2, \ldots)$$

в каждом компакте $D_0\subset D$.

Устанавливается теорема: Если $g_i(x, t)$, $\frac{\partial g_i}{\partial t}(x, t)$,

$a_{ij}^{k_1 \dots k_n}(x, t)$, $\frac{\partial}{\partial t} a_{ij}^{(k_1 \dots k_n)}(x, t)$ принадлежат классу $C\{M_q, D, 0\}$; $\left\{ \begin{matrix} q \\ i \end{matrix} \right\} M_i M_{q-i} \leqslant A M_q$ $(i = 0, 1, \dots, q;$ $q = 1, 2, \dots)$, то все регулярные в D решения (1) принадлежат классу $C\{M_q, D, 0\}$; если же $a_{ij}^{(k_1 \dots k_n)}(x, t)$ и $g_i(x, t)$ принадлежат $C(M_q, D, m)$, то все регулярные решения (1) принадлежат $C(M_q, D, m)$. Подробное доказательство, приведенное для одного уравнения, основано на оценках фундаментального решения, полученных референтом (РЖМат, 1956, 8844), представлении решения через фундаментальное решение и последовательных оценках производных от него. При этом используется следующая полезная элементарная

Лемма. Если монотонно убывающая функция $g(t)$, определенная для $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяет неравенству

$$g(t) \leqslant \frac{1}{10} g\left(t\left(1 - \frac{1}{q}\right)\right) + \frac{C}{t^{q+1}}; \quad (C > 0, \quad q \geqslant 2),$$

то $g(t) \leqslant 5C/t^{q+1}$.

Примечание референта. Основной результат своей работы автор формулирует в виде условного предложения, предполагая выполненным условие (Л) работы референта (РЖМат, 1954, 2583). Однако, как установлено референтом (РЖМат, 1956, 8844), оценки (Л) фундаментального решения, при сделанных в реферируемой работе предположениях, всегда имеют место в конечной области. Поэтому предположение о выполнимости условия (Л) излишне.

С. Д. Эйдельман

8865. Некоторые смешанные задачи для параболических систем дифференциальных уравнений. Загорский Т. Я., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 3, 359—362

Рассматривается смешанная задача для линейной параболической системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u$$

в области v, ограниченной выпуклой поверхностью Г типа Ляпунова, при условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad \lim_{x \to y \in \Gamma} B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f(y, t),$$

где

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| \sum_{k_1 + \dots + k_n = s} a_{ij}^{(k_1, \dots, k_n)} \frac{\partial^s}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right\|,$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| \sum_{k_1 + \dots + k_n = s} b_{rl}^{(k_1, \dots, k_n)} \frac{\partial^{s_1}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right\|,$$

$a_{ij}^{(k_1, \dots, k_n)}$, $b_{rl}^{(k_1, \dots, k_n)}$ — постоянные, $s > 0$ — четное, $0 < s_1 < s$, $i, j, l = 1, 2, \dots, N$, $r = 1, 2, \dots, sN/2$, $f(y, t)$ — непрерывный вектор, заданный при $y \in \Gamma$, $t > 0$ и удовлетворяющий неравенству $|f(y, t)| \leqslant c_1 \exp(c_2 t)$. Кроме того, предполагается, что для каждого полупространства, ограниченного плоскостью, касательной к Г, и содержащего область v, выполнено некоторое условие разрешимости, введенное автором ранее (РЖМат, 1956, 8845).

С помощью метода интегральных уравнений доказывается существование решения поставленной задачи.

Д. М. Эйдус

8866. Теоремы существования для некоторых параболических уравнений и систем. Резницкая К. Г. Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1957, 29, 53—58

Рассматривается смешанная задача для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - kuv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - kmuv$$

в области $x > 0$, $t > 0$ при условиях

$$u|_{x=0} = \mu, \; u|_{t=0} = 0, \; v|_{t=0} = T, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,$$

где m, μ, a, k, T — положительные постоянные, причем $0 < m < 1$. Составляются некоторые ряды, формально удовлетворяющие уравнениям, и доказывается их сходимость в некоторой полосе $0 < t < t_1$. Эти ряды автор называет решением задачи в полосе, но не указывает, в каком смысле (дифференциальные свойства не исследуются). Далее доказывается возможность продолжения решения на всю область $x > 0$, $t > 0$. Доказательство содержит неточности. Аналогично рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku^n \quad (n \geqslant 2 \text{ — целое})$$

при условиях $u|_{x=0} = 1$, $u|_{t=0} = 0$. Затем рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Phi\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

в предположении, что Φ ограничена и удовлетворяет условию Липшица. Это условие сформулировано неверно, в связи с чем доказательство существования, приведенное в статье, применимо лишь в случае $\Phi = \Phi(x, t, u)$.

Д. М. Эйдус

8867. О задаче Коши для нелинейных и квазилинейных параболических систем. Эйдельман С. Д., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 6, 930—932

Для нелинейной системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(t, x, u, \dots, \frac{\partial^{2b} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right),$$

параболической в смысле И. Г. Петровского в области

$$P\left\{t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad -\infty < x_s < \infty, \right.$$

$$\left. \left| \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1}, \dots \partial x_n^{k_n}} \right| \leqslant M, \; m = 0, 1, \dots, 2b \right\},$$

рассматривается задача Коши $u|_{t=t_0} = \varphi(x)$. Предполагается, что $F(t, x, y_1, \dots, y_l)$ имеет в P $r_1 = 2b + 2$ непрерывных и ограниченных производных по $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_l$, удовлетворяющих условию Липшица по $y_1, \dots, y_l$, причем $\partial F_i / \partial \left[\frac{\partial^{2b} u_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right]$ непрерывна по t равномерно относительно $x, y_1, \dots, y_l$; $\varphi(x)$ имеет $r_2 = 4b$ непрерывных в смысле Гёльдера и ограниченных производных. Тогда существует такое $\Delta > 0$, что для $t_0 < t < t_0 + \Delta$ существует решение задачи Коши, имеющее $r_3 = 4b$ непрерывных и ограниченных производных по x. Если же $r_1 = 2b + 3$, $r_2 = 4b + 1$, то $r_3 = 4b + 1$. При этом решение единственно в классе функций, имеющих $4b$ ограниченных производных, непрерывных в смысле Гёльдера. Кроме

того, в этом случае решение в некотором смысле непрерывно зависит от начальных данных. Аналогичная теорема формулируется для квазилинейных систем. Кроме того, для квазилинейных систем с линейной главной частью формулируется теорема о корректной разрешимости задачи Коши в классе функций, удовлетворяющих условию

$$|u| \leqslant c_1 \exp[c_2 |x|^q], \quad q = 2b/(2b-1).$$

Доказательства отсутствуют. Д. М. Эйдус

8868. **О некоторых преобразованиях переменных, относящихся к уравнениям теплопроводности.** Гамбургер (Asupra unor transformări de variabile în legătură cu ecuaţia căldurii. Hamburger L.), Studii şi cercetari mec. apl., 1954, 5, № 3—4, 567—588 (рум.; рез. русск. франц.)

Автор дает преобразование переменных в n-мерном евклидовом пространстве, оставляющее неизменным уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \tag{1}$$

В связи с этим принимаем, что

$$y_i = \varphi_i(x_j, t); \ \tau = \psi(x_j, t); \ u = \nu(y_i, \tau)\sigma(x_j, t). \tag{2}$$

Для того чтобы с помощью (2) привести (1) к форме

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \nu}{\partial y_i^2}, \tag{3}$$

находят, с одной стороны, преобразование

$$y_k = c\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(x_i - 2k_i)}{t - t_0} + n_k,$$

$$\tau = \frac{-c^2}{t - t_0} + c_0, \tag{4}$$

$$u = \frac{A_0}{(t-t_0)^{1/2}}\nu \cdot \exp\left[\frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - k_i)}{4(t-t_0)}\right],$$

которые выявляет существование фундаментального решения Пуассона, и с другой стороны, преобразование

$$y_k = c\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}[x_i + 2k_i(t - t_0)] + n_k,$$

$$\tau = c^2(t - t_0) + c_0, \tag{5}$$

$$u = A_0 \nu \cdot \exp\left[\sum_{i=1}^{n} k_i x_i + \sum_{i=1}^{n} k_i^2(t - t_0)\right],$$

которое представляет собой обобщенное подобие.

В (4) и (5) имеем: $\alpha : \alpha_{ik}$ — направляющие косинусы произвольного, но постоянного вращения осей координат; (k_i), $1 \leqslant i \leqslant n$ и (n_i), $1 \leqslant i \leqslant n$ — составляющие двух произвольных векторов; t_0 и c_0 — произвольные постоянные.

Далее автор излагает метод, основанный на расчете делителей, для определения преобразования, переводящего уравнение с частными производными (1) в обыкновенное дифференциальное уравнение. S. Vasilache

8869. **О задаче Коши для параболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.** Житомирский Я. И., Докл. АН СССР, 1957, 116, № 6, 913—916

Изучается задача Коши для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x, t), \ u(x, 0) = 0, \tag{1}$$

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u;$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

в предположениях: $c(x) > c$, $c > 0$; существует дифференцируемая функция $g(x)$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial g}{\partial x_j} = b_i(x). \tag{2}$$

Вначале рассматривается многообразие Ω_L дважды дифференцируемых функций со скалярным произведением

$$(u, v) = \int uve^{-g(x)}dx \tag{3}$$

и устанавливается, что оператор L симметричен и положительно определен на этом многообразии. В силу этого в Ω_L можно ввести новую метрику

$$\{u, u\}' = (Lu, u). \tag{4}$$

Полные гильбертовы пространства, полученные пополнением Ω_L по метрике (3), (4), названы H и H'. Затем рассматривается совокупность функций Ω_S, определенная условиями: 1) $u(x, 0) = 0$, 2) $u(x, t) \in \Omega_L$ при $t \in [0, T]$, 3) du/dt существует в H при $t \in [0, T]$ и $\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) dt < +\infty$, 4) $\int_0^T (Lu, Lu)\, dt < +\infty$. Пополнение Ω_S по метрикам $[u, v] = \int_0^T (u, v)\, dt$ и $\{u, v\}_1 = \int_0^T \{u, v\}'\, dt$ обозначается через A и A', через Ω — совокупность функций $v(x, t) \in \Omega_S$, удовлетворяющих условию $v(x, T) = 0$, (Lu, v) можно реализовать в виде билинейной формы некоторого ограниченного симметричного оператора $\tilde{L}$ в H' $(Lu, v) = \{\tilde{L}u, v\}'$, а $\left[\frac{\partial u}{\partial t}, v\right]$ в A' в виде формы некоторого оператора $\tilde{T}$; $\left[\frac{\partial u}{\partial t}, v\right] = \{\tilde{T}u, v\}_1$. Обобщенным решением задачи (1) называется функция $u(x, t) \in A'$, для которой справедливо равенство $[f, v] = \{u, (\tilde{T} + \tilde{L})^* v\}_1$.

Используя результаты М. И. Вишика (РЖМат, 1956, 8060), автор получает следующую теорему: При любой функции $f(x, t)$, удовлетворяющей условию $\int_0^T (f, f)\, dt < +\infty$, существует обобщенное решение задачи (1), и оно единственно.

Аналогичный результат справедлив и для смешанной задачи в случае полупространства $x_n > 0$, $u|_{x_n=0} = 0$.

С. Д. Эйдельман

8870. **О распространении тепла в трехслойной пластинке.** Водичка (Przewodzenie ciepła w trójwymiarowej płycie o skończonych wymiarach. Vodička Václav), Arch. budowy maszyn, 1956, 3, № 4, 319—331 (польск., англ.; рез. русск.)

Рассматривается нестационарная задача теплопроводности для трехслойной пластинки. Утверждается (без доказательства), что эту задачу можно свести к некоторой одномерной задаче теплопроводности, решаемой методом трансформации Лапласа.

Ш. Е. Микеладзе

8871. **Теорема единственности решения задачи Стефана.** Дуглас (A uniqueness theorem for the solution of a Stefan problem. Douglas Jim, Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 402—408 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(u)\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

в области

$$0 < x < x(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

с граничными условиями:

$$u'_x(0, t) = -a \tag{3}$$

$$u(x(t), t) = 0, \tag{4}$$

где функция $x(t)$ связана с искомой функцией $u(x, t)$ следующим дифференциальным соотношением:

$$dx(t)/dt = b - c \cdot u'_x(x(t), t), \quad t > 0, \tag{5}$$

причем

$$x(0) = 0. \tag{6}$$

Предполагается, что a, b, c — положительные постоянные величины, а на функцию $f(u)$ налагаются условия $0 < f(u) \leqslant M$, $f'(u) \geqslant 0$ при любом значении u. Доказательство теоремы единственности проводится с помощью фундаментального соотношения

$$x(t) = d^* \cdot t - c \int_0^{x(t)} F(u(x, t))\, dx, \tag{7}$$

где $d^* = b + ac$, $F(\xi) = \int_0^{\xi} f(z)\, dz$, получаемое интегрированием левой части уравнения (1) в области (2) с учетом условий (3), (4), (5) и (6). Если задача Стефана имеет два решения: $u_1(x, t)$, $x_1(t)$ и $u_2(x, t)$, $x_2(t)$, то из (7) следует:

$$x_1(t) - x_2(t) = -c \int_0^{y(t)} [F(u_1(x, t)) - F(u_2(x, t))]\, dx + (-1)^i c \int_{y(t)}^{x(t} F(u_i(x, t))\, dx, \tag{8}$$

где $y(t) = \min(x_1(t), x_2(t))$; $z(t) = \max(x_1(t), x_2(t))$, а $u_i(x, t)$ — решение уравнения (1) в области $y(t) \leqslant x \leqslant z(t)$, $t > 0$. Конечноразностным методом устанавливаются неравенства:

$$-a \leqslant u'_x(x, t) \leqslant 0, \tag{9}$$

$$0 \leqslant u(x, t) \leqslant a(y_1(t) - x) \tag{10}$$

при $0 < x < y_1(t)$, из которых следует

$$|u_1(y(t), t) - u_2(y(t), t)| \leqslant a\,|x_1(t) - x_2(t)|. \tag{11}$$

На основании принципа максимума для параболического уравнения и неравенства (11) следует:

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant a \cdot \max_{0 \leqslant r \leqslant T} |x_1(r) - x_2(r)| = aA(T),$$

где $0 \leqslant x \leqslant y(t)$ $0 \leqslant t \leqslant T$. Отсюда

$$|F(u_1(x, t)) - F(u_2(x, t))| \leqslant M\,|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant M_1 A(T). \tag{12}$$

Аналогично

$$|F(u_i(x, t))| \leqslant M\,|u_i(x, t)| = M\,|u_i(x, t) - u_i(x_i(t), t)| \leqslant M'_1\,|x_i(t) - x|\ldots \tag{13}$$

С учетом (12) и (13) из (8) следует $A(T) \leqslant CM_1 y(T) \times \times A(T) + \frac{1}{2} CM'_1 A(T)^2$. Если $A(T) > 0$, то из последнего неравенства получается:

$$1 \leqslant M_2 y(T) + M_2 A(T), \tag{14}$$

где $M_2 = \max\left(CM_1; \frac{1}{2} CM'_1\right)$. Кроме того, из уравнения (5) и неравенства (11) следует $y(T) \leqslant d^* \cdot T$ и $A(T) \leqslant ca \cdot T$. Таким образом, из (14) $1 \leqslant 2d^* M_2 T$. Но последнее неравенство противоречит при $T < (2d^* M_2)^{-1} = T_0$. Это противоречие доказывает, что $A(T) = 0$. Этим самым доказана теорема единственности при $0 \leqslant t \leqslant T_0$. В работе также доказывается неограниченность $T_1 = \sup\{t;\ x_1(\tau) = x_2(\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$ и тем самым доказана теорема единственности полностью.

Е. И. Ким

8872. **Две теоремы разложения, связанные с краевыми задачами для уравнения** $\psi_{\sigma\sigma} - K(\sigma)\psi_{\theta\theta} = 0$. **Баранцев Р. Г.,** Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 4, 551—554

Развиваются результаты, полученные в предыдущих статьях автора (РЖМат, 1958, 1226, 2953). В полосе $S\{\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1;\ -\infty < \theta < +\infty\}$ рассматривается решение уравнения

$$\psi_{\sigma\sigma} - K(\sigma)\psi_{\theta\theta} = 0; \quad K(\sigma) \geqslant \varepsilon > 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям:

$$\psi(\sigma_0, \theta)\, a_0 + \psi_\sigma(\sigma_0, \theta)\, b_0 = 0;$$

$$\psi(\sigma_1, \theta)\, a_1 + \psi_\sigma(\sigma_1, \theta)\, b_1 = 0; \tag{2}$$

$$\psi|_s = \bar{\psi}(\sigma); \quad \psi_\theta|_s = \bar{\psi}_1(\sigma), \tag{3}$$

где a_0; b_0; a_1; b_1 — постоянные, удовлетворяющие условиям $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$; $b_1^2 + a_1^2 \neq 0$; s — некоторая кривая с концами в точках (σ_0, θ_0), (σ_1, θ_1), $\bar{\psi}(\sigma)$ и $\bar{\psi}_1(\sigma)$ — заданные функции, причем $\psi_\theta|_s$ не задается, если s — характеристика уравнения (1).

Как и в указанных выше работах автора, после замены (σ, θ) на (x, t) и ψ на v решение задачи ищется в виде:

$$v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n B_n(x) \exp(-i\lambda_n t),$$

где $\lambda_n = \pm\sqrt{s_n}$, а s_n и $B_n(x)$ — отличные от нуля собственные числа и нормированные собственные функции следующей задачи Штурма—Лиувилля:

$$B''_n + [s_n + u(x)]\, B_n = 0,$$

$$B_n(0)\cos\alpha + B'_n(0)\sin\alpha = B_n(1)\cos\beta + B'_n(1)\sin\beta = 0.$$

Коэффициенты определяются из разложения начальных данных $p(x)=v|_{t=l(x)}$; $q(x)=v_t|_{t=l(x)}$ в ряды:

$$p(x)\approx\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz_n(x), \tag{4}$$

$$q(x)\approx\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(-i\lambda_n)z_n(x), \tag{5}$$

где $z_n(x)=B_n(x)\exp[-i\lambda_n l(x)]$ — собственные функции некоторой несамосопряженной задачи Штурма—Лиувилля.

Формулируются теоремы о сходимости и сумме рядов (4) и (5) в случае $|l'(x)|<1$ и ряда (4) в случае $l(x)=x$ при некоторых условиях для $N(x)$, $l(x)$, $p(x)$, $q(x)$ и для различных значений α и β ($0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$) и намечается путь их доказательства.

И. Л. Кароль

8873. Принцип максимума в сингулярной третьей задаче для уравнения Эйлера—Пауссона—Дарбу. Цю Пэй-чжан, Лин Лин (A maximum principle of the singular third problem for Euler-Poisson-Darboux's equation. Chu Pei-chang, Ling Ling), Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., 1957, **1**, № 6, 373—374 (англ.)

Для решения $u(x, y)$ уравнения

$$E(\beta, \beta')u\equiv u_{xy}-\beta'(x-y)^{-1}u_x+$$
$$+\beta(x-y)^{-1}u_y=0, \tag{1}$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$u(0, y)=0;\ u(x, x)=\tau(x);\ 0\leqslant x\leqslant a, \tag{2}$$

где $\tau(x)$ непрерывно дифференцируема и $\tau(0)=0$, при β', $\beta>0$ и $\beta'+\beta<1$, устанавливается принцип максимума в виде

$$\min_{0\leqslant x\leqslant a}\tau(x)\leqslant u(P)\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant a}\tau(x),$$

где P — произвольная точка замкнутой области существования и непрерывности $u(x, y)$.

Этим обобщается аналогичный результат Жермена, Баде (Germain P., Bader R., C. r. Acad. sci., 1951, **232**, 463—465) для уравнения Трикоми ($\beta'=\beta=1/6$).

И. Л. Кароль

8874. Задача Трикоми для общего уравнения Лаврентьева—Бицадзе. Пулькин С. П., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 1, 38—41

Для уравнения

$$u_{xx}+\operatorname{sgn}y\,u_{yy}+a(x, y)u_x+b(x, y)u_y+$$
$$+c(x, y)u=0 \tag{1}$$

($c(x, y)\leqslant 0$ при $y>0$) в области D, ограниченной гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y>0$ и опирающейся на отрезок AB ($-1\leqslant x\leqslant 1$) оси OX, и характеристиками AC и BC уравнения (1) в плоскости $y<0$, рассматривается следующая краевая задача T (Трикоми):

Найти функцию $u(x, y)$ такую, что: 1) u непрерывна в $\bar{D}$ и удовлетворяет (1) при $y\neq 0$; 2) u_x и u_y непрерывны в D; 3) u удовлетворяет краевым условиям

$$u|_\Gamma=\varphi;\ u|_{AC}=\psi(x).$$

Обычным приемом теории уравнений смешанного типа, путем рассмотрения соответствующих краевых задач для уравнения (1) в областях D_1 и D_2, частях D, лежащих в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$, и последующего «склеивания» их решений на отрезке AB намечается доказательство существования и единственности решения задачи в некотором классе функций, являющихся обобщенными решениями уравнения (1) в D_2. При этом функция φ должна быть непрерывной вместе со своей производной второго порядка, $\psi(x)$ — иметь производную $\psi'(x)$, удовлетворяющую условию Гёльдера в $-1\leqslant x\leqslant 0$, а касательные к Γ в точках A и B должны быть параллельны оси oy. На коэффициенты ab и c, помимо условия существования вторых производных, непрерывных в $\bar{D}_2$ и $\bar{D}_1$, накладывается ряд трудно проверяемых условий, обеспечивающих разрешимость вспомогательных краевых задач в областях D_1 и D_2. Например, должно быть разрешимо двумерное интегральное уравнение, получающееся при решении краевой задачи для уравнения (1) в области D_1, известным методом Лихтенштейна. Автор утверждает, что эти условия выполняются в случае, когда $a\equiv b\equiv 0$, а c зависит лишь от x или от y.

Примечание референта. Во втором слагаемом правой части выражения (2) нижний предел интегрирования по η' должен быть ξ, а не ξ'.

И. Л. Кароль

8875. О принципе максимума и теореме единственности для эллиптико-гиперболического уравнения. Моравец (Note on a maximum principle and a uniqueness theorem for an elliptic-hyperbolic equation. Morawetz Cathleen S.), Proc. Roy. Soc., 1956, **A236**, № 1204, 141—144 (англ.)

Пусть $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения Чаплыгина

$$K(y)u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{1}$$

в односвязной области D с границей B, причем предполагается, что dK/dy ограничена и $K(y)\gtrless 0$ при $y\gtrless 0$.

Автор показывает, что функция

$$\psi(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}\left[-2u_xu_y\,dx+\left(ku_x^2-u_y^2\right)dy\right],\ (x_0, y_0)\in D,$$

своего максимума в замкнутой области $D+B$ достигает на границе B.

На основе этого принципа установлена единственность решения общей смешанной задачи для уравнения (1). Единственность решения указанной задачи в случае уравнения

$$u_{xx}+\operatorname{sgn}y\cdot u_{yy}=0$$

была установлена в работе референта (РЖМат, 1954, 2965).

Следует отметить, что при доказательстве единственности решения общей смешанной задачи как в вышеуказанной работе референта, так и в реферируемой работе на эллиптической части границы смешанной области наложены весьма сильные ограничения, вызванные, по-видимому, методами исследования.

А. В. Бицадзе

8876. Особенности обобщенных осесимметрических потенциалов. Эрдейи (Singularities of generalized axially symmetric potentials. Erdélyi Arthur), Communs Pure and Appl. Math., 1956, **9**, № 3, 403—414 (англ.)

Пусть $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения обобщенных потенциалов

$$u_{xx}+u_{yy}+ky^{-1}u_y=0,\quad k=\text{const},$$
$$k\neq 0, -1, -2, \ldots, \tag{1}$$

в некоторой области, содержащей внутри себя открытый интервал I_0 вещественной оси $y=0$. $g(x)\equiv(x, 0)$ является регулярной аналитической функцией x в интервале I_0. Предположим, что $g(x)$ аналитически продолжается из интервала I_0 в интервал $I\supset I_0$. С помощью продолженной функции $g(x)$, $x\in I$, единственным образом определяется регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(x, 0)=g(x)$, $x\in I$. Полученное таким образом решение уравнения (1) является аналитическим продолжением исходного решения, и поэтому естественно обозначать его опять через $u(x, y)$. Обозначим через J_x максимальный интервал $-\beta(x)<y<\beta(x)$ прямой, параллельной оси $x=0$ и проходящей через $(x, 0)$, в котором $u(x, y)$ является регулярной функцией. Совокупность всех интервалов J_x, по терминологии автора, составляет простую область регулярности $u(x, y)$ относительно I_0.

В реферируемой работе основным является утверждение: если $v(x, y)$ является регулярной симметрической относительно вещественной оси гармонической функцией, а $u(x, y)$ — регулярным решением уравнения (1) при $k\neq-1, -3, \ldots$, причем на некотором интервале I_0 вещественной оси $u(x, 0)=v(x, 0)$, то простые области регулярности $u(x, y)$ и $v(x, y)$ относительно I_0 совпадают. Кроме того, для заданной в I_0 регулярной аналитической функции $g(x)$, простая область регулярности решения $u(x, y)$ уравнения (1) $u(x, 0)=g(x)$ при $k\neq-1, -3$ относительно I_0 не зависит от k. А. В. Бицадзе

8877. **Об явном интегрировании систем n квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка, с $n+1$ неизвестными функциями двух независимых переменных. Гольдхаген** (Despre integrarea explicita a sistemelor de n ecuaţii cu derivate parţiale cvasiliniare de ordinul inţii cu $n+1$ funcţii necunoscute de două variabile independente. Goldhagen E.), Studii si cercetări ştiinţ. Acad. RPR Fil. Jaşi. Mat., 1956, 7, № 1, 51—70 (рум.; рез. русск., франц.)

Интегрируется система

$$\frac{\partial z_h}{\partial x}=A_h(x, y, z_k)\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x}+B_h^j(x, y, z_k)\frac{\partial z_j}{\partial y}+$$

$$+C_h(x, y, z_k),\quad h=1, \ldots, n,\quad j=1, \ldots, n+1,$$

$$k=1, \ldots, n+1,$$

с помощью подстановки

$$z_k=f^k(x, y, \varphi_{\alpha, \beta}),$$

где $\varphi_{\alpha, \beta}=\frac{\partial^{\alpha+\beta}\varphi}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ $(\alpha+\beta=0, 1, \ldots, s)$, $\varphi_{0, 0}=\varphi$. Выполнив подстановку и приравняв коэффициенты при производных функции φ, автор получает систему уравнений для определения функций f^k. Последовательным интегрированием с помощью введения разнообразных вспомогательных неизвестных получено явное представление искомых функций z_k. Рассмотрен пример $(n=2, s=2)$ И. С. Аржаных

8878. **О системах квазилинейных уравнений. Рождественский Б. Л.**, Докл. АН СССР, 1957, 115, № 3, 454—457

Рассматривается система квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}=b_i\quad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (1)$$

Если уравнение

$$\frac{\partial\varphi(u_j, t, x)}{\partial t}+\frac{\partial\psi(u_j, t, x)}{\partial x}=f(u_j, t, x)$$

есть следствие системы (1), то мы назовем его законом сохранения системы (1). Вводится понятие независимости законов сохранения. Квазилинейные системы (1) в работе разделяются на 1) консервативные, у которых число независимых законов сохранения не меньше числа уравнений, 2) на консервативно-замкнутые, в случае равенства, 3) неконсервативные в остальных случаях.

Всякая линейная система уравнений консервативна. В качестве примера рассмотрены уравнения гидромеханики идеальной жидкости. Законы сохранения для них имеют четкий физический смысл. Система уравнений гидромеханики является консервативнонезамкнутой системой.

Консервативная незамкнутость уравнений гидромеханики приводит к тому, что замена уравнений гидромеханики интегральными соотношениями возможна различным образом и может приводить к существенно различным обобщенным решениям. В. М. Бабич

8879. **Об одном классе нелинейных уравнений второго порядка. Лепаж** (Sur une classe d'équations non linéaires du second ordre. Lepage Th. H.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 71, Paris, 1956, 111—115. Discuss. 115 (франц.)

Рассматривается уравнение вида

$$|A+BX|=0,$$

где матрица X имеет элементы $\partial^2 v/\partial x_r\partial x_s$ $(r, s=1, 2, \ldots, n\geqslant 2)$, а матрицы A и B зависят только от x_r, причем матрица AB^*-BA^* имеет ранг 0 или 2. Частным случаем этого класса уравнений являются уравнения Монжа—Ампера. Устанавливается связь задачи интегрирования таких уравнений с задачей приведения к каноническому виду некоторых форм Картана. В соответствии с этим ставится и решается вопрос о преобразованиях, относительно которых уравнение инвариантно. Излагается мнение Дельсарта по данному вопросу. И. С. Аржаных

8880. **Решение с помощью теории матриц системы уравнений с частными производными, служащей для описания свойств электрической сети, состоящей из параллельных проводов. Ловашш-Надь** (Párhuzamos vezetékekből álló rendszer elektromos tulajdonságainak leirására szolgáló parciális diferenciálegyenletrendszer, megoldása a matrix-számitás segitségével. Lovass-Nagy Viktor), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 457—466 (венг.; рез. русск., нем.)

Исследуется распространение волн напряжения в системе, состоящей из параллельных проводов. Дается общее решение матричного дифференциального уравнения, полученного в качестве обобщения скалярного телеграфного уравнения; затем исследуется специальный случай, в котором провода системы эквидистантно распределяются на поверхности круглого цилиндра, описанного вокруг нуль-провода; материальные константы проводов и размеры равны.

P. Rózsa.

8881 К. **Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Часть I. Кшижанский** (Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. Część I. Krzyżanski Mirosław. Bibl. mat., 1957, 15, 617 s.) (польск.)

Реферируемая книга является первой частью учебника по теории дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. В ней излагаются

основные понятия, теоремы и общие формулы теории уравнений в частных производных, теория гармонических функций, элементы теории потенциала, теория уравнений эллиптического и параболического типа. Автор использует лишь классические методы, избегая даже применений интеграла Лебега. В конце каждой главы имеются дополнительные сведения по излагаемым вопросам и задачи для решения. Книга состоит из введения, девяти глав и пяти добавлений.

В введении даются исторические сведения о развитии теории дифференциальных уравнений в частных производных, приводятся основные понятия и определения из топологии и математического анализа, а также первоначальные понятия теории дифференциальных уравнений в частных производных.

В гл. 1 излагается подробное доказательство теоремы Коши-Ковалевской для систем уравнений в частных производных первого порядка и ее применение к уравнениям высших порядков. Этим рассуждениям предшествует сведéние задачи Коши для уравнений высших порядков к задаче Коши для систем уравнений первого порядка и подробные сведения по теории аналитических функций многих переменных и теории мажорантных функций степенных рядов. В частности, для линейных уравнений с аналитическими коэффициентами автор дает оценки области существования решения задачи Коши и вводит понятие характеристической поверхности как поверхности, вдоль которой данные Коши не определяют решения единственным образом. В конце главы излагается теорема Гольмгрена о единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с аналитическими коэффициентами при не аналитических начальных данных.

В гл. 2 рассматриваются понятия характеристики, характеристического конуса, характеристического конноида и бихарактеристики для линейных уравнений второго порядка. Один раздел посвящается введению понятия характеристической линии и характеристической полоски для уравнений в частных производных первого порядка. Далее следует классификация линейных уравнений второго порядка, причем особое внимание уделяется уравнениям с двумя независимыми переменными и приведению их к каноническим формам. Глава кончается классификацией уравнений высшего порядка и нелинейных уравнений.

В гл. 3 рассматриваются начальные и граничные задачи, встречающиеся в приложениях, причем для обоих видов задач автор использует единый термин — краевые задачи. Автор вводит также понятия регулярной и бирегулярной функции, удобные для формулировки различных вопросов. Так, например, термин «регулярная функция в замыкании области» используется автором для обозначения функции класса C^2 внутри области и непрерывной в замыкании области. В этой же главе вводятся понятия нормального гиперболического и нормального параболического уравнений, а также понятие ориентации поверхности относительно данного уравнения. В конце автор рассматривает понятие о корректной постановке краевой задачи.

Гл. 4 посвящена выводу так называемой основной формулы для общего линейного уравнения второго порядка, причем особо рассматривается случай параболических уравнений.

В гл. 5 излагаются теоремы единственности различных краевых задач для линейных уравнений второго порядка всех трех типов. Автор начинает с рассмотрения вопроса единственности задачи Дирихле на основе свойств минимумов и максимумов решений и вопроса единственности третьей краевой задачи и задачи Неймана на основе теорем Ж. Жиро и О. А. Олейник. Случай, когда коэффициент при неизвестной функции меняет знак, и случай неограниченной области рассматриваются отдельно на основе теоремы М. Пиконе. Методами, аналогичными применяемым для эллиптических уравнений, автор доказывает единственность задачи Фурье для нормальных уравнений параболического типа. Доказательство теорем единственности краевых задач для нормальных уравнений гиперболического типа автор проводит, опираясь на так называемые основные неравенства, принадлежащие К. Фридрихсу и Г. Леви. Автор выводит упомянутые неравенства в общей форме, данной им Ю. Шаудером, используя для этого один прием, указанный С. Л. Соболевым. Глава кончается замечаниями о единственности краевых задач для нелинейных уравнений.

В гл. 6 очень подробно рассматривается уравнение Лапласа и свойства его решений в пространстве с любым числом независимых переменных, причем особое внимание уделяется случаю двух независимых переменных. Автор рассматривает здесь первую и вторую основные формулы для гармонических функций, функцию Грина задачи Дирихле и ее свойства, функцию Грина для третьей краевой задачи, задачу Неймана, функцию Неймана, интеграл Пуассона и его свойства, задачу Дирихле для полуплоскости и полупространства, формулы Дини для решения задачи Неймана для сферы и круга, обращение теоремы Гаусса о среднем значении, теорему Гарнака, теорему Заремба о гармонических функциях не непрерывных на границе области, поведение гармонической функции в окрестности особой точки и в окрестности бесконечно удаленной точки, внешнюю задачу Дирихле и Неймана, в частности в случае сферы и окружности.

В гл. 7 рассматриваются свойства и применения ньютоновского и логарифмического потенциалов. При выводе основных свойств потенциалов, таких как теорема Пуассона об объемных потенциалах, формулы скачка для потенциалов двойного слоя, формулы скачка для нормальной производной потенциала простого слоя, автором используются теоремы о так называемых несобственных, локально равномерно сходящихся интегралах. Сведéние задачи Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям типа Фредгольма излагается на основе теории потенциалов простого и двойного слоя. Автор рассматривает также задачу Дирихле для уравнения Пуассона и дает ее решение в виде формулы, использующей функцию Грина. При этом используются некоторые результаты референта, которые ранее не были опубликованы. В последнем разделе рассматривается метод Перрона решения задачи Дирихле с использованием супергармонических и субгармонических функций; там же приведены некоторые критерии регулярности граничных точек области и сведения о результатах Н. Винера.

В гл. 8 рассматриваются линейные уравнения эллиптического типа общего вида на основе работ Э. Леви и В. Штернберга. Один раздел посвящен уравнению $\Delta u + c(x)u = f(x)$ и в нем дается сведéние задачи Дирихле для этого уравнения к интегральному уравнению Фредгольма. Главной темой этой главы является построение фундаментального решения эллиптического уравнения общего вида. При этом построении, которое в конце концов приводится к решению интегрального уравнения Фредгольма, автор использует некоторые теоремы о дифференцировании несобственных интегралов. Для самосопряженных уравнений получаются симметричные фундаментальные решения и при их помощи автор строит аналоги объемного потенциала и потенциалов простого и двойного слоев, обладающие свойствами, аналогичными свойствам ньютоновских потенциалов. На основе изучения свойств упомянутых выше аналогов потенциалов автор приводит задачу Дирихле и задачу Неймана для самосопряженных уравнений к некоторым интегральным уравнениям

Фредгольма. Случай уравнения с двумя независимыми переменными рассматривается особо. Глава кончается сведениями о методе Жиро решения задачи Дирихле и об обобщениях теоремы Гарнака.

В гл. 9 подробно рассматривается уравнение теплопроводности с двумя и более независимыми переменными. Автор вводит фундаментальное решение уравнения теплопроводности и интеграл Фурье—Пуассона, при помощи которого на основе теоремы Вейерштрасса решается задача Коши. Далее выводятся первая и вторая основные формулы для уравнения теплопроводности, определяется функция Грина для первой краевой задачи Фурье и изучаются ее свойства. После введения так называемых тепловых потенциалов и изучения их свойств автор дает решение задач Фурье в виде формул, содержащих функцию Грина для четверти плоскости. Опираясь на свойства тепловых потенциалов, автор приводит задачи Фурье для уравнения теплопроводности к некоторым интегральным уравнениям Вольтерра. Вводя аналоги объемных и поверхностных потенциалов, автор дает решение первой задачи Фурье для уравнения теплопроводности при наличии источников тепла. В последних двух разделах дается сведение задачи Фурье для уравнения $u_{xx} = ug + cu + f$ к интегральному уравнению Вольтерра и строится фундаментальное решение нормального параболического линейного уравнения общего вида с двумя независимыми переменными. Построение автора опирается на конструкцию, данную Ж. Адамаром, и приводит к фундаментальному решению, обладающему некоторыми свойствами, важными для применений в теории стохастических процессов.

В добавлении 1, написанном автором совместно с Лоясевичом и Плисем (S. Łojasiewicz, A. Pliś), приводится доказательство теоремы Грина—Гаусса—Остроградского для областей, граница которых состоит из конечного числа кусков поверхностей класса C^1.

В добавлениях 2, 3 и 4, написанных Ф. Баранским (F. Barański), приводится соответственно вывод формулы объема и площади m-мерной сферы, теорема о продолжении непрерывных функций и теорема Вейерштрасса—Тонелли об аппроксимации непрерывных функций полиномами.

В добавлении 5, написанном Плисем (A. Pliś), приводится доказательство одной теоремы об одном функциональном определителе, который играет существенную роль при построении фундаментального решения для общего линейного эллиптического уравнения. Это доказательство ранее не публиковалось. В конце книги имеется обширная библиография, содержащая 93 названия, а также индекс обозначений и символов.

Книга написана ясным и понятным языком. Кроме гл. 8, которая имеет главным образом обзорный характер, автор приводит доказательства подробные и точные. Необходимо подчеркнуть, что многим понятиям и задачам дается ясное физическое толкование. Многочисленные примеры и чертежи значительно облегчают чтение книги.

Наконец нужно отметить, что реферируемая книга является первым польским учебником по теории дифференциальных уравнений в частных производных, а материал гл. 8 излагается в учебнике впервые. Необходимо также отметить, что уравнения параболического типа ни в каком учебнике не излагались ранее так обстоятельно, как в реферируемом. J Szarski

8882 К. **Теория потенциала. Гюнтер** (Teoria potencjału. G j u n t e r N. M. Tłum z ros. Warszawa, PWN, 1957, 328 s., il. 29 zł), Przew. bibliogr., 1957, **13**, № 42, 579 (польск.)

8883 Д. **Применение функции Дирака к решению задач теплопроводности. Мочалин А. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т энерг. АН БССР, Минск, 1958

8884 Д. **О дифференциальных уравнениях параболического типа в гильбертовом пространстве и о приближенном их решении методом Бубнова—Галеркина. Соболевский П. Е.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Воронеж, 1958

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

8885. **Свободные колебания в случае, когда сопротивление пропорционально 4-й степени скорости. Систанов** (Oscilaciones libres en el caso de una resistencia proporcional al cuadro de la velocidad. S i s p a n o v S e r g i o), Rev. Univ. nac. Tucumán, 1957, **A11**, № 1-2, 49—65 (исп.)

8886. **Особый случай существования малых периодических движений двух маятников, подверженных равномерному вращению. Манолов С.** Прикл. матем. и механ., 1958, **22**, № 1, 139—142

8887. **Проблемы, возникающие в связи с теорией автоколебаний в системах автоматического регулирования. Айзерман М. А.,** Сессия АН СССР по научн. пробл. автоматиз. произ-ва, 1956, Т-2. М., АН СССР 1957, 49—59

Дается краткий обзор приближенных и точных методов разыскания периодических решений в системах дифференциальных уравнений, описывающих процессы автоматического регулирования. Основное внимание уделяется системам вида

$$\dot{x}_i = \sum a_{ik}x_k + \lambda_i f(x_k)$$

в предположении, что $f(x_k)$ кусочнолинейна. Библ. 15 назв. В. В. Немыцкий

8888. **Приближенный метод решения проблемы мощности напряжения в несущей частоту системе. Ульссон, Сигстам** (An approximate method of solution to a problem of power supply in carrier frequency systems. O l s s o n I n g e m a r, S i g s t a m K a j), Ericsson Techn., 1957, **13**, № 2, 351 — 372 (англ.)

8889. **Решение уравнений явнополюсного генератора с емкостью в цепи статора при ненулевых начальных условиях. Новаш В. И.,** Сб. научн. работ Белорусск. политехн. ин-та, 1957, вып. 61, 64—80

Задача о переходных процессах в продольно-компенсированных линиях приводится к решению дифференциальных уравнений, описывающих действие электрической системы, состоящей из генераторов, трансформаторов, линий электропередачи и компенсирующих устройств.

В реферируемой статье автор, пренебрегая некоторыми факторами, которые не оказывают существенного влияния на переходный процесс, приводит упомянутую задачу к решению некоторой системы интегро-дифференциальных уравнений с ненулевыми начальными условиями.

Решение этой системы проводится операционным методом. Аналогичная задача для случая ненагруженного генератора рассматривалась в другой работе автора (Сб. научн. работ Белорусск. политехн. ин-та, 1954, вып. 46). Т. П. Виграненко

8890. **Математическое исследование перегруппировки линейных метилсиликоновых масел. I. Прекопа, Тёрёк** (Lineáris metilsziliko-olajok átrendeződésének matematikai tärgyalása. I. P r é k o p a A n d r á s, T ö r ö k F e r e n c), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. Közl., 1956, **1**, № 1-2, 67—81 (венг.; рез. русск., англ.)

8891. Математическое исследование перегруппировки линейных метилсиликоновых масел. П. Прекопа, Ревес (Lineáris metilszilikon-olajok átrendeződésének matematikai tárgyalása. II. Prékopa András, Révész Pál), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, 1, № 3, 349—356 (венг.; рез. русск., англ.)

8892. О полном осреднении канонической задачи небесной механики с несколькими промежуточными элементами. Моисеев Н. Д., Тр. Астрон. ин-та им. Штернберга, 1954, 24, 10—16

См. РЖМех, 1956, 4953.

8893. Соотношение между нагрузкой и осадкой для сферического штампа. Сегедин (The relation between load and penetration for a spherical punch. Segedin C. M.), Mathematika, 1957, 4, № 8, 156—161 (англ.)

Для нахождения гармонической в полупространстве $z \geqslant 0$ осесимметричной функции $W(r, z)$, удовлетворяющей граничным условиям:

$$W = t(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a, \quad z = 0,$$
$$\partial W/\partial z = 0, \quad r > a, \quad z = 0,$$

автор использует гармоническую функцию $U(r, z, a)$, исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую граничным условиям:

$$U(r, 0, a) = 1, \quad 0 \leqslant r \leqslant a, \quad \partial U/\partial z = 0, \quad r > a.$$

Можно показать, что

$$U = \begin{cases} 1, & 0 < r < a, \quad z = 0, \\ 2\pi^{-1} \sin^{-1}(a/r), & r > a, \quad z = 0. \end{cases}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = \begin{cases} 2\pi^{-1}(a^2 - r^2)^{-1/2}, & 0 \leqslant r \leqslant a, \quad z = 0, \\ 0, & r > a, \quad z = 0. \end{cases}$$

Функция W ищется в виде $U(r, z, a) = \int_0^a U(r, z, \xi) \times K(\xi)\, d\xi$. Неизвестная функция $K(\xi)$ находится из граничных условий в виде ряда по степеням ξ. Полученное решение используется для нахождения соотношения между осадкой и суммарной силой для сферического штампа и штампа в форме эллипсоида вращения.

Примечание референта. Способ, предложенный автором, не нов. Впервые он был применен Хейфеном (Hafen, Math. Ann, 1910, 69), а затем в несколько иной форме Н. А. Ростовцевым (РЖМат, 1954, 2159). В. И. Моссаковский

8894. О решении типа диполя в задачах нестационарной фильтрации газа при политропическом режиме. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 5, 718—720

При нестационарной фильтрации газа плоскими волнами в условиях политропического режима давление газа p, как показал Л. С. Лейбензон (Движение природных жидкостей и газов в пористой среде, М.—Л., ГИТТЛ, 1947), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где x — координата, отсчитываемая по нормали к плоскостям равного давления ($0 \leqslant x < \infty$; $x = 0$ соответствует границе пласта), t — время, a^2 — константа, определяемая свойствами среды и фильтрующегося газа, n — показатель политропы.

Исходя из соображений размерности, авторы строят решение уравнения (1) с нулевыми начальными и граничными условиями в виде

$$p(x; t) = \left(\frac{Q}{a^2 t}\right)^{\frac{1}{n+1}} f(\xi),$$

где $Q = \int_0^\infty xp(x; t)\, dx$, $\xi = x(a^2 Q^n t)^{-\frac{1}{2(n+1)}}$.

Устанавливается, что функция $[f(\xi)]^n$ удовлетворяет неоднородному линейному уравнению первого порядка, интегрирование которого дает

$$f(\xi) = q\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{\frac{1}{n+1}} \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{1+\frac{1}{n+1}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

при $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$ и $f(\xi) = 0$ при $\xi \geqslant \xi_0$, где q и ξ_0 — константы, определенные в явном виде.

Координата границы возмущенной области, давление газа в которой отлично от нуля, изменяется со временем по закону:

$$x^*(t) = \xi_0 (a^2 Q^n t)^{\frac{1}{2n+1}}$$

Из полученных результатов при $n = 1$ вытекает, как частный случай, решение уравнения Буссинеска для изотермической фильтрации газа.

П. Ф. Фильчаков

8895. Решение уравнений осесимметричного сверхзвукового движения газа, линеаризованных относительно течения от газового источника. Полубояринов А. К., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 13, 102—112 (рез. англ.)

Установившееся осесимметричное безвихревое адиабатическое движение идеального газа, определенное в полярной системе координат для меридиональной плоскости, в приближенной постановке исследования сводится к линеаризованному уравнению вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + [a(\varphi) - b(\nu)]\frac{\partial U}{\partial \xi} + [a(\varphi) - b(\nu)]\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0, \qquad (1)$$

где ξ, η — характеристические координаты, связанные с полярными координатами φ, R.

При выполнении определенных условий для функций a и b общее решение уравнения (1) находится по методу Лапласа в виде, удобном для решения граничных задач. При этом соответствующим подбором $a(\varphi)$ и $b(\nu)$ достигается аппроксимация заданных коэффициентов линеаризованного уравнения газового течения. Построенное таким методом общее решение применяется для исследования некоторых частных случаев течения. В. П. Пилатовский

8896. К теории установившихся капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды. Секерж-Зенькович Я. И., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 5, 913—915

Изучается распространение прогрессивных волн конечной амплитуды по поверхности тяжелой жидкости бесконечной глубины. В отличие от задачи Некрасова-Леви—Чивита, учитываются силы поверхностного натяжения. Эта задача сводится к следующей краевой задаче теории аналитических функций: определить функцию $\omega(u) = -\tau + i\vartheta$, регулярную в круге $|u| \leqslant 1$, если на границе мнимая и действительная часть связаны соотношением

$$\frac{d\tau}{d\theta} + \frac{\gamma}{2} e^{-2\tau} \frac{d}{d\theta}\left(e^{\tau} \frac{d\vartheta}{d\theta}\right) = \nu e^{-3\tau} \sin\vartheta, \qquad (1)$$

где γ и ν — постоянные.

Вначале решается линейная задача, которая получается, если условие (1) линеаризовать:

$$\frac{d\tau}{d\theta}+\frac{\gamma}{2}\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}=\nu\vartheta$$

или

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{\gamma}{2}u\frac{d}{du}\left(u\frac{d\omega}{du}\right)-u\frac{d\omega}{du}+\nu\omega\right\}=0. \qquad (2)$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\gamma}{2}u\frac{d}{du}\left(u\frac{d\omega}{du}\right)-u\frac{d\omega}{du}+\nu\omega=0.$$

Оно имеет частные решения вида Ce^s, где s удовлетворяет уравнению $\frac{\gamma}{2}s^2-s+\nu=0$. В силу регулярности u и условия $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{|u|=1}$ — действительное число, число s должно быть целым и положительным. Пусть $s=1$, тогда необходимо должно иметь место равенство

$$\gamma=2(1-\nu). \qquad (3)$$

Уравнение (2) в этом случае имеет решение

$$\omega=\varepsilon u.$$

Если $\nu=\frac{n}{n+1}$, где n — целое, то уравнение (2) при условии (3) может иметь также и решения вида

$$\omega=c_1u+c_2u^n,$$

т. е. значения $\nu=\frac{n}{n+1}$ суть бифуркационные. Далее, пользуясь методом Леви—Чивита, автор строит решения задачи (1), близкие к решению (4).

В качестве малого параметра принимается величина ε. Рассматриваются также и решения вида (5). Полученные ряды позволяют для конечных (но достаточно малых) значений амплитуды волны полностью изучить течение. Так, например, автором показано существование приповерхностного переноса массы.

Автор формулирует теорему о сходимости рядов, расположенных по степеням величины ε и определяющих решение задачи 1. Н. Н. Моисеев

8897. Движение, вызванное сферой, колеблющейся вдоль оси вращения неограниченной вращающейся жидкости. Маллик (Motion induced by a sphere vibrating along the axis of rotation of an infinite rotating liquid. Mallick D.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1957, **A23**, № 6, 544—559 (англ.)

Изучается следующая задача: неограниченная по всем направлениям идеальная несжимаемая жидкость вращается вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью Ω; находящийся в жидкости шар радиусом Q колеблется вдоль оси вращения с заданным законом изменения скорости $v(t)=U\cos\beta t$. В момент $t=0$ шар приходит в поступательное движение со скоростью $V(0)=U$. В предположении, что скорости возмущения основного движения малы, соответствующая система уравнений задачи линеаризована и приведена к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t}-2\Omega u=-\frac{\partial P}{\partial r},\quad \frac{\partial v}{\partial t}+2\Omega u=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v+V)=-\frac{\partial P}{\partial z}.$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{\partial W}{\partial z}=0$$

Методами операционного исчисления решение задачи находится из условий: $u\to0$, $v\to0$, $w\to V(t)$ при $z\to\infty$ и фиксированных r и t; $ru+rw=0$ для точек сферы $r^2+z^2=a^2$ при всех t; $w=-V(0)=-U$, $u=v=0$ при $t=0$ для всех r, z ($r^2+z^2>a^2$). При помощи найденных зависимостей исследованы, во-первых, выражение давления и распределение скоростей для точек сферы и, во-вторых, кинематическое состояние вращающейся массы жидкости вокруг сферы.

Работа представляет обобщение аналогичной задачи, ранее рассмотренной другими авторами при более частных предположениях относительно основного движения шара (Taylor G. I., Proc. Roy. Soc., London, 1922, **A102**, 180—189; Stewartson K., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, **48**, 168—177; Long R. R., Amer. Meteor. Soc., 1953, **10**, 197—203). В. П. Пилатовский

8898. О винтовых движениях баротропной жидкости. Филатов А. Н., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 21, 97—106

Уравнения гидродинамики невязкой баротропной жидкости в установившемся случае тождественно удовлетворяются, если

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=k\mathbf{v}. \qquad (1)$$

Рассмотрены два случая: 1) $k=\text{const}$ (однородный винтовой поток), 2) $k=k(x,\ y,\ z)$ (неоднородный винтовой поток). В первом случае вместе с уравнением (1) должно выполняться уравнение

$$(\mathbf{v},\ \operatorname{grad}v^2)=0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) и (2) записаны в криволинейных координатах и рассмотрены некоторые частные решения, зависящие от одной или двух координат. Рассмотрен также вопрос о сложении двух винтовых потоков. Для неоднородного потока имеет место уравнение

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=\lambda\rho\mathbf{v},\quad \lambda=\text{const}.$$

Рассмотрены частные решения, зависящие от одной или двух координат.

Примечание референта. Библиография (2 назв.) далеко не полная. Отсутствуют ссылки на работы по винтовым потокам несжимаемой жидкости (И. С. Громека, А. Я. Милович, Б. А. Пышкин, С. Г. Попов, О. Ф. Васильев, Е. Д. Томилин). Рассмотренные автором вопросы были впервые для случая несжимаемой жидкости изучены в работах О. Ф. Васильева. И. С. Аржаных

8899. О единственности и несуществовании течений Стокса. Финн, Нолль (On the uniqueness and non-existence of Stokes flows. Finn Robert, Noll Walter), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1957, **1**, № 2, 97—106 (англ.)

Доказывается, что вязкое течение Стокса, удовлетворяющее уравнению

$$\Delta\mathbf{q}=\operatorname{grad}p,\quad \operatorname{div}\mathbf{q}=0,$$

является единственным для всякого ограниченного тела, кильватерное течение за которым образует однородный в бесконечности поток с заданной скоростью $\mathbf{q}_0$.

Далее доказывается, что аналогичное плоское течение около неподвижного тела (цилиндра) сводится к состоянию покоя ($\mathbf{q}=0$). Доказательство основано на нескольких леммах об оценках потока в бесконечности. Получены выражения вектора скорости; частным случаем найденных выражений являются формулы Стокса для известного медленного вязкого течения около сферы. В. П. Пилатовский

8900. О нестационарном течении вязкой жидкости между параллельными пористыми стенками. Долидзе Д. Е., Докл. АН СССР, 1957, 117, № 3, 380—383

Задача сводится к нахождению функции тока, взятой в форме

$$\psi = (1 - \lambda x) f(y, t), \quad \lambda = 2v^0(t)/h\bar{u}(t),$$

где $\bar{u}(t)$ — осредненное значение продольной скорости потока в начальном сечении; $v_0(t)$ — значение скорости проницаемости стенок. При этом функция $f(y, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(vf_{yy} - f_t) = \lambda(f_{yyy}f - f_y f_{yy}) \qquad (1)$$

и дополнительным условиям

$$f(0, t) = -v^0(t)/\lambda, \quad f(h, t) = v^0(t)/\lambda, \qquad (2)$$

$$f_y(0, t) = f_y(h, t), \quad f(y, 0) = \psi^0(y),$$

где h — расстояние между стенками. Функция $f(y, t)$ в форме суммы двух слагаемых находится из системы некоторых нелинейных интегральных уравнений.

В. П. Пилатовский

8901. Об управлении перемещением контура нефтеносности при упругом и водонапорном режимах. Данилов В. Л., Чугунов В. Д., Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1957, вып. 11, 23—35

Рассмотрена плоская задача управления перемещением контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды при упругом и водонапорном режимах пласта. Мощность пласта и его проницаемость принимаются постоянными. Предполагается также, что область G_1, занятая нефтью, односвязная, а область G_2, внешняя по отношению к G_1, простирается до бесконечности и всюду заполнена водой. В случае упругого режима используются тепловые потенциалы простого и двойного слоя. Указаны два пути сведения задачи к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода.

Рассмотренные способы применены также и при решении задачи в случае водонапорного режима. При этом вместо тепловых потенциалов используются логарифмические потенциалы простого и двойного слоя, в результате чего задача сводится к линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Приведен пример решения задачи управления контура нефтеносности при концентрическом круговом стягивании контура в неограниченном пласте.

Изложенные методы допускают обобщение на случай смешанного режима — водонапорного в нефтяной зоне и упругого в водной зоне.

Работа является непосредственным продолжением предыдущих исследований авторов (РЖМат, 1956, 5898, 5903). П. Ф. Фильчаков

8902. Метод Винера-Хопфа в проблемах упругости. Пария (The method of Wiener—Hopf in elastic problems. Paria Gunadhar), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, 49, № 1, 37—42 (англ.)

Исследуется обобщенное плоское напряженное состояние бесконечной полосы ($-\infty < x < +\infty$, $0 \leqslant y \leqslant 1$) при следующих смешанных краевых условиях: при $y = 1$ отсутствуют напряжения σ_y и τ_{xy}; при $y = 0$ $\tau_{xy} = 0$ для всех $-\infty < x < +\infty$, при $y = 0$ и $x < 0$ $\sigma_y = 0$, при $y = 0$ и $x > 0$ задано нормальное перемещение $v = \varphi_+(x)$.

Предполагая, что при $y = 0$ и $x > 0$ $\sigma_y = -m_+(x)$, и применяя аппарат интегралов Фурье, автор получает для неизвестной функции $m_+(x)$ интегрально уравнение первого рода типа Винера—Хопфа:

$$\int_0^\infty m_+(\xi) h(x - \xi)\, d\xi = \varphi_+(x),$$

где ядро $h(x)$ — известная функция, пропорциональная обращению по Фурье функции

$$H(\omega) = \frac{2\omega + \operatorname{sh} 2\omega}{\omega(\operatorname{sh}^2 \omega - \omega^2)}.$$

Решение полученного интегрального уравнения дано в квадратурах. Я. С. Уфлянд

8903. Задача безмоментного напряженного состояния торообразной оболочки. Мецховришвили Ш. С., Тбилисис математикис институтис шромеби. Сакартвелос ССР мецниереба та академия, Тр. Тбилисск. матем. ин-та. АН ГрузССР, 1957, 24, 179—193

В первой части работы рассматривается возможность безмоментного напряженного состояния кругового тора при действии осесимметричных внешних сил. Получены в общем виде условия для внешних сил, осуществляющих безмоментное напряженное состояние. В качестве примеров показано, что безмоментное напряженное состояние имеет место, в частности, при 1) постоянном гидростатическом давлении и 2) одновременном действии сил тяжести, вертикальной поверхностной силы и постоянного гидростатического давления.

Изучается единственность решения граничной задачи для части кругового тора, ограниченной линиями $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ (φ — внутренняя широта). Доказана единственность решения при задании на границе 1) касательного усилия или 2) линейной комбинации нормального и касательного усилия.

Во второй части получены аналогичные результаты для эллипсоидального тора. А. Н. Тюманок

8904. К расчету сильно изогнутых круговых балок. Пфефферкорн (Beitrag zur Berechnung stark gekrümmter Kreisbogenträger. Pfefferkorn Wolfgang), Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg, 1957, 1, № 2, 85—90 (нем.)

Приводится приближенное решение задачи о деформации кругового бруса, имеющего вид части кругового кольца произвольного поперечного сечения, закрепленного на одном конце и нагруженного силами и моментами по другому концевому сечению.

Дано сравнение полученных расчетных формул с точными формулами теории упругости для случая поперечного сечения в виде тонкого прямоугольника.

Я. С. Уфлянд

8905. К решению пространственной задачи теории упругости. Деев (До розв'язку просторової задачі теорії пружності. Деев В. М.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 1, 29—32 (укр.; рез. русск., англ.)

Уравнения статики теории упругости в напряжениях тождественно удовлетворяются, если тензор напряжений представить по формуле автора через гармонический или бигармонический тензор, что в частных случаях совпадает с известными формулами общих решений. И. С. Аржаных

8906. Интегральное представление решений системы дифференциальных уравнений теории поля. Аржаных И. С., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 21, 7—28

Рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида:

$$\operatorname{div} \bar{v}_k = \theta_k, \quad \operatorname{rot} \bar{v}_k = \bar{\omega}_k + \sum_{l=1}^{N} a_{kl} \frac{\partial \bar{v}_l}{\partial t} \qquad (1)$$

$$k = 1, 2, \ldots, N,$$

где θ_k и $\bar{\omega}_k$ — заданные функции координат в некоторой области Q, ограниченной поверхностью S, и времени t. Ставится задача: представить решение системы (1) в виде объемных и поверхностных интегралов по области Q и поверхности S.

Введем обозначения:

$$\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_N\}, \quad \bar{\Omega} = \{\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_N\},$$

$$A = \| a_{kl} \|, \quad \bar{V} = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_N\}$$

и перепишем систему (1) в сокращенном виде:

$$\operatorname{div} \bar{V} = \Theta, \quad \operatorname{rot} \bar{V} = \bar{\Omega} + A \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}. \tag{2}$$

Выполняя подстановку $\bar{V} = B\bar{U}$, получим

$$\operatorname{div} \bar{U} = \Phi, \quad \operatorname{rot} \bar{U} = \bar{\Psi} + B^{-1}AB \frac{\partial \bar{U}}{\partial t}, \tag{3}$$

где $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\} = B^{-1}\Theta$, $\bar{\Psi} = \{\bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_N\} = B^{-1}\bar{\Omega}$.

Выберем матрицу B таким образом, чтобы матрица $B^{-1}AB$ была канонической, тогда система (3) распадается на ряд подсистем, которые можно разделить на подсистемы четырех типов:

1. Подсистема, соответствующая простому нулевому корню:

$$\operatorname{div} \bar{u}_k = \varphi_k, \quad \operatorname{rot} \bar{u}_k = \bar{\psi}_k. \tag{4}$$

2. Подсистема, соответствующая простому ненулевому корню:

$$\operatorname{div} \bar{u}_k = \varphi_k, \quad \operatorname{rot} \bar{u}_k = \bar{\psi}_k + \lambda_k \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial t}. \tag{5}$$

3. Подсистема, соответствующая кратному нулевому корню, имеющему элементарный делитель λ^M $(M > 1)$

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \bar{u}_1 = \varphi_1, \quad \operatorname{rot} \bar{u}_1 = \bar{\psi}_1, \\ &\operatorname{div} \bar{u}_2 = \varphi_2, \quad \operatorname{rot} \bar{u}_2 = \psi_2 + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\operatorname{div} \bar{u}_M = \varphi_M, \quad \operatorname{rot} \bar{u}_M = \bar{\psi}_M + \frac{\partial \bar{u}_{M-1}}{\partial t} \end{aligned} \tag{6}$$

4. Подсистема, соответствующая кратному ненулевому корню, имеющему элементарный делитель:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \bar{u}_1 = \varphi_1, \quad \operatorname{rot} \bar{u}_1 = \bar{\psi}_1 + \mu \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t}, \\ &\operatorname{div} \bar{u}_2 = \varphi_2, \quad \operatorname{rot} \bar{u}_2 = \bar{\psi}_2 + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \mu \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\operatorname{div} \bar{u}_M = \varphi_M, \quad \operatorname{rot} \bar{u}_M = \bar{\psi}_M + \frac{\partial \bar{u}_{M-1}}{\partial t} + \mu \frac{\partial \bar{u}_M}{\partial t}. \end{aligned} \tag{7}$$

Автор показывает, что решение рассматриваемых им подсистем, а следовательно, и решение исходной системы (1) может быть записано в виде суммы объемных интегралов от заданных величин и поверхностных интегралов от граничных значений искомых векторов.

Наиболее подробно анализируются системы (1), характеристическое уравнение которых

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{8}$$

имеет лишь чисто мнимые корни. Такие системы автор называет гиперболическими, к их числу принадлежит, в частности, система уравнений Максвелла.

Для гиперболических систем (1) рассматривается следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} &\bar{n}\bar{v}_\mu = h_\mu(s, t), \qquad \mu = 1, \ldots, M, \\ &\bar{n} \times \bar{v}_\nu = \bar{g}_\nu(s, t), \quad \nu = M+1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $\bar{n}$ — нормаль к поверхности S, $\bar{h}_\mu(s, t)$ и $\bar{g}_\nu(s, t)$ — заданные величины. Применение полученных формул требует знания, наряду с величинами (9), величин

$$\bar{n} \times \bar{v}_\mu = \bar{\zeta}_\mu(s, t), \quad \mu = 1, \ldots, M,$$

$$\bar{n}\bar{v}_\nu = \eta_\nu(s, t), \quad \nu = M+1, \ldots, N.$$

Для их определения составляется система интегральных уравнений.

Примечание референта. Подсистемы (6) и (7) записаны в работе неверно: в k-м уравнении вместо производной $\frac{d\bar{u}_{k-1}}{dt}$ автор пишет $\bar{u}_{k-1}$ $(k=2, 3, \ldots, M)$. Поэтому полученные результаты можно считать строго обоснованными лишь для таких систем, которые не приводят к подсистемам вида (6) и (7). Общий случай нужно проанализировать заново. Д. П. Костомаров

8907. **Об интегрировании уравнений Максвелла.** **Марциани** (Sulla integrazione delle equazioni di Maxwell. Marziani Marziano), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte 1, 1957, 27, 80—89 (итал.)

Однородный диэлектрик ограничен регулярной поверхностью Σ. При $t \geqslant 0$ на этой поверхности задается электромагнитное поле. Решается задача об интегрировании уравнений Максвелла с нулевыми начальными условиями. Если через $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ обозначить преобразования Лапласа по времени для векторов электромагнитного поля, а через $L(\mathbf{u})$ и $L_2(\psi)$ — преобразования

$$L(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi x - \eta y - \zeta z)\, \mathbf{u}(x, y, z)\, dxdydz,$$

$$L_2(\psi) = \int_{\Sigma} \exp(-\xi x - \eta y - \zeta z)\, \psi(x, y, z)\, d\sum,$$

то решение для вектора $\mathbf{e}$ имеет вид

$$L(\mathbf{e}) = \alpha^{-1} L_2(\mathbf{f}),$$

где $\mathbf{f} = p\mu\,[\mathbf{hn}] - [\mathbf{r}\,[\mathbf{eh}]]$, $\alpha\mathbf{u} = [\mathbf{r}\,[\mathbf{ru}]] + p^2\varepsilon\mu\mathbf{u}$, $\mathbf{r} = \{\xi, \eta, \zeta\}$.

Аналогично можно получить выражение для вектора $\mathbf{h}$. Эти выражения применяются затем к случаю двуосного кристалла и изотропного диэлектрика.

П. П. Бирюлин

См. также: 8771, 8927, 8928, 8932, 8938, 8944, 8945, 8975, 9002, 9248—9252, 9255, 9256—9261.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *В. В. Немыцкий*

8908. **О ядрах линейных интегральных уравнений, не имеющих собственных значений. Фейе** (Lineáris integrálegyenletek sajátérték nélküli magjairól. Fenyő István), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, **1**, № 3, 423—427 (венг.; рез. русск., нем.)

Работа дает новое, элементарное доказательство следующей теоремы: Для того чтобы определенное в некотором квадрате ядро типа Фредгольма $K(x, y)$ линейного интегрального уравнения не имело собственных значений, необходимо и достаточно выполнения условия $A_n = 0$, $n \geqslant n_0$, где числа A_n означают следы ядра K. И, наоборот, если K не имеет собственных значений, то $A_n = 0$ при $n \geqslant 2$. Если K непрерывно, то $A_n = 0$ при $n \geqq 1$. Непосредственным следствием теоремы является фундаментальная теорема о существовании собственных чисел у симметричных ядер. Ибо, если K симметрично, то $A_2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x, y)\, dxdy > 0$ (если K не равно тождественно нулю) и, значит, в силу предыдущего, K имеет собственное число.

Резюме автора

8909. **Интегральные уравнения колебания прямой балки с тонкостенным, открытым и дважды симметричным профилем. Краус** (Die Integralgleichungen der Kippung gerader Träger mit dünnwandigen, offenen und doppeltsymmetrischen Profilen. Kraus I.), Ingr-Arch., 1958, **26**, № 1, 1—19 (нем.)

8910. **Некоторые замечания о пользе математики автоматов. Броида** (Quelques apercus sur l'utilité des mathématiques de l'automatisme. Broïda Victor), Mém. Soc. ingrs civils France, 1957, **110**, № 6, 562—570 (франц.)

8911. **Замкнутое решение одного случая изгиба полубесконечной полосы-пластинки с разрывными краевыми условиями. Кацнер** (A closed solution in the case of bending of a semi-infinite plate strip with discontinuous boundary conditions. Kacner A.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. Sci. techn., 1958, 6, № 1, 7—11, II (англ.; рез. русск.)

8912. **Особые решения возмущенного линейного интегрального уравнения. Рыбин П. П.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 19, 30—34

Рассматривается интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds + \lambda \int_a^b [A_0(x, s) + A_1(x, s)\,\varphi(s) + A_2(x, s)\,\varphi^2(s)]\,ds.$$

Ищутся условия существования решений вида

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x)/\mu + \varphi_1(x) + \mu\varphi_2(x) + \ldots,$$

где $\mu = \sqrt{\lambda}$, либо $\mu = \lambda$. Такие решения названы особыми.

Теорема 1. Если $K(x, s)$ — регулярное ядро, имеющее единицу характеристическим числом первого ранга с собственной функцией $p(x)$ и союзной — $q(x)$, то в случае

$$\alpha\beta < 0,$$

где

$$\alpha = \int_a^b f(x)\,q(x)\,dx, \qquad \beta = \int_a^b \int_a^b A_2(x, s)\,p^2(s)\,q(x)\,dxds,$$

существуют два особых решения с $\mu = \sqrt{\lambda}$.

Теорема 2. Если $K(x, s)$ не имеет характеристического числа 1, или если $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, то особых решений нет.

Изучен также случай $\alpha = \beta = 0$. Р. Э. Виноград

8913. **Об одном методе решения интегральных уравнений. Положий Г. Н.**, Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 5, 876—878

Пусть линейный оператор B отображает гильбертово пространство на себя. Тогда решение уравнения $B\varphi = f$ может быть получено следующим очевидным итерационным процессом, отмеченным, например, М. А. Красносельским и С. Г. Крейном (Матем. сб., 1952, **31**, № 2, 315—334, в особенности стр. 321; там указана и быстрота сходимости процесса). Уравнение $B\varphi = f$ заменяется уравнением $\varphi = C\varphi + kB^*f$, где $C = E - kB^*B$, причем $\|C\| < 1$, если $k > 0$ достаточно мало. Поэтому, в силу теоремы о неподвижной точке сжимающего преобразования, искомое решение есть предел последовательности

$$\varphi_{n+1} = C\varphi_n + kB^*f \qquad (1)$$

с любым начальным φ_0.

Основная часть (теоремы 1 и 1′) реферируемой заметки посвящена описанию и детализации процесса (1) для частного случая оператора

$$B\varphi(x) = \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy - \mu\varphi(x),$$

где μ не есть собственное значение квадратично интегрируемого ядра $K(x, y)$.

Далее (теоремы 2 и 2′) аналогично конструируется итерационный процесс для уравнения Фредгольма первого рода.

Примечание референта. 1. Теоремы 2 и 2′ в той форме, в которой они приведены в заметке, неверны, так как уравнение первого рода имеет решение лишь при истокообразно представимой правой части (см. например., Привалов И. И., Интегральные уравнения, 1937, стр. 154). 2. Содержащееся в заметке утверждение, что последовательность (1) в случае симметричного ядра приводит к разложению решения по собственным функциям, непонятно, так как в процессе (1) собственные функции никак не участвуют.

Е. Г. Шилов

8914. **Об одном новом методе решения интегральных уравнений. Положий** (Про один новий метод розв'язання інтегральних рівнянь. Положій Г. М.), Наук. щорічник. Механ.-матем. фак. Київськ. ун-ту, 1956, Київ, 1957, 530 (укр.)

8915. **Резольвента уравнения Вольтерра в случае применения обобщенной функции ползучести. Быхавский** (Resolving kernel of the Volterra equation in the case of the generalized creep function. Bychawski Zbigniew), Arch. mech. stosowanej, 1957, **9**, № 2, 247—257 (англ.; рез. русск., польск.)

Исследуются интегральные уравнения Вольтерра теории ползучести для некоторых материалов, в особенности для бетона. Ядро уравнения принимается в виде конечной суммы показательных функций, параметры которых подобраны так, чтобы функция точно соответствовала явлению ползучести. Интегральные уравнения теории ползучести решаются, когда в качестве резольвенты используются линейные дифференциальные выражения n-го порядка. Определение резольвенты сводится к решению однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. В качестве примера рассматривается задача определения потерь предварительных напряжений в пучке проволоки бетонного элемента вслед-

ствие ползучести и усадки бетона, функция ползучести принимается в обобщенном виде. М. А. Задоян

8916. **Обобщение теории нелинейных интегральных уравнений Н. Н. Назарова. Лобачев С. В.,** Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1957, № 16, 7—15

Известно, что Н. Н. Назаров, А. И. Некрасов и другие авторы исследовали точки разветвления решений разных классов нелинейных интегральных уравнений. Назаров, исследуя уравнение Гаммерштейна

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y, \varphi(y))\, dy, \qquad (1)$$

нашел, что в зависимости от того, является ли λ_0 собственным значением ядра $K(x, y) \cdot \frac{\partial f(y, \varphi_0)}{\partial \varphi_0}$ или нет, решение $\varphi_0(x)$ уравнения (1), соответствующее числу $\lambda = \lambda_0$, можно продолжить аналитически или алгебраически. При этом ранг собственного значения $\lambda = \lambda_0$ предполагался равным единице. В своей диссертационной работе Н. Н. Назаров рассматривал и случай ранга больше единицы, но этот вопрос им не был исследован до конца.

Автор данной работы исследует этот вопрос до конца для уравнения (1). Сформулируем одну из пяти теорем.

Теорема 1. Если $\lambda = \lambda_0$ является собственным значением ядра $K(x, y)$ ранга q, $A_0 = 0$, $A_1 \equiv 1$, $A_2 \neq 0$, то уравнение (1), кроме тривиального решения $\varphi(x) \equiv 0$, может иметь не более $2q - 1$ голоморфных решений, разлагающихся в ряд по степеням $\lambda = \lambda_0$ и стремящихся к нулю при $\lambda \to \lambda_0$. Следует отметить, что при условиях теоремы 1 уравнение (1) может иметь и бесчисленное множество решений, обладающих вышеуказанными свойствами.

Автор рассматривает также разветвление решений уравнения Урысона

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \Gamma(x, y, \varphi(y))\, dy$$

в случае ранга $q > 1$. К. Т. Ахмедов

8917. **О сходимости рядов, получаемых при решении нелинейных интегральных уравнений. Рыбин П.П.,** Докл. АН СССР, 1957, 115, № 3, 458—464

Рассматривается уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^1 K(x, y, \varphi(y), \lambda)\, dy, \qquad (1)$$

где $K(x, y, \varphi, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных и аналитична по двум последним, т. е.

$$K(x, y, \varphi, \lambda) = \sum_{i, j=0}^{\infty} A_{ij}(x, y) \varphi^i \lambda^j, \qquad (2)$$

где $A_{ij}(x, y)$ непрерывны при всех i, $i = 0, 1, \ldots$, причем $|A_{ij}(x, y)| < B_{ij}$, а ряд

$$B(\varphi, \lambda) = \sum_{i, j=0}^{\infty} B_{ij} \varphi^i \lambda^j$$

сходится при $|\varphi| < \rho_1$, $|\lambda| < \rho_2$.

При исследовании точек разветвления решения уравнения (1) встречаются три случая:

1) 1 не является собственным значением ядра $A_{10}(x, y)$;

2) 1 является собственным значением ядра $A_{10}(x, y)$, причем свободный член первого уравнения рекуррентной системы ортогонален к собственной функции сопряженного ядра $A_{10}(y, x)$ и, наконец,

3) 1 является собственным значением ядра $A_{10}(x, y)$ и нет ортогональности.

В каждом из случаев 2) и 3) в зависимости от равенства нулю функций $A_{kj}(x, y)$; $k = 2, 3, \ldots, \varkappa$; $j = 0, 1$, при разных $\varkappa$ получаются разные задачи. В предыдущих работах для каждой из этих задач строится самостоятельное мажорантное уравнение. Автор предлагает общее мажорантное уравнение, заменяющее все указанные. К. Т. Ахмедов

8918. **О некоторых свойствах сингулярных операторов и решений сингулярных интегральных уравнений. Софронов И. Д.,** Докл. АН СССР, 1956, 110, № 6, 940—942

В работе исследуются линейные интегральные уравнения вида

$$K\varphi \equiv a(x)\varphi(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(t, x) \operatorname{ctg} \frac{t - x}{2} \varphi(t)\, dt = f(x), \qquad (1)$$

где $a(x)$, $n(t, x)$, $f(x)$ — функции из класса Гёльдера.

В работе сформулирована (без доказательства) следующая теорема (4): Если правая часть и коэффициенты уравнения (1) непрерывны в смысле Гёльдера с показателем α, индекс уравнения (1) равен нулю, то решение $\varphi(x)$ непрерывно по Гёльдеру с показателем β, где β — любое положительное число меньше α. Автор утверждает, что эта теорема верна, когда индекс уравнения (1) отличен от нуля.

Далее автором исследуется дифференцируемость функции

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \varphi(t, x) \operatorname{ctg} \frac{t - x}{2}\, dt.$$

Следующее утверждение автора (без доказательства) относится к вопросу о том, в какой мере гладкость коэффициентов переносится на решение уравнения (1).

Примечание референта. Утверждения, подобные утверждениям теоремы (2) и (1), имеются в работе референта (Матем. сб., 1947, 20 (62), № 2) и в работе Б. И. Гехта (РЖМат, 1956, 3067, 5279). А. И. Гусейнов

8919 К. **Интегральные уравнения. Фенъё** (Integrálegyenletek. Fenyö István (Müszaki matematikai gyakorlatok C. III.). Budapest, Tankönyvkiadó, 1957, 181 l., ill., 17 Ft.) (венг.)

Излагаются элементы теории интегральных уравнений и приводится большое количество (261) задач. По мнению референта, книга (по крайней мере, раздел 1) может быть использована также математиками, желающими получить общую ориентировку в теории интегральных уравнений, в особенности, если они просмотрят и задачи (для решения которых достаточно знать резюмирующую часть книги).

Содержание: I. Теоретическая часть. Понятие и различные типы интегральных уравнений. Решение с помощью систем алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений, последовательных приближений и интегральных преобразований. Интегрированные ядра, резольвентное ядро. Определитель Фредгольма. Обычные и шмидтовы собственные значения и функции. Разложение в ряды. II. Применения. Применения интегральных уравнений к решению краевых задач в теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям, обладающим ядрами типа $K(x-y)$ и типа Коши и Гильберта.

В изложении применяются элементарные средства функционального анализа. Подробно трактуются и уравнения Фредгольма первого рода. Задачи очень разнообразны и связаны с различными областями математики, физики и т. д. Решния задач собраны в конце книги. Подчеркиваются практические методы решения.

Референт считает книгу весьма полезной для усвоения практики решения интегральных уравнений. Библ. 30 назв.
P. Medgyessy

См. также: 8865, 8889, 8900, 8902, 8919 К, 9262, 9263

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

8920. **Об экстремалях одного класса вариационных задач. Чинкуини** (Sopra le estremali di una classe di problemi variazionali. Cinquini Silvio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 23, № 1-2, 22—28 (итал.)

Автор продолжает свои предыдущие исследования (Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1946, 1, 500—505; 586—591) по данному вопросу. Пусть $F(x, y, x', y', \theta')$ — функция, определенная и непрерывная вместе с частными производными первого порядка по всем переменным в каждой точке области A для любой пары $x', y', x'^2 + y'^2 \neq 0$, и для любого конечного числа θ'. Пусть F — положительно однородная функция первого порядка по переменным x', y' и такая, что $F(x, y, 0, 0, \theta') = 0$.

Пусть $C^{(2)}$: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, — спрямляемая кривая, для которой $x(s)$, $y(s)$, абсолютно непрерывны вместе с производными первого порядка, все точки $(x(s), y(s))$ при $0 \leqslant s \leqslant L$ принадлежат A и для которой существует (в смысле Лебега) конечный интеграл

$$\mathscr{J}^{(2)}_{C^{(2)}} = \int_{C^{(2)}} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s))\, ds,$$

причем $\theta'(s)$ — кривизна кривой $C^{(2)}$, т. е.

$$\theta'(s) = \frac{d\theta(s)}{ds} = x'(s)\, y''(s) - x''(s)\, y'(s).$$

Доказывается следующая теорема:

Пусть $K^{(2)}$ — класс кривых $C^{(2)}$. Если кривая $\overline{C}^{(2)} \in K^{(2)}$ реализует минимум интеграла $\mathscr{J}^{(2)}_{C^{(2)}}$, то любая дуга кривой $\overline{C}^{(2)}$:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s_1 \leqslant s \leqslant s_2,$$

кривизна $\theta'(s)$ которой конечна и непрерывна на (s_1, s_2), причем все точки (s_1, s_2), за возможным исключением концов, находятся внутри области A, должна удовлетворять системе дифференциальных уравнений Эйлера

$$F_x - \frac{d}{ds}\left[E_{x'} - x'\theta' F_{\theta'} + y' \frac{dF_{\theta'}}{ds}\right] = 0,$$

$$F_y - \frac{d}{ds}\left[F_{y'} - y'\theta' F_{\theta'} - x' \frac{dF_{\theta'}}{ds}\right] = 0.$$

Кривая $C^{(2)}$, имеющая конечную и непрерывную на всем $(0, L)$ кривизну $\theta'(s)$ и удовлетворяющая в каждой точке $s \in (0, L)$ системе уравнений Эйлера, называется экстремалью второго порядка относительно функции F.

Доказываются некоторые утверждения, относящиеся к экстремалям и к системе уравнений Эйлера.
М. К. Керимов

8921. **Об экстремалоидах одного класса вариационных задач. Чинкуини** (Sopra le estremaloidi di una classe di problemi variazionali. Cinquini Silvio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 23, № 3—4, 116—120 (итал.)

Экстремалоидом второго порядка относительно функции $F(x, y, x', y', \theta')$ называется кривая $C^{(2)}$:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant L,$$

для которой; 1) выражения $F_x, F_y, F_{x'} - 2x'(s)\,\theta'(s)\,F_{\theta'}$, $F_{y'} - 2y'(s)\,\theta'(s)\,F_{\theta'}$ интегрируемы по Лебегу на $(0, L)$; 2) в каждой точке $s \in (0, L)$ удовлетворяются уравнения

$$\int_0^s ds \int F_x ds - \int_0^s [F_{x'} - 2x'\theta' F_{\theta'}]\, ds - \frac{d}{ds}\int_0^s y' F_{\theta'} ds = C_1 + C_2 s,$$

$$\int_0^s ds \int_0^s F_y ds - \int_0^s [F_{y'} - 2y'\theta' F_{\theta'}]\, ds + \frac{d}{ds}\int_0^s x' F_{\theta'} ds = C_3 + C_4 s,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — некоторые постоянные.

Доказывается, что если $C^{(2)}$ есть экстремалоид второго порядка, имеющий на $(0, L)$ конечную и непрерывную кривизну $\theta'(s)$, то она является также экстремалью второго порядка (реф. 8920). Утверждается, что кривая, реализующая минимум интеграла $\mathscr{J}^{(2)}_{C^{(2)}}$, является экстремалоидом второго порядка, если ее угол наклона $\theta(s)$ имеет ограниченный рост. Формулируется общая теорема, где условие об ограниченном росте заменяется некоторыми довольно громоздкими неравенствами. Наконец, формулируется теорема о том, что при некоторых условиях можно доказать существование по крайней мере одной экстремали рассматриваемой задачи, соединяющей две заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и имеющей в них заданные угловые коэффициенты. Приводится пример.
М. К. Керимов

8922. **Об одной теореме, относящейся к минимум-кривой одного класса вариационных задач. Чинкуини** (Sopra un teorema relativo alle estremanti di una classe di problemi variazionali. Cinquini Silvio), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1957, 11, № 3—4, 137—147 (итал.)

Развернутое изложение результатов, опубликованных ранее (реф. 8920, 8921).
М. К. Керимов

8923. **О достаточных условиях непрерывности (порядка n) функционала $n+1$-го порядка. Вольпато**

(Sulle condizioni sufficienti per la continuitá (di ordine n) di un funzionale di ordine n+1. Volpato Mario), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 26, 1—9 (итал.)

Используя результаты своих предыдущих работ (РЖМат, 1957, 2169), автор доказывает следующее утверждение:

Теорема. Пусть $Q(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)})$ — функция действительных переменных, определенная и ограниченная в области R:

$a \leqslant x \leqslant b$; $y_1^{(i)} \leqslant y^{(i)} \leqslant y_2^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ y^{(0)} = y)$, измеримая по $y^{(n)}$ и непрерывная по $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ для почти всех значений $y^{(n)}$ из $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$. Пусть существуют $n+1$ функций $L(u)$, $L_0(u)$, $L_1(u)$, $\ldots$, $L_{n-1}(u)$ — неотрицательные и суммируемые по Лебегу на $y_1^{(n)} \leqslant u \leqslant y_2^{(n)}$ и такие, что для почти всех значений u из интервала $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$ справедливо неравенство

$$|Q(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, u) - Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \ldots, \bar{y}^{(n-1)}, u)| \leqslant L(n)|x - \bar{x}| + L_0(u)|y - \bar{y}| + L_1(u)|y' - \bar{y}'| + \ldots + L_{n-1}(u)|y^{(n-1)} - \bar{y}^{(n-1)}|,$$

где $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, u)$ и $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \ldots, \bar{y}^{(n-1)}, u)$ — точки из R'.

Тогда функционал

$$J[y(x)] = \int_a^b Q[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)]\, y^{(n+1)}(x)\, dx$$

является непрерывным (порядка n) в классе абсолютно непрерывных вместе с производными n-го порядка функций $y(x)$ на (a, b), удовлетворяющих условиям

$$y_1^{(i)} \leqslant y^{(i)}(x) \leqslant y_2^{(i)}\ (i = 0, 1, \ldots, n;\ y^{(0)} = y).$$

В случае $n = 0$ эта теорема была доказана Фаэдо и Дарбо (Faedo S., Rend. mat. e applic., 1943, ser. 5, 4, 223—249; РЖМат, 1954, 5624). М. К. Керимов

8924. **Об одной задаче условного экстремума со счетным множеством условий. Цитланадзе Э. С.**, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, 1957, 24, 71—87

Исследуется задача Л. А. Люстерника (Успехи матем. наук, 1936, 1, 256) об условном экстремуме функционала $f(x)$, определенного в пространстве $L^2(0, 1)$, относительно многообразия N, заданного счетным числом условий: $\varphi_i(x) = a_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots;$ f и φ_i — дифференцируемые по Фреше функционалы, a_i — заданные числа). Рассматриваются сходящиеся определители

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 + a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots \\ a_{21}, & 1 + a_{22}, & a_{23}, & \ldots \\ a_{31}, & a_{32}, & 1 + a_{33}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

и $\Delta^k(x)$, который получается из $\Delta(x)$ заменой столбца K числами b_i, где $a_{ik} = (L_{\varphi_i} x, L_{\varphi_k} x)$ при $i \neq k$, $a_{ii} = \|L_{\varphi_i} x\|^2 - 1$, $b_i = (L_{\varphi_i} x, L_f x)$, $L_{\varphi_i} x = \operatorname{grad} \varphi_i(x)$, $L_f x = \operatorname{grad} f(x)$. Предполагается, что N — ограниченное слабо замкнутое множество; L_f — слабо непрерывный оператор (т. е. преобразует всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся), причем $L_f 0 = 0$ и $\|L_f x\| > 0$ для $x \in N$; L_f, L_{φ_i}, $\Delta(x)$ и $\Delta^k(x)$ удовлетворяют условию Липшица на N; $|\Delta(x)| \geqslant C > 0$ для всех $x \in N$, где $C = \text{const}$; не все $\lambda_k x = \Delta^k(x)/\Delta(x)$ равны нулю. На N рассматриваются замкнутые компактные гомотопические классы $[B]$ множеств B.

Теорема. Пусть выполнено хоть одно из следующих условий: 1) $L = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x) L_{\varphi_i} x$ слабо непрерывен на N; 2) оператор L имеет на N непрерывный обратный оператор; 3) $L = x(\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \ldots + \lambda_\mu(x)) + \sum_{i=\mu+1}^{\infty} \lambda_i(x) L_{\varphi_i} x$, где $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_\mu(x)$ и $\sum_{i=\nu+1}^{\infty} \lambda_i(x) L_{\varphi_i} x$ слабо непрерывны. Тогда всякий класс $[B]$ определяет вектор $x_b \in N$ такой, что $f(x_b) = \sup_{[B]} \min_{B} f(x)$, причем

$$L_f x_b = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x_b) L_{\varphi_i} x_b.$$

Доказательство связано с большим исследованием траекторий дифференциального уравнения $dx(t)/dt = \mathfrak{L}x(t)$, где $x(t)$ — дифференцируемые функции из $[0, 1]$ в N и $\mathfrak{L}x = L_f x - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x) L_{\varphi_i} x$.

М. М. Вайнберг

8925. **О методе Галеркина—моментов. Мартынюк А. Е.**, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 70—74

Результаты С. Г. Михлина и Н. И. Польского о сходимости метода Галеркина обобщаются с помощью введенных автором (РЖМат, 1958, 7825) понятий положительно определенного в обобщенном смысле оператора A и гильбертова пространства H_1. Следуя С. Г. Михлину, автор доказывает теоремы:

1. Метод Галеркина (называемый автором методом Галеркина — моментов) для уравнения $Au + Ku = f$ сходится к решению в пространстве H_1, если уравнение имеет не более одного решения и оператор $T = A^{-1}K$ вполне непрерывен в H_1.

2. Если оператор $T = A^{-1}K$ вполне непрерывен в H_1, то метод Галеркина — моментов в применении к нахождению собственных значений уравнения $Au - \lambda Ku = 0$ сходится в H_1. Е. Д. Гарбер

8926. **О методе Галеркина—Петрова. Лящко А. Д.**, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 42—44

Ряд вариационных методов рассматривается с несколько более общей точки зрения, чем в аналогичных построениях А. Е. Мартынюка (РЖМат, 1958, 7825; реф. 8925), независимо от последнего.

Если для линейных операторов A и B, определенных на множествах D_A и D_B в сепарабельном гильбертовом пространстве H, причем D_A плотно в H, $D_A \subset D_B$ и B — замкнут, удовлетворяются условия: $(Au, Bv) = (Bu, Av)$ и $(Au, Bu) \geqslant \gamma^2(u, u)$, $\gamma > 0$, то оператор A называется B-симметричным и B-положительно определенным. Вводится гильбертово пространство $H_{A,B}$ — замыкание D_A в метрике $[u, v] = (Au, Bv)$. Если, далее, для всех $u \in D_A$ $[u, u] \geqslant c^2(Bu, Bu)$, то имеют место теоремы:

1. Решение уравнения $Au = f$ равносильно отысканию функции u, доставляющей минимум функционалу

$$F(u) = (Au, Bu) - (f, Bu) - (Bu, f),$$

причем обобщенный метод Ритца (автор называет его методом Ритца—Петрова) сходится к решению в $H_{A,B}$.

2. Обобщенный метод Галеркина (Галеркина—Петрова, по терминологии М. А. Красносельского) для уравнения $Au+Ku=f$ сходится в $H_{A,B}$ к решению, если оно единственно и оператор $T=A^{-1}K$ вполне непрерывен в $H_{A,B}$. Для вполне непрерывного T метод сходится и в задаче о собственных значениях уравнения $Au+\lambda Ku=0$.

В качестве примера применения метода Галеркина—Петрова рассматривается первая краевая задача для эллиптического уравнения $Au+Ku=f$ порядка $2m$. Автор полагает $B=A$ и приходит, таким образом, к методу наименьших квадратов. Е. Д. Гарбер

8927. Лагранжиан с производными высших порядков и механический спин частицы. Инфельд (The Lagrangian with higher order derivatives and the mechanical spin of a particle. Infeld L.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 10, 979—983, LXXXII (англ.; рез. русск.)

Рассматривается вариационная задача с функцией Лагранжа, зависящей от координат, скоростей и ускорений при наличии связи

$$x'_\alpha x'_\alpha+1=0.$$

Из уравнений Эйлера—Лагранжа на основании уравнения связи определяется в явном виде множитель связи. Затем лагранжиан конкретизируется в виде

$$L=m+f(Q),$$

$$Q=\frac{1}{\beta^2}x''_\alpha x''_\alpha,\quad \beta=\text{const}.$$

Если $f=\frac{1}{2}Q$, то получаются выводы теории Хонля и Папапетру (Hönl H., Papapetru A., Z. Phys., 1939, **112**, 512), а при $f=Q^{1/4}$ выводы автора совпадают с выводами теории Вайсенхоффа (Weyssenhoff J., Acta phys. polon., 1947, 9, 46). Определяются орбитальный момент скорости и спин

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{2}{\beta^2}\frac{df}{dQ}\left(x''_\alpha x'_\beta-x'_\alpha x''_\beta\right)$$

и показывается, что сумма этих тензоров сохраняется в силу уравнений движения. И. С. Аржаных

8928. Лагранжиан, зависящий лишь от координат, и механический спин частицы. Инфельд (The Lagrangian as a function only of co-ordinates and the mechanical spin of a particle. Infeld L.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 10, 985—989, LXXXII (англ.; рез. русск.)

Продолжение предыдущих исследований (реф. 8927). Предполагается, что функция Лагранжа релятивистской частицы зависит только от координат. Берется, в частности,

$$L=m+f(S),$$

$$S=\frac{1}{2\beta^2}(x_\alpha P_\beta-x_\beta P_\alpha)(x_\alpha P_\beta-x_\beta P_\alpha),$$

где P_α — компоненты четырехмерного орбитального момента скорости. Учитывая связь $x'_\alpha x'_\alpha+1=0$, автор выводит закон движения частицы. Отдельно рассмотрен случай, когда $P_k=0\,(k=1,2,3)$, $P_4=i\mu$. Определяется тензор спина

$$\sigma_{\alpha\beta}=-\frac{\beta^2}{2a\mu}(m+f)^2\left(\frac{df}{dS}\right)^{-1}\left(x''_\alpha x'_\beta-x''_\beta x'_\alpha\right)$$

и доказывается, что в силу уравнений движения сумма орбитального момента скорости и спина сохраняется. И. С. Аржаных

8929. О теоремах сохранения и уравнениях движения в ковариантных теориях поля. Траутман А., Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 10, 665—669

Рассматриваются поля в четырехмерных неевклидовых пространствах, которые определяются вариационным принципом с функцией Лагранжа, зависящей от составляющих и их производных тензорных потенциалов, а также от составляющих и их производных метрического тензора. Предполагается, что функция Лагранжа ковариантна относительно общих преобразований координат. Ставится вопрос об условиях для потенциалов и метрического тензора в связи с инвариантностью вариационного функционала. Бесконечно малое приращение потенциала понимается в виде дифференциала Ли (Schouten J. A., Ricci—Calculus, 2-nd ed., Berlin, 1954). Реализация условия инвариантности приводит автора к «жестким условиям», которые должны выполняться независимо от уравнений поля. При учете уравнений поля получаются «слабые» условия сохранения. В качестве примера применения выведены уравнения сохранения массы и уравнения движения пылевидной материи, ранее рассмотренной Л. Инфельдом (Бюл. Польской АН, 1955, отд. 3, 3). Библ. 9 назв. И. С. Аржаных

См. также: 9223

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редактор *В. В. Немыцкий*

8930. О пределе $u_n=(1+1/n)^n$. Дюри (Sur la limite de $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Durix), Rev. math. spéc., 1958, 68, N 7, 169—170 (франц.)

8931. Некоторые проблемы сходимости цепных дробей. Уолл (Some convergence problems for continued fractions. Wall H. S.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 8, Part 2, 95—103 (англ.)

Работа состоит из пяти параграфов. В первом параграфе рассмотрено сложное отношение четырех подходящих дробей f_p, f_q, f_r, f_s цепной дроби

$$f(a)=\frac{1}{1}+\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{1}+\ldots \qquad (1)$$

В частности, доказано, что

$$a_{p+2}=-[f_p,\ f_{p+1},\ f_{p+2},\ f_{p+3}],$$

$$\left([f_s,\ f_q,\ f_p,\ f_r]=\frac{(f_s-f_q)(f_p-f_r)}{(f_s-f_p)(f_q-f_r)}\right).$$

Получены также более общие соотношения.

Во втором параграфе доказана теорема: Каждое из следующих условий достаточно для сходимости цепной дроби:

1) $\{f_{2p-1}\}$ и $\{f_{2p}\}$ сходятся и a имеет ограниченную бесконечную подпоследовательность;

2) $\{f_{2p-1}\}$ и $\{f_{2p}\}$ сходятся, одна из этих последовательностей сходится абсолютно, и ряд $\sum |a_p|^{-1}$ расходится;

3) $\{f_{2p-1}\}$ и $\{f_{2p}\}$ сходятся абсолютно и ряд $\sum |a_p|^{-1/2}$ расходится.

Под a понимается последовательность $\{a_p\}$. Утверждение, что последовательность $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$ абсолютно сходится, означает, что ряд $x_1 + \sum_{p=1}^{\infty}(x_{p+1} - x_p)$ абсолютно сходится.

В следующих трех параграфах получен ряд цепных дробей, последовательности подходящих дробей которых являются перестановками последовательности подходящих дробей цепной дроби (1). Применяя известные признаки сходимости к полученным таким образом цепным дробям, автор получает новые признаки сходимости цепной дроби (1).

Приведем для примера две теоремы:

Теорема 4.1: Если $f'_{2p} = f_{2p+1}$ и $f'_{2p+1} = f_{2p}$, $p = 0, 1, \ldots$, $a'_1 = \dfrac{1 + a_2}{a_1}$, $a'_{2p} = a_{2p}$ и

$$a'_{2p+1} = \frac{(1 + a_{2p})(1 + a_{2p+2})}{a_{2p+1}}, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

то последовательность подходящих дробей цепной дроби $1 - f(a')$ есть $\{f'_p\}_{p=0}^{\infty}$.

Применяя к полученной таким образом цепной дроби известный признак сходимости (Lane B. E., Wall H. S., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 67, 368—380), имеем теорему 4.2: Если последовательность a удовлетворяет неравенствам $|1 + a_1| > |a_1|$, $|1 + a_1 + a_2| > |a_2|$, $|1 + a_p + a_{p+1}| \geqslant |a_p| + |a_{p+1}|$ $(p = 2, 3, \ldots)$, то последовательности $\{f_{2p+1}\}$ и $\{f_{2p+2}\}$ абсолютно сходятся, и $f(a)$ сходится только в том случае, если ряд $\sum_{p=1}^{\infty} |b_p|$ расходится $\left(b_1 = 1, \quad b_{p+1} = -\dfrac{1}{a_p b_p}\right)$.

В статье имеются опечатки, не влияющие на дальнейшие вычисления. А. Н. Хованский

8932. **О почти однородных функциях. Алач** (Contribuţie privind «funcţiile aproape omogene». Alaci V.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR. Baza Timişoara. Ser. 1, 1955, 2, № 1-4, 13—20 (рум.; русск., франц.)

Функцию $f(x, y, z)$ автор называет почти однородной, если имеет место соотношение

$$f\{x + \varphi_1(t), y + \varphi_2(t), z + \varphi_3(t)\} = \Phi(t) f(x, y, z).$$

Устанавливается дифференциальное уравнение в частных производных, которому удовлетворяют почти однородные функции, изучаются их свойства и приводятся примеры таких функций. В. И. Левин

8933. **Изучение экспоненциальных функций. Леруа** (Étude des fonctions exponentielles. Leroy Florentin), Rev. math. spéc., 1957, 68, № 4, 97—101 (франц.)

8934. **Простейшие дроби. Брейтенбергер** (Partial fractions. Breitenberger Ernst), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 9, 654—657 (англ.)

Рассматривается известное (см., например, РЖМат, 1953, 574К) разложение правильной рациональной дроби $f(x)/g(x)$ на простейшие дроби. Автор приводит новое доказательство единственности этого разложения, основанное на рассмотрении определителя линейной системы, содержащей его коэффициенты.

Г. П. Сафронова

8935. **Метод Ньютона и кратные корни. Мотт** (Newton's method and multiple roots. Mott Thomas E.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 9, 635—638 (англ.)

Приводится распространение известного метода Ньютона для нахождения кратных корней уравнения. Именно, доказана теорема: Пусть $\Phi(x)$ имеет в $[a, b]$ непрерывные производные до порядка n включительно $(n \geqslant 2)$, причем $\Phi^{(n)}(x) \neq 0$. Пусть, кроме того, уравнение $\Phi(x) = 0$ имеет в $[a, b]$ корень p кратности n. Тогда, если $x_0 \in [a, b]$, то последовательность x_0, $x_1 = f(x_0)$, $\ldots$, $x_{n+1} = f(x_n)$ $\ldots$, где $f(x) = x - \Phi(x)/\Phi'(x)$, монотонно стремится к p.

В том же случае, когда уравнение $\Phi(x) = 0$ имеет в $[a, b]$ простой корень, автор приводит незначительное ослабление известных условий применимости метода Ньютона и, при некоторых дополнительных ограничениях на $\Phi(x)$ и $\Phi'(x)$, дает оценку быстроты сходимости. Г. П. Сафронова

8936. **Замечание о неявных функциях. Сенгупта, Лахири** (A note on implicit functions. Sengupta H. M., Lahiri B. K.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, 49, № 2, 79—82 (англ.)

Приводятся более слабые, по сравнению с известными ранее, достаточные условия разрешимости уравнения $f(x, y) = 0$. Именно, доказана теорема: Пусть в некоторой окрестности $R = [a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1; b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2]$ точки (a, b) функция $f(x, y)$ обладает следующими свойствами: а) $f(x, y)$ непрерывна по x в $[a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$ для всех y из некоторого множества, плотного в $[b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2]$, и непрерывна по y в $[b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2]$ для всех x из $[a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$; б) $f(a, b) = 0$; в) $f(x, y)$ строго возрастает (убывает) по y в $[b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2]$ для всех x из некоторого множества S, плотного в $[a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$; г) для всякой точки $(\xi, \eta) \in R$ такой, что $\xi \in C(S)$ ($C(S)$ — дополнение к S относительно $[a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$) и $f(\xi, \eta) = 0$, существуют две последовательности точек

$$(\xi, \eta + \Delta_n), \ \Delta_n > 0, \ \Delta_n \to 0,$$

$$(\xi, \eta - \Delta'_n), \ \Delta'_n > 0, \ \Delta'_n \to 0,$$

обладающие тем свойством, что $f(\xi, \eta + \Delta_n) \times f(\xi, \eta - \Delta'_n) < 0$ при всех n. Тогда 1) в некоторой окрестности точки a существует единственная функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение $f(x, y) = 0$ в тождество; 2) $y = \varphi(x)$ непрерывна в этой окрестности. Г. П. Сафронова

8937. **О производной сложной функции. Легран** (Sur la dérivée d'une fonction de fonction. Legrand J.), Rev. math. spéc., 1957, 68, № 5, 121—122 (франц.)

8938. **О некоторых теоремах о среднем. Молдован** (Asupra unor teoreme de medie. Moldovan Elena), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 1, 7—12 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть $y = F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — функция действительного переменного x и n действительных параметров, определенная для $a \leqslant x \leqslant b$ и $-\infty < \alpha_i \leqslant a_i \leqslant \beta_i < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Предполагается, что она непрерывна по совокупности своих аргументов в каждой точке области определения и что для любых точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сегмента $[a, b]$ и произвольных чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$, принадлежащих множеству значений функции, система уравнений $F(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_n) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$, относительно неизвестных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет единственное реше-

ние. Значение функции F для системы значений параметров, являющихся этим решением, обозначается через $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; y \mid x)$. Доказывается, что если

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < x_0 \leqslant b,$$

то

$$\min_{j=1,\,2} L(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; y \mid x_0) \leqslant$$

$$\leqslant L(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; y \mid x_0) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{j=1,\,2} L(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; y \mid x_0), \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

и аналогичные неравенства. Даются приложения к общим решениям дифференциальных уравнений высших порядков. В. И. Левин

8939. **Вычисление величины одного интеграла.** Гайкр (Výpočet hodnoty jednoho integrálu. Hajkr Oldřich), Sbor. vědec. prací Vysoké školy báňské Ostravě, 1957, 3, № 2, 73—79 (чешск.; рез. русск., нем.)

Приводится способ вычисления величины интеграла $\int_0^\infty \sqrt{x} \cdot \log x/(1+x)^2 dx = \pi$ при помощи функции комплексной переменной, используя теорему о вычетах. Резюме автора.

8940. **Вычисление интегралов**

$$I_m = \int_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^a}\,dx, \qquad J_m = \int_0^\infty \frac{\cos^m x}{x^a}\,dx,$$

где m — целое положительное, a — любое. Лагранж (Calcul des intégrales

$$I_m = \int_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^a}\,dx, \qquad J_m = \int_0^\infty \frac{\cos^m x}{x^a}\,dx,$$

m — entier positif, a — quelconque. Lagrange Jean), Mathesis, 1957, 66, № 10, 363—369 (франц.)

8941. **Об асимптотическом поведении одного интеграла.** Сюй (On an asymptotic intergal. Hsu L. C.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1956, 10, № 3, 141—144 (англ.)

Пусть $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $g(x)$ — вещественные функции, удовлетворяющие следующим условиям: 1) каждое $f_n(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на (a, b), 2) $|f_n(x)| < A$, $|g(x)| < A$, где A не зависит от x и n, 3) $f_n(x)$ достигает положительного наибольшего значения при $x = \xi_n$, 4) для любого $d > 0$ существует $\delta > 0$ (зависящее от d, но не от n), такое, что $|f_n(x)| \leqslant f_n(\xi_n) - \delta$, если $|x - \xi_n| \geqslant d$ и $a \leqslant x \leqslant b$, 5) $\xi_n \to \xi$, $a < \xi < b$, при $n \to \infty$, 6) $g(x)$ непрерывна в точке $x = \xi$ и $g(\xi) \neq 0$, и 7) существуют положительные постоянные h и k такие, что

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ n \to \infty}} |f_n(x) - f_n(\xi_n)| / |x - \xi_n|^h = k.$$

Тогда для больших n

$$\int_a^b \{f_n(x)\}^n g(x)\,dx \sim \frac{2}{h}\,\Gamma\left(\frac{1}{h}\right)\{f_n(\xi_n)\}^n g(\xi)\left\{\frac{f_n(\xi_n)}{nk}\right\}^{1/h}.$$

В качестве примера приводится соотношение

$$n^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(1 + \frac{1}{n} - \left|x - \frac{1}{\sqrt{n}}\right|^s\right)^n \times$$

$$\times \arcsin(1 - |x|)\,dx \sim \frac{\Gamma(1/s)}{s}\,\pi e \quad (s > 0).$$

Результат автора является обобщением одной формулы Леви (Levi B., Publ. Inst., Math. Univ. Nac. Litoral, 1946, 6, 341—351), которая возникает при $f_n(x) = f(x)$. В. И. Левин

8942. **Об одном классе неравенств.** Блок (A class of inequalities. Block H. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 844—851 (англ.)

Доказывается следующее общее неравенство. Пусть $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ непрерывны на $a \leqslant x \leqslant b$ и $w(x; t)$ удовлетворяют условиям: 1) $(fw'_x)'_x - gw = 0$ для $a \leqslant x < t$ и для $t < x \leqslant b$, 2) $w(x; t)$ — непрерывна на $a \leqslant x \leqslant b$, 3) $\lim_{\varepsilon \to +0} [w'_k(t-\varepsilon; t) - w'_k(t+\varepsilon; t)]\, f(t) = 1$ и 4) $f(a)\, w'_x(a; t)\, y(a) = f(b)\, w'_x(b; t)\, y(b)$. Пусть, далее, $\alpha + \beta = 1$, $\gamma + \delta = 1$, $p \geqslant 1$, $1/p + 1/q = 1$, $\mu \geqslant 1$, $1/\mu + 1/\nu = 1$. Тогда для любой функции $y(x)$, непрерывной на $a \leqslant x \leqslant b$ и имеющей кусочно-непрерывную производную, справедливо неравенство

$$|y(t)| \leqslant M(t)\left[\int_a^b \{|f^\beta y'|^q + |g^\delta y|^q\}^{\nu/q}\,dx\right]^{1/\nu}, \qquad (1)$$

где

$$M(t) = \left[\int_a^b \{|f^\alpha w'_x|^p + |g^\gamma w|^p\}^{\mu/p}\right]^{1/\mu}$$

(т. е. не зависит от y). Приводится ряд частных случаев, в том числе неравенство

$$|y(t)|^2 \leqslant \frac{\operatorname{ch} c(b-t) \operatorname{ch} c(t-a)}{c \operatorname{sh} c(b-a)} \int_a^b [y'^2 - c^2 y^2]\,dx.$$

Из неравенства (1) вытекает также, что

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |y(t)|^2 \leqslant M\left[\int_a^b \{|f^\beta y'|^q + |g^\delta y|^q\}^{\nu/q}\right]^{1/\nu},$$

где $M = \max_{0 \leqslant t \leqslant b} M(t)$.

В частности,

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |y(t)|^2 \leqslant \frac{\operatorname{cth} c(b-a)}{c} \int_a^b [y'^2 + c^2 y^2]\,dx.$$

В. И. Левин

8943. **Дискретные аналоги некоторых интегральных неравенств.** Блок (Discrete analogues of certain integral inequalities. Block H. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 852—859 (англ.)

В предыдущей статье (реф. 8942) автор доказал неравенство для $\max_{a \leqslant t \leqslant b} |y(t)|$, который оценивается через интеграл, под знаком которого фигурируют y и y'. Здесь доказываются два дискретных аналога этого неравенства. Пусть $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$ — вектор в унитарном пространстве с базисом $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$, $Z = \sum_{n=1}^N c_n \Phi_n$. В первом аналоге роль производной играет вектор $DZ = (z_2 - z_1, z_3 - z_2; \ldots, z_N - z_{N-1}, z_1 - z_N)$, и наиболее важным неравенством этого типа является следующее:

$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant N} |z_k| \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}}\|Z\| + \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{N}}\|DZ\|, \qquad (1)$$

где $\|Z\|^2 = \sum_{n=1}^N |c_n|^2$. Во втором аналоге в качестве производной принимается вектор $\dot{Z} = (z_2 - z_1,$

$z_3 - z_2, \ldots, z_N - z_{N-1}$) на единицу меньшей размерности, и доказываются неравенства типа

$$|z_k|^2 \leqslant \frac{1}{2}\left[\operatorname{cth} aN \cdot \frac{1+\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} a} - 1\right] \times$$
$$\times \{\|\dot{Z}\|^2 + 2(\operatorname{ch} a - 1)\|Z\|^2\}.$$

Выводится ряд аналогичных неравенств (всюду устанавливаются случаи равенства). При дополнительном условии $\sum_{n=1}^{N} z_n = 0$ из неравенства (1) вытекает дискретный аналог известного интегрального неравенства Виртингера, а именно:

$$\|DZ\|^2 \geqslant 4 \sin^2 \frac{\pi}{N} \|Z\|^2.$$

В. И. Левин

8944. Замечание об одном интегральном неравенстве. Бисак (A note on an integral inequality. Beesack Paul R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 875—879 (англ.)

Если $F(x)$, $G(x)$ и $M(x)$ — функции, интегрируемые на измеримом множестве A, и если A_1 и A_2 определены как подмножества A, на которых, соответственно, $F(x) \leqslant G(x)$ и $F(x) \geqslant G(x)$, то при условиях, что 1) $\int_{A_1} G(x)\,dx \leqslant \int_{A_1} F(x)\,dx$ и 2) для любой пары точек $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ либо всегда $0 \leqslant M(x_1) \leqslant M(x_2)$, либо всегда $M(x_1) \leqslant 0 \leqslant M(x_2)$, имеет место неравенство

$$\int_{A_1} G(x) M(x)\,dx \leqslant \int_{A_1} F(x) M(x)\,dx.$$

Эта теорема обобщает одно неравенство Татаркевича (РЖМат, 1956, 504). Приводится следующее приложение доказанной теоремы: Если $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны для $-a \leqslant x \leqslant a$ и симметричны относительно $x = 0$, причем $p(x)$ неотрицательна и

$$\int_{-a}^{a} q(x)\,dx = \int_{-a}^{a} p(x)\,dx,$$

и если, кроме того, существует такая точка b, $0 < b < a$, что $q(x) \geqslant p(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant b$ и $q(x) \leqslant p(x)$ для $b \leqslant x \leqslant a$, то наименьшие положительные собственные значения λ_p и λ_q краевых задач

$$u''(x) + \lambda_p p(x) u(x) = 0, \quad (u \pm a) = 0,$$
$$v''(x) + \lambda_q q(x) v(x) = 0, \quad v(\pm a) = 0,$$

удовлетворяют неравенству $\lambda_q \leqslant \lambda_p$ (когда $p(x) \not\equiv q(x)$, то $\lambda_p < \lambda_q$). Физически это означает, что основной тон закрепленной на концах струны данной массы с симметричной относительно середины струны плотностью будет тем ниже, чем больше массы сосредоточено в средней части струны. В. И. Левин

8945. Об одном обобщении задачи Пуассона. Бертолини (Su una generalizzazione del problema di Poisson. Bertolini Fernando), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 20, № 6, 759—766 (итал.)

Пусть A — связная область в трехмерном пространстве, $\{I\}$ — класс трехмерных интервалов, $\{B\}$ — класс борелевых множеств, содержащихся в A, $\{S\}$ — класс квадрируемых поверхностей, контуры которых $C(S)$ целиком содержатся в A, состоящих из конечного числа граней класса 2, и для которых

$$\int_S \left|\frac{\partial}{\partial n_p}\frac{1}{\overline{PQ}}\right| d_p\sigma \quad \text{и} \quad \int_S \frac{d_p\sigma}{\overline{PQ}}$$

являются ограниченными функциями точки Q в A. Пусть $\alpha(B)$ — функция области, вполне аддитивная и ограниченного изменения на $\{B\}$, и

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n_p}\,d\sigma = \alpha(S), \quad S \in \{S\}, \tag{1}$$

где неизвестная функция $u(P)$ принадлежит к классу Г, т. е. суммируема по Лебегу на любом интервале $I \subset A$, и имеет $\partial u/\partial n_p$, суммируемую на S по мере σ, где $\sigma(B)$ — вполне аддитивная функция множества ограниченного изменения на $\{B\}$. Доказываются две теоремы, из которых основной является следующая (Evans G. C., Rile Inst. Pamphlet, 1920, 7, 252): Функции $u(P)$ класса Г, удовлетворяющие уравнению (1), представимы в виде

$$u(P) = u_0(P) + u_1(P), \tag{2}$$

где $u_1(P)$ — функция, почти всюду совпадающая с гармонической в A функцией, а

$$u_0(P) = \frac{1}{4\pi}\int_A \frac{d_Q\alpha}{\overline{PQ}},$$

и наоборот, всякая функция, представимая в виде (2), удовлетворяет уравнению (1). При этом

$$\operatorname{grad} u_0(P) = \frac{1}{4\pi}\int_A \operatorname{grad}_P \frac{1}{\overline{PQ}}\,d_Q\alpha.$$

Приводится и доказывается также обобщение теоремы Грина. В. И. Левин

8946 Д. Характеристические функции и их преобразования. Жиро (Les fonctions caractéristiques et leurs transformations. Girault Maurice. Thèse. Sci. math. Paris, 1955. Paris, impr. J. et R. Sennac, 1954, 84 p.), Bibliogr. France, 1957, 148, № 50, Thèses, 1956, № 8, 186 (франц.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

8947. О рядах с монотонными членами. Мацуяма (On the series with monotone terms. Matsuyama Noboru), J. Math., 1953, 1, № 2-3, 94—98 (англ.)

Доказываются теоремы:

Теорема 1. Если $1 < b_n \uparrow \infty$ и для любого n существует $m = m(n) < n$, такое, что

$$b_n/b_m \leqslant A, \quad 0 < \tau_1' \leqslant (n-m)/b_m,$$

то необходимым и достаточным признаком сходимости ряда $\sum a_n$, удовлетворяющего условию

$$0 < a_{n+1} \leqslant a_n(1 + 1/b_n)$$

и имеющего суммой s, является требование сходимости выражения

$$\tau_n \equiv s_n - K a_n b_n$$

к s, где K — положительная постоянная, независимая от n и удовлетворяющая неравенству

$$0 < K < (1 - e^{-\tau_1'})/A.$$

Теорема 2. Если $0 < n/b_n \leqslant \eta$ и

$$0 < B < \eta^{-1}\frac{d+c}{d-c},$$

и если ряд $\sum a_n$ с положительными членами удовлетворяет условию

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} b_\nu |\Delta a_\nu| + b_n a_n \leqslant B \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu, \qquad (1)$$

то ряды $\sum a_n$ и $\sum a_n \varepsilon_n$ одновременно сходятся или расходятся, где $\varepsilon_n \geqslant 0$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu = d < \infty, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu = c.$$

Теорема 3. Если $b_n \uparrow \infty$ и $\sum 1/b_n$ расходится, а ряд $\sum a_n$ с положительными членами при условии (1) сходится, то $a_n b_n = o(1)$ при $n \to \infty$.

Утверждается, что эти теоремы являются обобщениями известных теорем Коши и Абеля. Для теорем 1 и 2 не приводится ни одного примера.

Н. А. Бразма

8948. **Заметка о разрывном методе Абеля. Гайер** (Eine Bemerkung zum unstetigen Abel—Verfahren. Gaier Dieter), Arch. Math., 1957, 8, № 4, 286—289 (нем.)

Автор называет ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ A_l-суммируемым к сумме s, если функция $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ регулярна при $|x| < 1$ и $\lim_{n\to\infty} f(1-1/n) = s$. Если же $\lim_{x\to 1-} f(x) = s$, то получается известная A-суммируемость, т. е. суммируемость по Абелю. Доказывается, что методы A и A_l равносильны для рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, у которых

$$a_n = O\left(e^{c\sqrt{n}}\right) \left(c < \sqrt{2\pi}\right).$$

На примере показывается, что утверждение уже не справедливо при $c = \sqrt{2\pi}$.

Г. Ф. Кангро

8949. **Частное суммирование рядов матричными методами. Лоткин** (The partial summation of series by matrix methods. Lotkin Mark), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 9, 643—647 (англ.)

Вычисляя элементы матрицы A^{-1}, обратной к матрице $A = (a_{ij})$ с $a_{ij} = (i+j-1)^{-1}$ при $i > 1$, $a_{1j} = 1$, автор из тождеств $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ без труда получает некоторые известные соотношения между биномиальными коэффициентами.

Г. Ф. Кангро

8950. **Теорема о суммировании рядов функций классов $W^{(r)}$. Покало А. К.**, Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 7, 51—65

Пусть r — натуральное число и $W^{(r)}$ — класс всех непрерывных периода 2π функций $f(x)$, имеющих r-ю производную $f^{(r)}(x)$, для которой $|f^{(r)}(x)| \leqslant 1$.

Для каждой функции $f(x) \in W^{(r)}$ рассматривается последовательность тригонометрических полиномов

$$A_n(x; f; \mu) = \sum_{k=0}^{n} \mu_n(k)(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а $\mu_n(k)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots; k = 0, 1, \ldots, n)$ — треугольная матрица чисел, определяющая некоторый регулярный метод суммирования. Пользуясь представлением

$$\mu_n(k) = \sum_{m=0}^{p} a_m k^m + \rho_p(n, k),$$

автор устанавливает тождество

$$A_n(x; f; \mu) = \sum_{m=0}^{r-1} a_m \varphi_m(x) + B_n P_n(x; f^{(r)}) + D_n,$$

в котором $\varphi_m(x)$, с точностью до знака, есть производная порядка m функции $f(x)$, или сопряженной к ней функции $\tilde{f}(x)$, в зависимости от того, является ли число m четным или нечетным, $P_n(x; f^{(r)})$ с точностью до знака есть частная сумма порядка n ряда Фурье от $\varphi_r(x)$, а B_n и D_n — соответственно некоторая система чисел и остаток, определяющиеся с помощью довольно громоздких формул.

А. Ф Тиман

8951. **О распространении на случай суммируемости по Чезаро одной классической теоремы сходимости Дедекинда. Андерсен** (On the extensions within the theory of Cesàro summability of a classical convergence theorem of Dedekind. Andersen A. F.), Proc. London Math. Soc., 1958, 8, № 29,1—52 (англ.)

Пусть даны числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ и последовательность $\{\varepsilon_n\}$. Воспользуемся обозначениями

$$S_n^r = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r u_k, \quad \Delta^{r+1}\varepsilon_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_{k-n}^{-r-2} \varepsilon_k.$$

Бозанке (Bosanquet L. S., Proc. London Math. Soc., 1949, 50, 482—496) доказала следующую теорему о множителях суммируемости: Если при $0 \leqslant \rho \leqslant r$, $t \geqslant 0$ ряд $\sum u_n$ удовлетворяет условию

$$S_n^r = o(n^{r+t}), \qquad (A)$$

а последовательность $\{\varepsilon_n\}$ — условиям

$$\varepsilon_n = O(n^{-\rho-t}), \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^{r+t} |\Delta^{r+1}\varepsilon_n| < \infty, \qquad (B)$$

то ряд

$$\sum u_n \varepsilon_n \qquad (1)$$

суммируем методом Чезаро $(C, r-\rho)$. Утверждение остается справедливым, если в условиях (A) и (B) переставить символы o и O.

Автор доказывает теорему Бозанке (в частности, случай $t = 0$), постепенно переходя от простейших случаев к более сложным. Кроме того, результаты Бозанке дополняются и обобщаются автором главным образом в следующих направлениях: 1) условие (A) заменяется условием $S_n^r = UA_n + o(n^{r+t})$ $(U \neq 0)$; 2) ряд (1) заменяется более общим рядом

$$\sum S_n^{\tau-1} \Delta^\sigma \varepsilon_n \quad (0 \leqslant \tau \leqslant \sigma \leqslant \rho); \qquad (2)$$

3) дается формула для $(C, r-\rho)$-суммы ряда (1), соответственно (2); 4) изучается случай отрицательных значений параметра t.

Г. Ф. Кангро

8952. **Заметка о методах суммирования и спектральном анализе. Херц** (A note on summability methods and spectral analysis. Herz Carl S.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 86, № 2, 506—510 (англ.)

Пусть $Z(f)$ означает множество нулей преобразования Фурье функции $f \in L^1$. Под спектром $\Lambda(\varphi)$ функции $\varphi \in L^\infty$ понимается множество $\bigcap Z(f)$, где пересечение берется для всех $f \in L^1$, при которых $\int f(y)\varphi(x-y)\,dy = 0$. Функция $k \in L^1$ называется спектральным ядром, если $k(0) = 1$ и $k(x) = \int_{|x|}^{\infty} k'(y)\,dy$,

где $k \in L^1$. Предел $\lim_{h\to 0} \varphi_h(t)$, где $\varphi_h(t)$ — представляет собой преобразование Фурье функции $k(hx)\varphi(x)$ (k — спектральное ядро), определяет регулярный метод суммирования. Грубо говоря, автор имеет в виду показать, что $t \overline{\in} \Lambda(\varphi)$ тогда и только тогда, когда преобразование Фурье функции φ является суммируемым к нулю в определенном смысле в некоторой окрестности точки t. Частный случай суммируемости по Абелю изучал Бёрлинг (Beurling A., C. r. Acad. sci. Paris, 1947, 225, 326—328), а случай суммируемости по Риману (R, 2) — Поллард (РЖМат, 1954, 2996). В качестве примера приводим две из доказанных автором теорем.

Теорема 1. Если k — спектральное ядро, то $|\varphi_h(t)| \leqslant \delta^{-1} v(\delta h^{-1}) \|\varphi\|_\infty$, где δ — расстояние t от $\Lambda(\varphi)$ и $v(\tau)$ — функция, которая зависит лишь от k и удовлетворяет условию $v(\tau) \to 0$ при $\zeta \to \infty$.

Теорема 2. Если при некотором $\varepsilon > 0$ имеем

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} |\varphi_h(\tau)|\, d\tau = 0, \text{ то } t \overline{\in} \Lambda(\varphi).$$

Г. Ф. Кангро

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

8953. **Арифметические свойства эллиптических функций. Карлиц** (Arithmetic properties of elliptic functions. Carlitz Leonard), Math. Z., 1956, 64, № 4, 425—434 (англ.)

Указывается новый метод получения сравнений, которым удовлетворяют многочлены от модуля, являющиеся коэффициентами разложений в степенные ряды эллиптических функций Якоби. Этот метод основан на разложении функций Якоби в ряды Фурье. Доказываются и новые результаты, среди которых отметим следующий: Многочлен $\beta_{2m}(u)$, где $u = k^2$, фигурирующий в разложении

$$\frac{x}{\operatorname{sn} x} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m}(u) \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

и имеющий, как известно, рациональные коэффициенты, удовлетворяет сравнению

$$\beta_{2m}(u) + (1/p - 1) A_p^{2m/(p-1)}(u) \equiv 0 \pmod{p^r},$$

где $p^r (p-1) \mid 2m$, и $A_p(u)$ — коэффициент из разложения

$$\operatorname{sn}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}(u) \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

В. И. Левин

8954. **Интегралы, содержащие модифицированные бесселевы функции второго рода и E-функцию. Макроберт** (Integrals involving a modified Bessel function of the second kind and an E-function. Macrobert T. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1954, 2, № 2, 93—96 (англ.)

Даются выражения в E-функциях для двух интегралов

$$\int_0^\infty e^{-c\lambda} \lambda^{k-1} K_n(\lambda) E(p;\ \alpha_r : q;\ \rho_s : z\lambda)\, d\lambda \quad (c = 0,\ c = 1)$$

в предположении, что $p \geqslant q+1$, $|\operatorname{amp} z| < \pi$, $\operatorname{Re}(k \pm n + \alpha_r) > 0$ $(r = 1, 2, \ldots, p)$. М. Н. Олевский

8955. **Заметка относительно функций Матьё. Белл** (A note on Mathieu functions. Bell M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1957, 3, № 3, 132—134 (англ.)

Рассматриваются функции Матьё целого порядка, удовлетворяющие уравнению с периодическими коэффициентами

$$d^2y/dz^2 + (a - 2q\cos 2z)\, y = 0. \qquad (1)$$

Основное решение ce_{2n} имеет период π, ce_{2n+1} — период 2π, se_{2n+1} — период 2π, se_{2n+2} — период π. Собственные значения, соответствующие функциям ce_N и se_N, где N — целое положительное число, обозначаются соответственно через a_N и b_N и приводятся к равенству $a_N = b_N = N^2$, когда q стремится к нулю.

Целью заметки является установление равенства

$$a_N - b_N = \frac{q^N}{2^{2N-3}\{(N-1)!\}^2}. \qquad (2)$$

Сначала рассматривается случай, когда N — нечетное число. Подставляя тогда известные разложения

$$ce_N(z) = \sum_{n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots} \alpha_N^n \varphi_n, \quad se_N(z) = \sum_{n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots} \alpha'^n_N \varphi'_n,$$

$$\varphi_n = \sqrt{2/\pi}\cos nz, \quad \varphi'_n = \sqrt{2/\pi}\sin nz$$

в уравнение (1), получают систему алгебраических уравнений, которую затем решают способом итераций, в результате чего получается формула (2).

Аналогичным путем разбирается случай четного N, что также приводит к формуле (2). Н. С. Кошляков

8956. **О некоторых интегралах, содержащих лежандровы и ультрасферические полиномы. Бос** (On certain integrals involving Legendre and ultraspherical polynomials. Bose B. N.), Ganita, 1955, 6, № 1—2. 27—37 (англ.)

Дается выражение интеграла

$$\int_0^1 C_n^\lambda(1-2y^2)(1-y^2)^{\lambda-1/2} y^{2\lambda+2\nu} \times \times {}_pF_q\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_q\end{matrix} - y^2z^2\right) dy$$

через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_{p+2}F_{q+2}$. При помощи коэффициентов разложения $P_{2n}(z) = \sum_{r=0}^n B_r P_r(1-2z^2)$ и ряда ранее вычисленных интегралов (Bose B. N., Bull. Calcutta Math. Soc., 1944, 36, 125; 1948, 40, 8), получены значения интегралов

$$\int_0^1 P_{2n}(z)\, f(z,\ x)\, dz,$$

где $f(z,\ x) = \cos 2zx$, $\sin 2zx$, e^{-2sx}, $z^p J_q(zx)$ $(p=2,\ q=1;\ p=1,\ p=3,\ q=0)$, $e^{-xz^2} I_0(xz^2)$. Аналогично, используя представление $C_n^\lambda(1-2z^2) = \sum_{r=0}^n A_r C_{2r}^\lambda(z)$ и ряд интегралов, найденных Шарма (Sharma A., Bull. Calcutta Math. Soc., 1951, 43, 61), автор вычисляет интегралы вида $\int_0^{\pi/2} C_n^\lambda(\cos 4\theta)\, \varphi(\theta,\ z)\, d\theta$, где $\varphi(\theta,\ z) = K_\lambda(2z\sin\theta)\sin^\lambda\theta\cos^{2\lambda}\theta$, $J_p(2z\sin\theta)(\sin\theta)^\mu \times \times (\cos\theta)^{2\lambda}$ $(p = \pm\lambda,\ \mu = \lambda;\ p = \lambda - 1/2,\ \mu = \lambda + 5/2;\ p = \lambda \pm 1/2,\ \mu = \lambda + 3/2)$, $\lambda > -1/2$. М. Н. Олевский

8957. **Производящая функция для присоединенных полиномов Лежандра. Брафман** (A generating function for associated Legendre polynomials. Braf man F.), Quart. J. Math., 1957, 8, № 30, 81—83 (англ.)

Устанавливается (довольно громоздкая) производящая функция для присоединенных полиномов Лежандра. Для полиномов Лежандра соответствующий результат содержится в работе Райса (Rice S. O., Duke J. Math., 1940, 6, 115). М. Н. Олевский

8958. **Ортогональные полиномы многих переменных и их применение в одномерной и двумерной теории выравнивания. Хюссер** (Orthogonale Polynome mehrerer Veränderlichen und ihre Anwendung in der ein- und zweidimensionalen Ausgleichsrechnung. Hüsser Rudolf), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, 57, № 1, 55—126 (нем.)

В первой части излагаются основные сведения об n-мерном интеграле Стилтьеса, на основе которого вводится полная система ортогональных (с интегральным весом F) полиномов, многих непрерывных или дискретных аргументов. Строится линейная комбинация таких многочленов, образующая выравнивающий многочлен (Ausgleichspolynome), обеспечивающий наилучшее средне квадратичное приближение (с интегральным весом F) заданной функции W, также многих непрерывных или дискретных аргументов.

Во второй части общие методы, изложенные в начале, применяются к одномерной задаче, причем отдельно рассматриваются случаи непрерывного и дискретного аргументов. Для непрерывного аргумента указываются область задания и весовая функция, приводящие к полиномам Лежандра, Якоби, Гегенбауэра, Чебышева, Лагерра и Эрмита. Приводятся рекуррентные соотношения и указываются некоторые свойства ортогональных полиномов как для непрерывного, так и для дискретного аргументов.

В третьей части рассматриваются те же вопросы, что и во второй, но применительно к ортогональным полиномам от двух переменных. При этом особенно подробно автор останавливается на случае, когда область задания полиномов представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, а интегральная весовая функция $F(x, y)$ обладает свойством $dF = dF(x)\,dF(y)$. Тогда двумерный полином может быть представлен в виде произведения двух одномерных полиномов соответствующей степени.

В работе приведены некоторые соображения, упрощающие численные расчеты и указываются соответствующие расчетные схемы.

В заключение двумерные ортогональные полиномы с дискретными аргументами используются для интерполяции и экстраполяции статистических таблиц смертности. Библ. 45 назв. Э. Л. Блох

8959. **Некоторые производящие функции для полиномов Лагерра и Эрмита. Брафман** (Some generating functions for Laguerre and Hermite polynomials. Brafman Fred), Canad. J. Math., 1957, 9, № 2, 180—187 (англ.)

Автор указывает 3 производящие функции для полиномов Лагерра (одна из них была уже отмечена Уэйснером (РЖМат, 1957, 4949)) и 4 — для полиномов Эрмита. Приведем простейшую из них:

$$e^{2xt-(1+v^2)t^2}\operatorname{ch} 2vt\,(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} F(-n/2,\ (1-n)/2;\ 1/2;\ v^2)\frac{H_n(x)}{n!}\,t^n.$$

М. Н. Олевский

8960. **О некоторых полиномах, обобщающих полиномы Лагерра и о некоторых обобщениях полиномов Эрмита, а также о функциях им присоединенных. Паламa** (Su alcuni polinomi che generalizzano quelli di Laguerre e su altri che generalizzano quelli di Hermite ed i loro associati. Palamà Giuseppe), Riv. mat. Univ. Parma, 1956, 7, № 3—5, 293—309 (итал.)

Устанавливаются некоторые основные свойства гипергеометрических полиномов $\Psi^{(\alpha)}_{n,\nu}(x)$, определяемых равенством

$$\Psi^{(\alpha)}_{n,\nu}(x) = \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!}\ \Psi_1(-n;\ \nu+1;\ -\alpha-2n-1/2,\ \alpha+1;\ 2,\ x),$$

где вырожденная гипергеометрическая функция двух переменных x и y выражается рядом

$$\Psi_1(\alpha;\ \beta;\ \gamma,\ \gamma';\ x,\ y) = \sum_{r,\ s}^{0\ \ldots\ \infty} \frac{(\alpha,\ r+s)\,(\beta,\ r)}{(\gamma,\ r)\,(\gamma',\ s)}\,\frac{x^r y^s}{r!\,s!} \quad (|x|+|y|<1).$$

Даются разложение полинома $\Psi^{(\alpha)}_{n,\nu}(x)$ в ряд по полиномам Лагерра

$$\Psi^{(\alpha)}_{n,\nu}(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-\alpha-n,\ r)\,(\nu+1,\ r)\,2^r}{(-\alpha-2n-1/2,\ r)\,r!}\,L^{(\alpha)}_{n-r}(x),$$

теорема об умножении аргумента полинома $\Psi^{(\alpha)}_{n,\nu}(x)$ и др. Указывается на некоторые интегральные представления полиномов $\Psi^{(\alpha)}_{n,\nu}(x)$, имеющие значение в преобразовании Лапласа. В заключение приводятся некоторые формулы для присоединенных полиномов Лагерра. Н. С. Кошляков

8961. **О полиномах Лагерра и Якоби. Карлиц** (On Laguerre and Jacobi polynomials. Carlitz Leonard), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 1, 34—40 (англ.)

Автор устанавливает тождество

$$(u+v)^k P^{(\alpha,\ \beta)}_k\left(\frac{u-v}{u+v}\right) = C(\alpha+k,\ \beta+k)\times$$

$$\times \sum_{m+n=k} \frac{(-1)^n}{C(\alpha+m,\ \beta+n)}\,L^{(\beta)}_n(u)\,L^{(\alpha)}_n(v), \qquad (1)$$

$$C(\alpha,\ \beta) \equiv \Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+\beta),$$

и ряд других (частично известных) тождеств, связывающих полиномы Лагерра и Якоби. При $2u = 1+x$, $2v = 1-x$ равенство (1) обращается в формулу, найденную Рейнвиллом (Rainvill E. D., Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, 266—267). М. Н. Олевский

8962. **О производящей функции для многочленов Якоби. Виленкин Н. Я.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 6, 137—142

Рассматриваются функции $P^l_{mn}(\mu)$, связанные с полиномами Якоби $P^{\alpha\beta}_s(\mu)$ посредством равенства

$$i^{|m-n|}\sqrt{\frac{(l-n)!\,(l+n)!}{(l-m)!\,(l+m)!}}\,P^l_{mn}(\mu) = \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{\alpha/2}\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{\beta/2} P^{\alpha\beta}_s(\mu).$$

Здесь $\alpha = |m-n|$, $\beta = |m+n|$, $s = l-(\alpha+\beta)/2$, l, m, n — целые и полуцелые числа, причем $-l \leqslant m \leqslant l$, $-l \leqslant n \leqslant l$.

Функции $P^l_{mn}(\mu)$ рассматривались Баргманом (Bargmann V., Ann. Math., 1947, 48, № 83, 568—640), а также И. М. Гельфандом и З. Я. Шапиро (Успехи матем. наук, 1952, 7, 3—117).

Автор работы с помощью группы вращения трехмерного пространства устанавливает формулу

$$\left(z\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{l+m}\left(iz\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{l-n}=$$

$$=\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{(l+n)!\,(l-n)!}{(l+m)!\,(l-m)!}}\,P_{mn}^{l}(\cos\theta)\,z^{l+m},$$

которая дает новое представление для производящей функции $P_{mn}^{l}(\mu)$, а следовательно, и для полиномов Якоби, отличное от известных форм производящей, данных Сеге, Рейнвиллом и др.

С помощью этой новой формы производящей функции получаются многие хорошо известные свойства полиномов Якоби, а также устанавливается ряд новых свойств этих многочленов. Н. С. Кошляков

8963. **О некоторых гипергеометрических интегралах. Сривастава** (On certain hypergeometric integrals. Srivastava Krishna Ji), Ganita, 1956, 7, № 1, 13—28 (англ.)

Для каждой из 14 гипергеометрических функций от трех переменных, автор, пользуясь интегрированием дробного порядка, устанавливает некоторое интегральное представление. Так, для функции F_A оно выглядит следующим образом:

$$F_A(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;x,y,z)=$$

$$=k\int_0^1\int_0^1\int_0^1 F_A(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3;\nu_1,\nu_2,\nu_3;s_1x,s_2y,s_3z)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{3}s_i^{\nu_i-1}(1-s_i)^{\gamma_i-\nu_i-1}\,ds_i,$$

$$|x|+|y|+|z|<1;\ 0<\operatorname{Re}\nu_i<\operatorname{Re}\gamma_i\ (i=1,2,3);$$

$$k=\prod_{i=1}^{3}\Gamma(\gamma_i)\,[\Gamma(\nu_i)\,\Gamma(\gamma_i-\nu_i)]^{-1}.$$

Об аналогичных представлениях для гипергеометрических функций одного и двух переменных см. Эрдейи (РЖМат, 1953, 3255К) и Кошмидер (Koschmieder L., Acta math., 1947, 79, 241—254). М. Н. Олевский

8964. **Интеграл для гипергеометрической функции F_4 Аппеля. Чаунди** (An integral for Appell's hypergeometric function F_4. Chaundy T. W.), Ganita, 1954, 5, № 2, 231—235 (англ.)

Преобразованием переменных в двойном интеграле, выражающем функцию Аппеля $F_4(a,b;c,c';x(1-y),y(1-x))$ (Burchnall J. L., Chaundy T. W., Quart. J. Math., 1940, 11, 249—270), получено для нее следующее представление:

$$F_4(a,b;c,c';x,y)=$$

$$=k\iint_{(D)}\xi^{a-1}\eta^{b-1}(\eta-\xi+y\xi\eta)^{c-a-1}\times$$

$$\times(1-\eta+x\xi\eta)^{c'-b-1}\,d\xi d\eta,\qquad(1)$$

где область (D) ограничена линиями $\xi=0$, $\eta=0$, $1-\xi+x\xi\eta=0$, $1-\eta+y\xi\eta=0$; $k\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c-a)\times\Gamma(c'-b)=\Gamma(c)\,\Gamma(c')$ (действительные части чисел a, b, $c-a$, $c'-b$ — положительны).

Если числа $c'-b-1=m$, $c-a-1=n$ — целые и >0, то двойной интеграл (1), распространенный по области квадрата $\xi=0$, $\eta=0$, $\xi=1$, $\eta=1$, представляет собой сумму тех членов степенного ряда по x и y для F_4, в которых степени x и y не превышают соответственно m и n. М. Н. Олевский

8965. **Соотношения между функциями, смежными с некоторыми гипергеометрическими функциями от трех переменных. Саран** (Relations between functions contiguous to certain hypergeometric functions of three variables. Saran Shanti), Ganita, 1954, 5, № 2, 69—76 (англ.)

Известно, что между $F(a,b;c;x)$ и любыми двумя смежными к ней функциями существует линейное соотношение с полиномиальными коэффициентами; то же справедливо и для гипергеометрических функций от двух переменных. Автор считает, что для гипергеометрических функций от трех переменных подобное утверждение не имеет места. Он отмечает, однако, что всегда существуют линейные соотношения между гипергеометрической функцией от трех переменных $F(a_1,a_2,a_3,\ldots;x,y,z)$, смежными с ней функциями и функциями вида $F(a_1+l,a_2+m,a_3+n,\ldots;x,y,z)$ (l, m, n, ... — целые числа) с полиномиальными коэффициентами относительно x, y и z (при этом о числе смежных функций, входящих в такого рода соотношения a priori не делается никаких утверждений). Указанные соотношения автор устанавливает при помощи системы линейных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет соответствующая гипергеометрическая функция. Для краткости он ограничивается рассмотрением лишь функции F_E. В качестве примера приведем соотношение $c_1(1-x)F_E=c_1F_E(b_1-1)+b_2xF_E(b_2+1,c_1+1)+(a_1-b_2-c_1)xF_E(c_1+1)$. Впрочем, некоторые соотношения и здесь могут быть трехчленными; так, например, $(1+b_1-c_1)F_E=b_1F_E(b_1+1)-(c_1-1)F_E(c_1-1)$. Следует иметь в виду, что выше, в обозначениях функции F_E, опущены переменные, от которых она зависит, и отмечены лишь те параметры, которые претерпевают изменения против их начальных значений в $F_E(a_1,a_1,a_1,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z)\equiv F_E$. М. Н. Олевский

8966. **Гипергеометрические функции от трех переменных. Саран** (Hypergeometric functions of three variables. Saran Shanti), Ganita, 1954, 5, № 2, 77—91 (англ.)

Лауричелла изучал гипергеометрические функции от n переменных (Appell P., Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, 1925, 33—35). При $n=2$ это суть 4 функции Аппеля. При $n=3$ их получается 14. Свойства четырех из них F_A, F_B, F_C, F_D были указаны Лауричелла. Автор выписывает 10 остальных функций F_E, F_F, F_G, F_K, F_M, F_N, F_P, F_R, F_S, F_T, определяемых соответствующими степенными рядами (следует отметить типографский пропуск в работе: отсутствуют определения 7 функций F_E, ..., F_P; они приведены в другой работе автора (реф. 8965)). Устанавливаются соответствующие области сходимости этих рядов. Отправляясь от выражения каждой из упомянутых функций в виде ряда по степеням одной переменной, с коэффициентами, содержащими соответствующие функции Аппеля, и, пользуясь известными интегральными представлениями последних, автор получает изображения функций F_G, ..., F_T в виде тройных интегралов эйлерового типа; для F_E получение аналогичного изображения осложняется из-за отсутствия относительно простого интегрального представления функции F_4 Аппеля (реф. 8964). Далее указывается обычный путь для установления систем линейных однородных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют эти функции. Соответствующая система выписана лишь для функции F_E. Опираясь на некоторые соотноше-

ния для функций Аппеля, автор получает ряд соотношений, связывающих гипергеометрическую функцию от трех переменных с функцией того же типа от некоторых дробнолинейных комбинаций этих переменных. Отмечено также, что при некоторых соотношениях между параметрами, гипергеометрические функции от трех переменных могут быть выражены через функции Аппеля; указаны некоторые соотношения, имеющие место при равенстве между собой каких-либо двух переменных из трех.

М. Н. Олевский

8967. **Решения некоторых гипергеометрических уравнений.** Саран (The solutions of certain hypergeometric equations. Saran Shanti), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1955, **A21**, № 6, 404—408 (англ.)

Записав систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных, которой удовлетворяет гипергеометрическая функция от трех переменных F_E (реф. 8966), автор находит все решения этой системы, представимые в виде обобщенных степенных рядов

$$x^g y^h z^l \sum_{m,\,n,\,p=0}^{\infty} A_{m,\,n,\,p} x^m y^n z^p$$

(g, h и l — постоянные); каждое из восьми получающихся здесь решений выражается через функцию F_E. Далее, отправляясь от представления F_E в виде интеграла типа Похгаммера (РЖМат, 1956, 7430), он определяет все решения упомянутой системы, представимые в форме $\int_C t^k (1-t)^{k'} f_1(x/t)\, f_2(y/(1-t),\ z/(1-t))\, dt$ с надлежащими постоянными k, k' и контуром C. Аналогичные результаты приведены и для функции F_k.

М. Н. Олевский

8968. **Преобразования гипергеометрических функций от трех переменных.** Саран (Transformations of hypergeometric functions of three variables. Saran Shanti), Bull. Calcutta Math. Soc., 1956, 48, № 1, 9—23 (англ.)

Пользуясь различными преобразованиями в интегральных представлениях гипергеометрических функций от трех переменных (замена переменных, разложения подинтегральных функций в ряды) автор получает ряды для этих функций по гипергеометрическим функциям Аппеля, по произведениям гипергеометрических функций от одной переменной и др. Частично эти результаты были (другим путем) получены автором раньше (реф. 8966).

М. Н. Олевский

8969. **О произведении двух вырожденных гипергеометрических функций.** Рагаб (On the product of two confluent hypergeometric functions. Ragab F. M.), Arch. Math., 1957, 8, № 3, 180—183 (англ.)

Для вырожденных гипергеометрических функций доказываются 4 формулы типа теорем сложения. Приведем одну из них.

$$\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} B(\alpha+s,\ \alpha'-s)\, B(\beta+s,\ \beta'-s) \times$$
$$\times {}_1F_1(\beta+s;\ \beta+\alpha;\ x)\, {}_1F_1(\beta'-s;\ \alpha'+\beta';\ y)\, ds =$$
$$= 2\pi i B(\alpha+\beta',\ \alpha'+\beta)\, {}_1F_1(\beta+\beta';\ \alpha+\alpha'+\beta+\beta';\ x+y),$$
$$\mathrm{Re}(k+\alpha)>0,\ \mathrm{Re}(k+\beta)>0,\ \mathrm{Re}(k-\alpha')>0,$$
$$\mathrm{Re}(k-\beta')>0.$$

Частный случай этой формулы был установлен Мейкснером (Meixner J., Math. Z., 1933, 36, 677—707).

М. Н. Олевский

8970. **О произведении двух вырожденных гипергеометрических функций.** Рагаб (On the product of two confluent hypergeometric functions. Ragab F. M.), Monatsh. Math., 1957, 61, № 4, 312—317 (англ.)

Доказывается формула

$$\int_0^{\infty} x^{-1/2} {}_1F_1(a;\ c;\ -x)\, {}_1F_1(a;\ c;\ -b/x)\, dx =$$
$$= k\, {}_1F_1(2a-1;\ 2c-1;\ -2\sqrt{b}),$$
$$\mathrm{Re}\, a > 1/2,\ b>0;\ \Gamma(a)\,\Gamma(c-1/2)\, k =$$
$$= \sqrt{\pi}\,\Gamma(c)\,\Gamma(a-1/2);$$

дается также ее некоторое обобщение на случай p-кратного интеграла, содержащего произведение $p+1$ вырожденных гипергеометрических функций ($p \geqslant 1$).

М. Н. Олевский

8971. **Интегралы, родственные интегралам Эйри.** Макроберт (Integrals allied to Airy's integrals. Macrobert T. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1957, 3, № 2, 91—93 (англ.)

Рассматриваются интегралы

$$\int_0^{\infty} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\lambda^n \pm x\lambda^l)\, \lambda^{k-1} d\lambda$$

(x — действительное, n и l — целые, $n>l$, $n>\mathrm{Re}\, k>0$), для которых даются выражения в виде суммы конечного числа произведений степенных функций от x на обобщенные гипергеометрические функции ${}_iF_{n-1}$ от x^n. При $n=3$, $l=k=1$ получаются выражения для интегралов Эйри.

М. Н. Олевский

8972. **Несколько несобственных интегралов, содержащих произведение функций Уиттекера и обобщенных гипергеометрических функций.** Бхонсле (Some infinite integrals involving the product of Whittaker functions and generalised hypergeometric functions. Bhonsle B. R.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, 49, № 2, 83—88 (англ.)

Используя ряд известных результатов Гольдштейна (Goldstein S., Proc. London Math. Soc., 1932, 34, 103), Мак-Роберта (MacRobert T. N., Quart. J. Math., 1942, 13, 65), Бейли (Bailey W. N., Generalized Hypergeometric Series, 1935), автор вычисляет несколько несобственных интегралов, содержащих произведение функций Уиттекера и обобщенных гипергеометрических функций. Например,

$$\int_0^{\infty} x^{l-1} W_{k,\,m}(x)\, W_{-k,\,m}(x)\, {}_2F_3(\alpha_1,\ \alpha_2;\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3;\ -x^2t^2)\, dx =$$
$$= \frac{\Gamma(l+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+\frac{1}{2}l\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m+\frac{1}{2}l\right)}{2\Gamma\left(1+k+\frac{1}{2}l\right)\Gamma\left(1-k+\frac{1}{2}l\right)} \times$$
$$\times {}_6F_5\left[\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \frac{1}{2}l+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}l+1,\ \frac{1}{2}+m+\frac{1}{2}l;\\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ 1+k+\frac{1}{2}l,\end{matrix}\ \begin{matrix}\frac{1}{2}-m+\frac{1}{2}l\\ 1-k+\frac{1}{2}l\end{matrix};\ -4t^2\right],$$

где $\mathrm{Re}(l \pm 2m+1)>0$, $|t|<\frac{1}{2}$

А. П. Прудников

8973. **Формула Бейтмана. Карлиц** (A formula of Bateman. Carlitz L.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1957, 3, № 2, 99—101 (англ.)

Дается простое доказательство следующей формулы Бейтмана, относящейся к полиномам Лагерра

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{xy}e^{i\varphi})^{k-n}\frac{n!}{k!}L_n^{(k-n)}(x)L_n^{(k-n)}(y) = \exp(\sqrt{xy}e^{i\varphi})L_n(x+y-2\sqrt{xy}\cos\varphi).$$

Автором получена также формула

$$\Gamma(n+\lambda+1)L_n^{(\lambda)}(x+y-2z\sqrt{xy}) = \Gamma(\lambda)\sum_{k=0}^{n}(xy)^{(n+k)/2}(n+\lambda-k)\frac{\Delta_k^{(\lambda)}}{k!}C_{n-k}^{(\lambda)}(z),$$

$$\Delta_k^{(\lambda)} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}(r!)^2 L_r^{(n+\lambda-r)}(x)L_r^{(n+\lambda-r)}(y),$$

$C_n^{(\lambda)}(z)$ — ультрасферический полином.

М. Н. Олевский

8974. **Обобщенная K-функция Бейтмана. Сривастава** (On the generalized K-function of Bateman. Srivastava H. M.), J. Math., 1953, 1, № 2-3, 137—144 (англ.)

Рассматривается обобщенная K-функция Бейтмана

$$P_{n,k}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/2\pi}\cos^k\theta\cos(x\operatorname{tg}\theta - n\theta)\,d\theta,$$

$$\operatorname{Re}(k) > -1.$$

Выводится ряд операционных соотношений и вычисляется несколько несобственных интегралов, содержащих эту функцию. А. П. Прудников

8975. **Асимптотические представления сфероидальных функций с азимутальным индексом m-1. Белкина М. Г.**, Докл. АН СССР, 1957, 114, № 6, 1185—1188

Функция $Y(\eta)$, связанная с угловой сфероидальной функцией $S_{1,l}^{(1)}(c, \eta)$ соотношением $Y(\eta) = \sqrt{1-\eta^2}\times S_{1,l}^{(1)}(c, \eta)$, удовлетворяет уравнению вида

$$Y'' + c^2 p(\eta) Y = 0, \qquad (1)$$

где $p(\eta) = 1 + \frac{\beta}{1-\eta^2}$, $\beta = \varkappa - 1 + \frac{2}{c^2}$ ($\varkappa$ связано с постоянной разделения) и граничным условиям $Y(1) = Y'(0) = 0$ (для четных Y) и $Y(1) = Y(0) = 0$ (для нечетных Y). По методу Дородницына (Успехи матем. наук, 1952, 7, вып. 6(52), 3), позволяющему найти асимптотику общего решения уравнения типа (1) для $c \gg 1$, получены асимптотические формулы для определения собственных значений β

$$c\int_0^{\eta_1}\sqrt{p(\eta_i)}\,d\eta = \left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \arg\chi^-(b);$$

$$(b<0,\ -1<\beta\leqslant 0), \qquad (2)$$

$$c\int_0^{1}\sqrt{p(\eta_i)}\,d\eta = \left(l+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \arg\chi^+(b);$$

$$(b>0,\ 0\leqslant\beta<\infty),$$

где χ^-; χ^+ выражаются через $\Gamma\left(1+i\frac{b}{2}\right)$, b связано с $\beta = -(1-\eta_1^2)$ некоторым уравнением вида $\Phi(b, \beta)=0$. Исследуются предельные случаи $b\to 0$, $c\to\pm\infty$. Приводится таблица собственных значений $\varkappa_l(c) = \beta_l + 1 - \frac{2}{c^2}$, вычисленных точно по формулам (2) и при $b\to\pm\infty$. А. Б. Васильева

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

8976. **О нулях интеграла Лапласа. Вёйтс** (Over de nulpunten van een integral van Laplace. Wuyts P.), Simon Stevin, 1956, 31, № 1, 37—46 (гол.)

Устанавливаются условия, которым должна удовлетворять начальная функция, достаточные для того, чтобы интеграл Лапласа не обращался в нуль в полуполосе $S(X, Y)$: $x \geqslant X$, $|y| \leqslant Y$ плоскости $s = x + iy$. Типичным результатом является теорема 1: Если начальная функция $F(t)$ вещественна на некотором интервале $0 \leqslant t \leqslant a$, причем на меньшем интервале она является нуль-функцией, и если существует такое $n \geqslant 0$, что

$$F_n(f) = \int_0^t\int_0^{\tau_{n-1}}\cdots\int_0^{\tau_1} F(\tau)\,d\tau_1\ldots d\tau_{n-1}\quad(n\geqslant 1),$$

$$F_0(t) \equiv F(t),$$

знакопостоянна на интервале $0 < t < a$, то для любого $Y > 0$ можно указать такое X, что

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)\,dt$$

не обращается в нуль в полуполосе $S(X, Y)$.

В. И. Левин

8977. **Обобщенное преобразование Ганкеля. I, II. Кумар** (On generalised Hankel-transform. I, II. Kumar Ram), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, 49, № 2, 105—111; 113—118 (англ.)

Рассматривается обобщенное преобразование Ганкеля

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda}\int_0^{\infty}(xy)^{\lambda+1/2}J_{\lambda}^{\mu}\left(\frac{1}{4}x^2y^2\right)g(y)\,dy,$$

$$J_{\lambda}^{\mu}(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-x)^r}{r!\,\Gamma(1+\lambda+\mu r)},\quad \mu>0.$$

Выводится несколько рекуррентных соотношений, интегральных представлений и ряд других свойств обобщенного преобразования Ганкеля. Устанавливается связь последнего с интегральными преобразованиями Лапласа, Ганкеля и Стилтьеса. Полученные свойства используются для вычисления интегралов, содержащих функции Бесселя $J_{\lambda}^{\mu}(x)$ и др. А. П. Прудников

8978. **Некоторые теоремы об интеграле Фурье. Йосихиро** (Some theorems of Fourier integral. Yoshihiro Takashi), J. Math., 1953, 1, № 2—3, 87—93 (англ.)

Если S — конечное число, и функция $f(t)$, заданная в $(0, \infty)$, удовлетворяет условию

$$f(t) > -1/t^2, \qquad (1)$$

или условию $\int_u^{2u}[x|f(x)| - xf(x)]\,dx = O(1)$, и $\int_0^u xf(x)\,dx = O(1)$, когда $u\to\infty$, то при $t\to 0$, $\frac{1}{t}\int_0^{\infty} f(x)\sin xt\,dx = O(1)$.

Как отмечает автор, это предложение принадлежит Идзуми (Izumi S.).

Если $f(t)$ удовлетворяет условию (1) и $\int_0^\infty tf(t)\,dt = S$, а $\varphi(t)$ — ограниченная измеримая с периодом l функция такая, что $\varphi(t)/t$ кусочно монотонна на $(0, l)$ и при $t \to 0$, $|\varphi(t)/t - \varphi_0| \leqslant At$, где φ_0 и A — некоторые константы, то интеграл $F(t) = \int_0^\infty f(x)\varphi(xt)\,dx$ существует, причем $\lim_{t\to 0}(F(t)/t) = \varphi_0 S$. Это предложение обобщает одну теорему Хартмана и Уинтнера (Hartman P., Wintner A., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 398—400), где $\varphi(t) = \sin t$. А. Ф. Тиман

8979. **Границы для преобразований Фурье монотонных функций. Земанян** (Bounds on the Fourier transforms of monotonic functions. Zemanian Armen H.), Duke Math. J., 1957, 24, № 4, 499—504 (англ.)

Пусть $\varphi(t)$ — вещественная монотонно убывающая интегрируемая на $(0, \infty)$ функция такая, что $\int_0^\infty \varphi(t)\,dt = 1$ и $\varphi(0) = 1$. Тогда

$$\int_0^\infty \varphi(t)\cos xt\,dt \leqslant \begin{cases} \sin x/x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ 1/x, & x \geqslant \pi/2 \end{cases}$$

и

$$\int_0^\infty \varphi(t)\cos xt\,dt \geqslant \begin{cases} \sin x_1/x_1, & 0 < x \leqslant x_1, \\ \sin x/x, & x_1 \leqslant x \leqslant 3\pi/2, \\ -1/x, & x \geqslant 3\pi/2, \end{cases}$$

где $x_1 = 4,49\ldots$ — корень уравнения $x_1 = \operatorname{tg} x_1$.

Аналогичные неравенства приводятся для синус-преобразований Фурье указанных функций $\varphi(t)$. А именно: $\int_0^\infty \varphi(t)\sin xt\,dt \geqslant 0$ для $x \geqslant 0$ и

$$\int_0^\infty \varphi(t)\sin xt\,dt \leqslant \begin{cases} \dfrac{1-\cos x_2}{x_2}, & 0 < x \leqslant x_2, \\ \dfrac{1-\cos x}{x}, & x_2 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 2/x, & x \geqslant \pi, \end{cases}$$

где $x_2 = 2{,}33$ есть корень уравнения $\sin x_2 = 1 - \cos x_2$. А. Ф. Тиман

8980. **Обобщение интеграла Уиттекера. Чак** (A generalization of Whittaker's integral. Chak A. M.), Ann. Univ. Lyon, 1955, A, № 18, 27—33 (англ.)

Рассматривается функция

$$W_\mu^\omega(z) = k_1 z^\omega \int_{-1}^{1} e^{izt} C_{\mu-\omega}^\omega(t)(1-t^2)^{\omega-1/2}\,dt, \qquad (1)$$

где $C_\nu^\omega(t)$ — функция Гегенбауэра, $k_1 = 2^{\omega-1} i^{\omega-\mu} \times \Gamma(\omega)\Gamma(\mu-\omega+1)/\pi\Gamma(\mu+\omega)$, $\operatorname{Re}\omega > -1/2$. Доказывается, что она удовлетворяет уравнению

$$\left(z^2\frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} + z^2 - \mu^2\right)W_\mu^\omega(z) = k_2 z^\omega e^{-iz}, \qquad (2)$$

$k_2\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\omega)\Gamma(\omega-\mu) = 2^\omega i^{\omega-\mu}\Gamma(\omega+1/2)$; указываются некоторые рекуррентные формулы для $W_\mu^\omega(z)$. Пользуясь уравнением (2), автор находит лапласово изображение функции $W_\mu^\omega(z)$ при $\operatorname{Re}(\omega \pm \mu) > 0$, $\operatorname{Re}\omega \geqslant 1/2$. При $\omega = 1/2$ интеграл (1) был изучен Уиттекером (Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, М., Изд-во ин. лит., 1949, 369—371).

М. Н. Олевский.

8981. **Об основах операционного исчисления. Белерт** (On foundations of operational calculus. Bellert S.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 9, 855—858 (англ.; рез. русск.)

Пусть T — эндоморфизм линейного пространства X над полем комплексных чисел C удовлетворяет условию $\sum_{n=0}^N a_n T^n x \neq 0$ при $a_N \neq 0$, $x \neq 0$, $a_i \in C$, $x \in X$. Тогда кольцо эндоморфизмов $\sum_{n=0}^N a_n T^n$ не имеет делителей нуля и может быть расширено до поля отношений. Последнее изоморфно полю рациональных функций и каждый его элемент $\dfrac{a_0 + a_1 T + \ldots + a_m T^m}{b_0 + b_1 T + \ldots + b_n T^n} \cdot \dfrac{1}{(T-a)^k}$ однозначно разлагается на простые дроби. Различные интерпретации линейного пространства X естественно приводят либо к классическому операционному исчислению, либо к его различным модификациям. В частности, пусть X — пространство числовых последовательностей $x(n)$ и $Tx(n) = x(0) + \ldots + x(n-1)$, $T[\Delta x(n)] = x(n) - x(0)$, где $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$. Тогда имеем $\Delta^m x(n) = p^n x(n) - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta^k x(0)\, p^{n-k}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Последняя формула может быть применена к решению разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассматривается ряд других частных случаев.

А. П. Прудников.

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

8982. **О рядах Фурье для гауссова шума. Блакман** (On Fourier series for Gaussian noise. Blachman Nelson M.), Inform. and Controll, 1957, 1, № 1, 56—63 (англ.)

Доказывается, что часто ошибочно опущенный постоянный член в ряде Фурье, представляющем стационарный гауссов шум, характеризует область частот от нуля до половины основной частоты ряда. Коэффициенты ряда, в том числе и постоянный член, оказываются асимптотически статистически независимыми; но если основной период ряда не является достаточно длинным, то коэффициенты всех синусов, а также и всех косинусов, оказываются статистически независимыми, и колебания этих коэффициентов отличаются от хорошо известных их асимптотических значений. Представление гауссова шума посредством интеграла Фурье тоже исследуется, однако оно оказывается мало удобным. Библ. 10 назв. Резюме автора

8983. **Диэлектрический шар с шаровой полостью в электрическом поле точечного заряда. Родов А. М.**, Уч. зап. Белорусск. ун-та, 1957, вып. 32, 97—107

В первой части работы находится функция Грина для области, заключенной между двумя неконцентрическими сферами. Решение ищется в виде суммы $f(M) + f_0(M)$, где $f_0(M) = 1/r$, $r = MQ$, M — произвольная точка области, Q — точка, в которой находится источник. Раскладывая $f_0(M)$ в ряд по присоединенным полиномам Лежандра и по косинусам азимутального угла

$$f_0(M) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{l_1^n}{r_1^{n+1}} A_{mn}^{(1)} P_n^m(\cos\theta_1)\cos m\varphi = \sum_{m=0}^{+\infty} f_{0m},$$

автор ищет функцию Грина в виде суммы $\sum_{m=0}^{+\infty}(f_m+f_{0m})$, где f_m — решение частной задачи и ищется в виде

$$f_m(M)=\left\{\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{b_{nm}}{R_1^{n+1}}r_1^nP_n^m(\cos\theta_1)+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=m}^{+\infty}c_{nm}R_2^n\frac{P_n^m(\cos\theta_2)}{r_2^{n+1}}\right\}\cos m\varphi.$$

Коэффициенты b_{nm} и c_{nm} находятся из бесконечной системы алгебраических уравнений, получаемых из краевого условия $f_m+f_{0m}=0$ на границе области. Доказывается разрешимость системы уравнений методом последовательных приближений и сходимость получаемых при этом рядов. Указывается на возможность получения оценки остатка ряда $\sum_N^{+\infty}f_m$ и погрешность s-го приближения решения алгебраической системы.

Во второй части работы дается метод нахождения решения общей задачи для диэлектрического шара с полостью. Решение ищется, как и в первой части работы, в виде суммы частных решений для гармоник Фурье. Исходя из краевых условий и применяя теорему сложения для полиномов Лежандра, автор получает бесконечную систему алгебраических уравнений. Указывается, что доказательство разрешимости системы и оценка погрешности получается таким же образом, как и в первой части работы. Н. Н. Говорун

8984. **О диаграмме излучения антенны с круговым отверстием. Корацца, Монтебелло** (Sul diagramma di radiazione di un antenna ad apertura circolare. Corazza Gian Carlo, Montebello Carlo), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 4, 652—654 (итал.; рез. англ.)

См. также: 8530, 8547, 8714 К, 8776, 8786, 8889

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

8985. **О пространствах (F) и (DF). Гротендик** (Sur les espaces (F) et (DF). Grothendieck Alexandre), Summa brasil. math., 1954, 3, № 6, 57—123 (франц.)

Далеко идущее развитие результатов статьи Дьёдонне и Шварца (Dieudonné J., Schwartz L., Ann. Inst. Fourier, 1949, 1, 61—101; русский перевод см. Математика, 1958, 2, № 2).

В первом из трех параграфов изучаются введенные автором пространства типа (DF). Локально выпуклое пространство E называется пространством типа (DF), если: 1) в E существует счетная фундаментальная система ограниченных множеств и 2) всякое ограниченное множество в сильном сопряженном к E, являющееся объединением последовательности равностепенно непрерывных множеств, равностепенно непрерывно.

Нормированные пространства и сильные сопряженные к метризуемым локально выпуклым пространствам являются пространствами типа DF (теорема 1). Сильное второе сопряженное к метризуемому локально выпуклому пространству есть пространство (F) (следствие теоремы 1). Индуктивный предел E последовательности пространств E_n $(n=1, 2, \ldots)$ типа (DF) снова является пространством типа (DF), и каждое ограниченное в E множество содержится в замкнутой выпуклой оболочке конечного числа множеств, каждое из которых ограничено в некотором E_n (теорема 9).

Фактор-пространство пространства (DF) есть пространство (DF), однако замкнутое подпространство может и не быть пространством (DF).

Для непрерывности линейной операции в пространстве (DF) достаточно, чтобы она была непрерывна на ограниченных множествах.

Если E — метризуемое локально выпуклое пространство, а E' — его сильное сопряженное, то для ограниченной замкнутости E' необходимо и достаточно, чтобы E' было t-пространством или чтобы всякое множество, ограниченное в E'', содержалось в слабом замыкании некоторого множества, ограниченного в E, что, в частности, всегда имеет место, если E' сепарабельно или если все ограниченные множества в E' метризуемы.

Из результатов, полученных для строгих индуктивных пределов локально выпуклых пространств, отметим следующий: сильное сопряженное к строгому индуктивному пределу t-пространств с ограниченно замкнутыми сопряженными есть ограниченно замкнутое t-пространство.

Второй параграф посвящен многочисленным примерам, отвечающим (вместе с результатами § 1) на вопросы 1—11, поставленные в работе Дьёдонне и Шварца.

Строятся примеры пространства типа (F), сопряженное к которому не ограниченно замкнуто, и пространства Монтеля типа (F), фактор-пространство которого изоморфно l^1. Приводится также пример рефлексивного сепарабельного пространтва типа (LF) (причем его сопряженное также оказывается пространством типа (LF)), фактор-пространство которого изоморфно неполному метрическому пространству. Таким образом, оказывается, что в пространстве типа (LF) могут существовать замкнутые подпространства, не являющиеся пространствами типа (LF), а также незамкнутые подпространства, пересечения которых со всеми замкнутыми ограниченными множествами замкнуты, причем указанные две возможности осуществляются соответственно даже в прямых суммах последовательностей гильбертовых пространств и пространств ограниченных последовательностей.

Последний параграф работы посвящен изучению квазинормируемых пространств и пространств типа (S). Локально выпуклое пространство E называется квазинормируемым, если для каждого равностепенно непрерывного множества $A\subset E'$ существует окрестность нуля $V\subset E$ такая, что топология, индуцированная в A сильной топологией из E', совпадает с топологией равномерной сходимости на V.

Для квазинормируемости пространства E необходимо и достаточно, чтобы во всякой окрестности нуля $U\subset E$ нашлась окрестность нуля V такая, что $V\subset\varepsilon U+M_\varepsilon$ для каждого $\varepsilon>0$ и некоторого ограниченного множества M_ε.

Квазинормируемое пространство, все ограниченные множества которого вполне ограничены (т. е. для любого ограниченного множества M и окрестности нуля V найдется конечное число точек x_i $(i=1,$

2, ..., N) таких, что $M \subset \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + V)$), называется пространством Шварца, или пространством типа (S).

Класс пространств типа (S) устойчив относительно перехода к фактор- и подпространствам. Индуктивный предел последовательности пространств типа (S) и прямое произведение любого семейства пространств типа (S) снова есть пространство типа (S).

Если E — пространство типа (F) и (S), E' — его сильное сопряженное, L — замкнутое подпространство в E и L^0 — поляра к L в E', то L и L^0 как подпространства в E и E' изоморфны соответственно сильным сопряженным к пространствам E'/L^0 и E/L.

В заключение работы приведены 10 оставшихся открытыми вопросов. Из них с тех пор решены вопросы: 3 (РЖМат, 1955, 5939; 1956, 3910), 10 (РЖМат, 1955, 870), 1, 4 и частично 5 (Amemiya I., Proc. Japan. Acad., 1957, 33, № 4, 169—171, РЖМат, 1959, 567), притом только вопрос 10 утвердительно. Русский перевод работы см. Математика, 1958, 2, № 3.

Б. М. Макаров

8986. Понятия, связанные со структурой метрического пространства. Шоке (Notions liées à la structure d'un espace métrique. Choquet Gustave), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1957, 36, № 185, 325—334 (франц.)

Рассматриваются понятия метрического, полного метрического пространств, непрерывные и равномерно непрерывные отображения таких пространств, сходимость и равномерная сходимость последовательности отображений, принцип сжатых отображений. Новых результатов статья не содержит. В. И. Соболев

8987. Двойственность для произведения групп с операторами. Эллис (Duality in products of groups with operators. Ellis J. W.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 83, № 2, 301—312 (англ.)

Изучаются с весьма общей точки зрения дополнительные (complementary) пространства для декартова произведения линейных пространств.

Пусть S — мультипликативная коммутативная полугруппа, X — аддитивная абелева группа и для всех $s \in S$, $x \in X$ определено $sx \in X$, причем $s(x+y) = sx + sy$, $(rs)\ x = r(sx)$. Такую группу X автор называет S-пространством. S-пространство называется топологизированным, если в нем есть топология, в которой трансляция непрерывна, и топологическим, если оно является топологической группой и умножение на s непрерывно для всех $s \in S$. Понятия S-подпространства, S-гомоморфизма и S-изоморфизма очевидны. Декартово произведение пространств X_a, $a \in A$ обозначается PX_a. Слабым произведением называется совокупность тех элементов PX_a, в которых лишь конечное число компонент отлично от нуля; оно обозначается P^wX_a. Вводятся операции: i_a из X_a в PX_a, полагая $[i_a(x_a)]_a = x_a$, $[i_a(x_a)]_b = \theta_b$, $b \neq a$, и π_a из PX_a в X_a, полагая $\pi_a(x) = x_a$. Если X, Y и Z — S-пространства и Y, Z топологизированы, то X называется Z-дополнением для Y, если существует гомоморфизм μ пространства X в совокупность $C(Y, Z)$ непрерывных гомоморфизмов Y в Z. Если X топологизировано, то X и Y — двойственные, если они являются Z-дополнительными один относительно другого. Примером дополнительного пространства является пространство, сопряженное к линейному топологическому пространству.

Для произвольного множества A пусть $\mathfrak{F}$ — семейство всех его конечных подмножеств. Для любого $\mathfrak{B} \subset 2^A$ определяется $\mathfrak{B}' = \{E : E \subset A,\ E \cap B \in \mathfrak{F}$ для любого $B \in \mathfrak{B}\}$. Если даны S-пространства X_a, $a \in A$ и $x \in PX_a$, то $A(x) = \{a : a \in A,\ \pi_a(x) \neq \theta_a\}$. $\cup$-идеалом называется семейство подмножеств A, замкнутое относительно операции конечного объединения. В дальнейшем Z — фиксированное S-пространство, A — фиксированное множество, $\mathfrak{B}$ — фиксированный $\cup$-идеал $\subset 2^A$, $L(\mathfrak{B}) = \{x : x \in PX_a$ и $A(x) \in \mathfrak{B}\}$, $X = L(\mathfrak{B}', PX_a)$ и $Y = L(\mathfrak{B}, PY_a)$. Пусть Y — топологизированное, Z — топологическое S-пространства и $\mu \in X \to C(Y, Z)$. Для $M \subset X$, $N \subset Z$ полагаем $G(M, N) = \{y : [\mu(x)](y) \in N$ для $x \in M\}$. В Y вводится ряд топологий: пусть $\mathfrak{G}$ — произвольное семейство подмножеств Y, каждое из которых содержит θ, и $\mathfrak{G}_F$ — семейство конечных пересечений членов $\mathfrak{G}$; через $T(\mathfrak{G})$ обозначается топология, в которой множество $U \subset Y$ открыто тогда и только тогда, когда для каждого $x \in U$ существует $G \subset \mathfrak{G}_F$ такое, что $x + G \subset U$. В дальнейшем в качестве семейства $\mathfrak{G}$ берутся семейства:

$\mathfrak{W} = \{G(\{x\}, V),\ x \in X,\ V$ — ядро (nucleus) в $Z\}$;

$\mathfrak{P} = \{M$: совокупность $y \in Y$ таких, что для некоторого $B' \in \mathfrak{B}'$ $A(y) \cap B' = \Lambda\}$;

$\mathfrak{M} = \{M$: для каждого $a \in A$ существует ядро V_a в Y_a такое, что $i_a(V_a) \subset M\}$;

$\mathfrak{R} = \{PV_a \cap Y$: каждое V_a — ядро в $Y_a\}$;

$\mathfrak{Q} = \{PV_a \cap Y$: каждое V_a — ядро в Y_a, но лишь конечное число V_a отлично от $Y_a\}$.

Наконец, будем говорить, что Z не имеет произвольно малого S-подпространства, если в Z существует ядро, не содержащее никакого S-подпространства, отличного от θ.

Доказываются теоремы:

1. Пусть каждое X_a есть Z-дополнение Y_a и μ^a — соответствующий S-гомоморфизм. Если Z не имеет произвольно малого S-подпространства и топология $\mathfrak{I}$ в Y такова, что $T(\mathfrak{W}) \subset \mathfrak{I} \subset T(\mathfrak{M}) \cap T(\mathfrak{P})$, то X есть Z-дополнение Y и гомоморфизм μ: $X \to C[(Y, \mathfrak{I}), Z]$ определяется равенством

$$[\mu(x)](y) = \sum \{[\mu^a(x_a)](y_a) : a \in A\}. \qquad (1)$$

2. Пусть каждое X_a есть Z-дополнение Y_a и Z не имеет произвольно малого S-подпространства. Тогда P^wX_a есть Z-дополнение PY_a в топологии $T(Q)$ и гомоморфизм P^wX_a в $C(PY_a, Z)$ дается равенством (1).

3. Пусть каждое X_a есть Z-дополнение Y_a и топология $\mathfrak{I}$ в P^wY_a такова, что $T(\mathfrak{W}) \subset \mathfrak{I} \subset T(\mathfrak{M})$. Тогда PX_a есть Z-дополнение $(P^wY_a, \mathfrak{I})$ и гомоморфизм μ определяется формулой (1).

Из этих теорем в применении к топологическим группам и линейным топологическим пространствам извлекается ряд следствий, как например: 1) Если для каждого $a \in A$, G_a и H_a — двойственные в смысле Л. С. Понтрягина хаусдорфовы группы, т. е. каждая изоморфна и гомеоморфна группе характеров другой, то таковы же будут и группы PG_a и P^wH_a.

2) Пусть Z — любое линейное топологическое пространство, Y_a для каждого a также линейное топологическое пространство и $X_a = C(Y_a, Z)$, тогда если топология $\mathfrak{I}$ в P^wY_a такова, что $T(\mathfrak{W}) \subset \mathfrak{I} \subset T(\mathfrak{M})$, то PX_a изоморфно $C[(PY_a, \mathfrak{I}), Z]$. Рассматривается произведение гильбертовых пространств, для которого формулируется аналогичный результат.

В. И. Соболев

8988. Компактные и локально компактные пространства. Пизо (Espaces compacts et localement compacts. Pisot Ch.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1957, 36, № 185, 339—344 (франц.)

Даются определения бикомпактного (компактного, по терминологии автора), локально бикомпактного, полного метрического и банахова пространств, а также указываются некоторые свойства таких пространств. Новых результатов статья не содержит. В. И. Соболев

8989. Вопросы двойственности в векторных структурах. Лауденслейгер (Duality in vector lattices. Lowdenslager D. B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 476—483 (англ.)

Пусть L и M — K-пространства и на $L \times M$ задан билинейный функционал (x, y). Этот функционал называется невырождающимся, если из выполнения тождества $(x, y) \equiv 0$ при всех $y \in M$ ($x \in L$) и фиксированном $x \in L$ ($y \in M$) вытекает, что $x = 0$ ($y = 0$). Через x^* (y^*) обозначается линейный (т. е. аддитивный и однородный) функционал на M (на L), в который обращается функционал (x, y), если фиксировать элемент $x \in L$ ($y \in M$).

K-пространства L и M называются спаренными относительно билинейного функционала (x, y), если: 1) все функционалы x^* ($x \in L$) и y^* ($y \in M$) (o)-непрерывны; 2) при отображении $x \to x^*$ K-пространства L в K-пространство $H_r(M)$ всех регулярных функционалов на M образ K-пространства L является подструктурой в $H_r(M)$, т. е. $(x_1 \vee x_2)^* = x_1^* \vee x_2^*$ в $H_r(M)$; 3) аналогичное условие выполнено для отображения $y \to y^*$. При этом понятие (o)-непрерывного линейного функционала у автора эквивалентно принятому в советской литературе понятию вполне линейного функционала (Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950).

Основная теорема: Если L и M — K-пространства, спаренные относительно невырождающегося билинейного функционала (x, y), то каждый положительный вполне линейный функционал на M есть верхняя грань некоторого направленного по возрастанию множества функционалов вида x^* ($x \in L$).

В качестве приложений этой теоремы даются новые доказательства: а) рефлексивности пространств $L_p(m)$ ($p > 1$), где m — произвольная счетноаддитивная мера (Schwartz J., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 270—275); б) теоремы Огасавары о необходимом и достаточном условии рефлексивности KB-линеала (другое доказательство этой теоремы было дано референтом; РЖМат, 1954, 5171). Для пространства $L_1(m)$ получается теорема: Для любой меры m следующие утверждения эквивалентны:

1) если m' — мера, определенная для тех же множеств, что и m, причем $m'(B) \leqslant Cm(B)$ (C — постоянная), то существует такой элемент $f \in L_\infty$, что $m'(B) = \int_B f dm$ (свойство Радона—Никодима);

2) если F — регулярный функционал на $L_1(m)$, то существует такой элемент $f \in L_\infty$, что $F(g) = \int gf dm$ при всех $g \in L_1$ (свойство Рисса);

3) L_∞ — K-пространство при естественном упорядочении;

4) каждый вполне линейный функционал на L_∞ порождается элементом из L_1.

Кроме того, доказывается следующее предложение: Если X — K-линеал, Y — K-пространство всех регулярных функционалов на X, Z — K-пространство всех вполне линейных функционалов на Y, то каждый вполне линейный функционал на Z порождается элементом из Y (т. е. имеет вид $F(z) = z(y)$).

Б. З. Вулих

8990. О нормах, вводимых с помощью равномерно конечных модулей. Симогаки (On the norms by uniformly finite modulars. Shimogaki Tetsuya), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 6, 304—309 (англ.)

Рассматривается полуупорядоченное пространство R, на элементах которого задан функционал $m(x)$ («модуль»), удовлетворяющий условиям: 1) $0 \leqslant m(x) \leqslant +\infty$; 2) если для всех $\xi \geqslant 0$ $m(\xi x) = 0$, то $x = 0$; 3) для каждого $x \in R$ найдется такое $\alpha > 0$, что $m(\alpha x) < +\infty$; 4) $m(\xi a)$ — выпуклая функция от $\xi \geqslant 0$; 5) $|a| \leqslant |b|$ влечет $m(a) \leqslant m(b)$; 6) $|a| \cap |b| = 0$ влечет $m(a+b) = m(a) + m(b)$; 7) если $0 \leqslant a_\lambda \nearrow_{\lambda \in \Lambda} a$, то $m(a) = \sup_{\lambda \in \Lambda} m(a_\lambda)$. По поводу терминологии и определений см. монографию Накано (Nakano H., Modulared semi-ordered linear spaces, Tokyo, 1950).

На R могут быть определены 2 эквивалентные нормы:

$$\|x\| = \inf_{\xi > 0} \frac{1 + m(\xi x)}{\xi}, \quad |||x||| = \inf_{m(\xi x) \leqslant 1} \frac{1}{|\xi|},$$

совпадающие в широком классе случаев с нормами, введенными в указанной выше работе Накано. Автор называет норму конечно монотонной, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \geqslant 1$, если $\|x_i\| > \varepsilon$, $|x_i| \cap |x_j| = 0$. Норма называется конечно плавной (finitely flat), если по каждому $\gamma > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что если $x = \sum_{i=1}^n x_i$, $\|x\| \geqslant 1$, $\|x_i\| \leqslant \varepsilon$, $|x_i| \cap |x_j| = 0$, то $n \geqslant \frac{\gamma}{\varepsilon} \|x\|$. Исследуются свойства конечномонотонных норм, заданных на K-пространстве, и приводятся теоремы о связи конечной монотонности с другими свойствами нормы. В частности, из равномерной монотонности следует конечная монотонность, из конечной монотонности — конечная плавность сопряженной нормы, из конечной плавности — конечная монотонность сопряженной, из равномерной плавности — конечная плавность ее.

Доказывается равносильность равномерной конечности модуля и конечной монотонности, а также равномерного возрастания модуля и конечной плавности $\|x\|$ для недискретных пространств. Строится пример такого KB-пространства, что не может быть задан модуль, сходимость по которому была бы эквивалентна сходимости по норме.

Примечание референта. По мнению референта, способ доказательства теоремы 1.6, намеченный автором, не приводит немедленно к цели. Референт, однако, располагает другим доказательством этой теоремы.

В. Н. Судаков

8991. Заметка о теореме Орлича—Бирнбаума—Амемия. Симогаки (Note on Orlicz—Birnbaum—Amemiya's theorem. Shimogaki Tetsuya), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 6, 310—313 (англ.)

Обобщая известное Δ_2-условие, накладываемое на функцию $\Phi(t)$, определяющую пространство Орлича e_Φ, автор доказывает следующую теорему, в которой R есть дискретное полуупорядоченное пространство, e_λ — базис в R (индекс λ пробегает некоторое упорядоченное множество Λ), $m(x)$ — модуль на R (т. е. некоторый функционал со значениями $0 \leqslant m(x) \leqslant +\infty$; более подробно он описан в реферате одной статьи Ямамуро; РЖМат, 1956, 1492); при этом $m(x)$ предполагается монотонно полным в следующем смысле: если a_λ — возрастающая с λ последовательность элементов R, причем $a_\lambda \geqslant 0$, то условие $\sup_{\lambda \in \Lambda} m(a_\lambda) < +\infty$ влечет существование $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$.

Теорема. Для того чтобы модуль $m(x)$ с указанными свойствами был конечным (т. е. $m(x) < +\infty$ для всех $x \in R$), необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) $m(\xi e_\lambda) < +\infty$ для всех действительных чисел $\xi \geqslant 0$ и всех $\lambda \in \Lambda$; 2) существуют $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ такие, что из $\varepsilon \leqslant m(x) \leqslant \varepsilon'$ следует $m(2x) \leqslant \gamma m(x)$ для некоторого $\gamma > 0$ и всех $x \in R$.

Дано также новое доказательство теоремы Амемии (Amemiya I., J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1956,

ser. 1, 12, № 2, 60—64), обобщающей в аналогичном смысле результат для пространств Орлича L_Φ.

М. К. Фаге

8992. О некоторых операторах в обобщенных пространствах Орлича. Шрагин И. В., Докл. АН СССР, 1957, 117, № 1, 40—43

Пусть L^M и L^{M_1} — некоторые пространства Орлича в смысле Цанена (Zaanen A. C., РЖМат, 1957, 5736К). Пусть $d = \sup\{u \in [0, \infty) : M(u) < \infty\}$ и $f_c(v) = \sup\{u \in [0, d) : M_1(uv) \geqslant cM(u)\}$. Рассматривается оператор $hu = g(u(x), x)$, где вещественная функция $g(u, x)$ непрерывна по u почти при всех $x \in B$ и измерима по x при каждом фиксированном u, $-\infty < u < \infty$. Через B обозначается некоторое множество s-мерного евклидова пространства.

Теорема 2. Пусть $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию при $u \geqslant 0$. Тогда для слабой непрерывности оператора h из L^M в L^{M_1} необходимо и достаточно выполнения следующего условия: α) почти при всех $x \in B$ функция $g(u, x)$ имеет вид

$$g(u, x) = a(x) + b(x)u \quad (-\infty < u < \infty),$$

где $a(x) \in L^{M_1}$, а $b(x)$ такова, что $f_c(\lambda |b(x)|) \in L^M$ при некоторых c и $\lambda > 0$.

Напомним, что функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию при всех u, если $M(2u) \leqslant KM(u)$ $(u \geqslant 0)$.

При доказательстве сформулированной теоремы используется приведенный в правой части заметки необходимый и достаточный признак того, что оператор умножения $Hu = b(x)u(x)$ действует из L^M в L^{M_1}. Отметим, что оператор умножения $Hu = b(x)u(x)$ изучался также в работе М. А. Красносельского и референта (реф. 8993), где были указаны некоторые достаточные признаки того, что он действует из одного пространства Орлича в другое.

Я. Б. Рутицкий

8993. О некоторых нелинейных операторах в пространствах Орлича. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Докл. АН СССР, 1957, 117, № 3, 363—366

Найдены достаточные условия дифференцируемости в некотором шаре пространства Орлича оператора $fu(x) = f[x, u(x)]$, где $f(x, u)$ — функция, удовлетворяющая условиям Каратеодори в области $x \in G$, $-\infty < u < \infty$ (G — компактное множество в n-мерном пространстве). Установлены условия полной непрерывности нелинейного интегрального оператора

$$(K_\varphi)(x) = \int_G K[x, y, \varphi(y)]\, dy.$$

Результатами авторов охватываются случаи существенно нестепенной нелинейности. Например: $|K(x, y, u)| \leqslant K(x, y)\, e^{au}$, $x, y \in G$, $-\infty < u < \infty$, причем $K(x, y) < a|\ln|x - y||^{1-\beta_0} + b$, $a, b > 0$, $0 < \beta_0 < 1$. Другой пример: $|K(x, y, u)| \leqslant K(x, y)[a + \ln(|u| + 1)]$, $\int\int K(x, y) \ln[K(x, y) + 1]\, dxdy < \infty$. Получены также результаты, касающиеся дифференцируемости нормы в пространствах Орлича. В частности, обобщена формула Мазура для градиента нормы в L^p. В. Э. Лянце

8994. Функциональные пространства и функциональное пополнение. Ароншайн, Смит (Functional spaces and functional completion. Aronszajn N., Smith K. T.), Ann. Inst. Fourier, 1955—1956 (1956), 6, 125—185 (англ.)

Функциональным классом (ф. к.) $\mathscr{F}$ относительно $\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — некоторое наследственное σ-кольцо подмножеств множества $\mathscr{E}$, авторы называют линейное множество функций f, определенных на всем $\mathscr{E}$, за возможным исключением некоторого подмножества из $\mathfrak{A}$. Говорят, что $\mathscr{F}$ — нормированный ф. к. относительно $\mathfrak{A}$, если на $\mathscr{F}$ задана такая псевдонорма, что $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$, исключая $\mathfrak{A}$ (т. е. с точностью до подмножества $\mathscr{E}$ из $\mathfrak{A}$). Приводятся необходимые и достаточные условия на $\mathfrak{A}$ для того, чтобы $\mathscr{F}$ был нормированным ф. к. относительно $\mathfrak{A}$. Для данного нормированного ф. к. $\mathscr{F}$ среди возможных $\mathfrak{A}$ имеется наименьшее (пересечение допустимых $\mathfrak{A}$). С помощью последовательностей Коши определяется полнота $\mathscr{F}$. Функциональным пространством (ф. п.) $\mathscr{F}$ относительно $\mathfrak{A}$ называется такой нормированный ф. к. $\mathscr{F}$ относительно $\mathfrak{A}$, что в каждой сходящейся по норме последовательности найдется подпоследовательность, сходящаяся всюду, исключая $\mathfrak{A}$. Вопрос о существовании наименьшего такого класса $\mathfrak{A}$ в этом случае не решен. Полное нормированное ф. п. $\mathscr{F}'$ относительно $\mathfrak{A}'$ называется пополнением нормированного ф. к. $\mathscr{F}$ относительно $\mathfrak{A}$, если $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$, нормы общих элементов совпадают, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$ и $\mathscr{F}$ плотно в $\mathscr{F}'$. Если при этом $\mathfrak{A}'$ — наименьшее допустимое семейство, пополнение называется совершенным. Проблема существования совершенного пополнения, изученная при специальных предположениях для широкого класса частных случаев, в общем виде остается открытой. Дается конструкция пополнения в предположении его существования. Значительное место уделено вопросам определения исключительных классов $\mathfrak{A}$, относительно которых существует функциональное пополнение. Доказана, в частности, теорема: Чтобы нормированный ф. к. $\mathscr{F}$ относительно $\mathfrak{A}$ имел функциональное пополнение относительно $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}$, необходимо и достаточно выполнение условий: 1) для любой последовательности Коши $\{f_n\}$ в $\mathscr{F}$, точечно сходящейся, исключая $\mathfrak{A}'$, условия $f_n(x) \to 0$, исключая $\mathfrak{A}'$, и $\|f_n\| \to 0$ эквивалентны; 2) каждая последовательность Коши в $\mathscr{F}$ содержит подпоследовательность, точечно сходящуюся, исключая $\mathfrak{A}'$; 3) каждая последовательность множеств $\{B_n\}$ такая, что $\delta(B_n) \to 0$, содержит подпоследовательность $\{B_{n_k}\}$, удовлетворяющую условию: $\overline{\lim} B_{n_k} \in \mathfrak{A}'$ (здесь $\delta(B) = \inf(\lim \|f_n\|)$, где inf берется по всем последовательностям Коши в $\mathscr{F}$ таким, что $\lim |f_n(x)| \geqslant 1$ на B, исключая $\mathfrak{A}$). С помощью этой теоремы получается нижняя граница для исключительного класса $\mathfrak{A}$ совершенного функционального пополнения. Верхняя граница и некоторые дополнительные условия существования функционального пополнения получаются с использованием специальных функций множеств, совпадающих в ряде случаев с емкостями (РЖМат, 1957, 271). Приводятся приложения и иллюстрации понятий теории на примерах ряда известных пространств (аналитических функций, L^p, гармонических функций и др.).

В. Н. Судаков

8995. Произведения C-меры и локально интегрируемого отображения. Морс, Трансью (Products of a C-measure and a locally integrable mapping. Morse Marston, Transue William), Canad. J. Math., 1957, 9, № 4, 475—486 (англ.)

Пусть E — локально компактное топологическое пространство, α — некоторая C-мера на E (РЖМат, 1957, 7185) и y — комплексная функция на E, локально интегрируемая относительно α (последнее означает, что произведение функции y на характеристическую функцию любого открытого множества с компактным замыканием интегрируемо относительно α). Произведением $y \cdot \alpha$ называется C-мера, определяемая формулой

$$\int u d(y \cdot \alpha) = \int uy d\alpha,$$

где u — произвольная непрерывная функция.

Основной результат: Пусть x — такая комплексная функция на E, что

$$\int^{*} |x||y|\,d|\alpha| < \infty, \quad \int^{*} |x|\,d|y\cdot\alpha| < \infty;$$

тогда эти интегралы равны, и если существует один из интегралов

$$\int xy\,d\alpha, \quad \int x\,d(y\cdot\alpha),$$

то существует и другой и

$$\int xy\,d\alpha = \int x\,d(y\cdot\alpha).$$

В. А. Рохлин

8996. Замечания об интеграле Досса. Урбаник (Remarks on the Doss integral. Urbanik K.), Colloq. math., 1957, 5, № 1, 95—102 (англ.)

Пусть X^I — множество всех функций, отображающих сегмент $I=[0, 1]$ с мерой Лебега в метрическое пространство X. Измеримая функция $f \in X^I$ называется интегрируемой по Доссу (Doss S., Bull. sci. math., 1949, 73, 48—72), если существует единственный элемент $a_f \in X$ такой, что для любого $z \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(a_f, z) \leqslant \int_0^1 \rho(f(t), z)\,dt.$$

a_f называется интегралом Досса и обозначается через $\int_0^1 f(t)\,dt$. В дальнейшем X предполагается метрической абелевой группой с инвариантной метрикой ($\rho(x+z, y+z)=\rho(x, y)$) и всякая измеримая конечнозначная функция из X^I предполагается интегрируемой по Доссу. Множество всех таких функций обозначается через $\mathfrak{A}$. Основной результат работы состоит в том, что при этих условиях в X можно единственным образом ввести умножение на действительные числа так, чтобы получилось линейное топологическое пространство, и что интеграл Досса на $\mathfrak{A}$ равен обычному интегралу:

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} m(I_j)\,x_j,$$

где $f(t)=x_j \in X$ для $t \in I_j$ ($j=1, \ldots, n$), $I=\bigcup_{j=1}^{n} I_j$, $I_j \cap I_k = 0$ для $j \neq k$ и m есть мера Лебега.

Л. М. Абрамов

8997. Минимизирующие преобразования эрмитовых функционалов и мультипликативное интегрирование. Мейерс (Minimizing transformations of Hermitian functionals, and product integration. Meyers Leroy F.), Duke Math. J., 1957, 24, № 3, 391—404 (англ.)

В комплексной линейной системе H вводятся внутренние (скалярные) произведения A и B с помощью двух билинейных эрмитовых положительно определенных замкнутых функционалов $A(u, v)$ и $B(u, v)$. Функционалы $A(u, v)$ и $B(u, v)$ предполагаются ограниченными друг относительно друга. Ниже $|T|'_A$, $|T|_A$, $|T|'_B$, $|T|_B$ — соответственно абсолютная норма и норма оператора T в H в A-метрике и B-метрике, I — единичный оператор в H. Если $B(u, v)=A(u, Tv)$, то это обозначается так: $T=A^{-1}B$; пусть Q — A-положительный квадратный корень из $A^{-1}B$, который в данном случае существует. Доказываются следующие предложения:

Теорема 1. Если $Q-I$ имеет конечную абсолютную A-норму, то среди линейных операторов T, преобразующих A в B (в том смысле, что $A(Tu, Tv)=B(u, v)$), единственным минимизирующим $|T-I|'_A$ является Q. Среди всех линейных операторов, преобразующих A в B, единственным минимизирующим $|T-I|'_B$ является также Q.

Эта теорема была опубликована без доказательства Лёвнером (Loewner C., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, 52, 66).

В теореме 2 доказывается, что оператор Q минимизирует также $|T-I|_A$ и $|T-I|_B$; показывается на примерах, что Q, вообще говоря, не единственный минимизирующий $|T-I|_A$ и $|T-I|_B$.

Далее рассматривается функция $F(t)$, определенная на некотором отрезке $[a, b]$ со значениями в множестве замкнутых внутренних произведений в H такая, что $F(a)=A$, $F(b)=B$. На соответствующей кривой выбираются точки $A_0=A$, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_k=B$, строится оператор $(A_{j-1}A_j)^{1/2}$ и составляется произведение $Q_k=\Pi_j(A_{j-1}^{-1}A_j)^{1/2}$. Оператор Q_k преобразует A в B.

Рассматривается при некоторых естественных дополнительных предположениях оператор $JF=\lim_k Q_k$, аналогичный мультипликативному интегралу Вольтерра, но, по утверждению автора, не вполне с ним совпадающий. Оператор JF называется минимизирующим преобразованием A в B вдоль кривой $F(t)$. Изучается вопрос о существовании JF и его свойствах. Устанавливается, что непосредственное минимизирующее преобразование A в B равносильно минимизирующему преобразованию A в B вдоль прямой, соединяющей A и B в множестве билинейных функционалов. Показывается, что оператор, осуществляющий минимизирующее преобразование A в B вдоль кривой, можно рассматривать как решение некоторого обыкновенного дифференциального уравнения в пространстве линейных операторов в H при некотором начальном условии.

И. С. Понизовский

8998. О преобразовании GW. Лански й (O transformaci GW. Lánský Miloš), Aplikace mat., 1957, 2, № 6, 444—468 (чешск.; рез. русск., англ.)

Пусть K — конечномерное K-пространство, J — совокупность векторов $a \in K$, у которых все координаты строго положительны, $L \subset K$ — линейное подмножество, пересечение которого с J пусто. Если $a \in J$, то V_a означает линейное многообразие $L+a$, а совокупность $O_a=V_a \cap J$ называется GW-областью (название связано с именами норвежских химиков Гульдберга и Ваге). GW-область — открытый выпуклый полиэдр, имеющий одинаковую размерность с L. Понятие GW-области используется для введения GW-преобразования — некоторого оператора, сопоставляющего каждому вектору $a \in K$ и каждому линейному функционалу на K некоторый вектор из K, который или принадлежит J, или совпадает с a. Указываются условия, при которых GW-преобразование однозначно. Результаты применяются к решению вопроса о существовании и единственности химического равновесия общей системы гетерогенных реакций.

Б. З. Вулих

8999. Представление операторов в гильбертовом пространстве (nJ)-матрицами. Смарт (Representation of Hilbert space operators by (nJ)-matrices. Smart D. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. and Phys Sci., 1957, 53, № 2, 304—311 (англ.)

В комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ рассматривается замкнутый оператор T с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения. T называется представимым с помощью бесконечной матрицы H, если по отношению к некоторой полной ортонормированной системе T есть оператор $\tilde{T}_1(H)$ по Стоуну (Stone M. H., Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, New York, 1932,

теорема 3.2. В дальнейшем все матрицы считаются удовлетворяющими условиям этой теоремы). (nJ)-матрицей называется эрмитова матрица $H=[h_{ij}]_{i,\,j\geqslant 1}$, для которой $h_{ij}=0$ при $i-j>n$ и $h_{ij}\neq 0$ при $i-j=n$.

В частности, матрицы Якоби суть $(1J)$-матрицы. Если H — (nJ)-матрица и, кроме того, $h_{ij}=0$ при $0<i-j<n$, то H называется $(nJ_\perp)$-матрицей.

Теорема 1. Для того чтобы линейный оператор T был представим с помощью $(nJ_\perp)$-матрицы, необходимо и достаточно, чтобы существовало n бесконечномерных попарно ортогональных замкнутых подпространств $\mathfrak{H}_i$, замкнутая линейная оболочка которых совпадает с $\mathfrak{H}$, и таких, что каждое из них приводит оператор T и в каждом из них T представим якобиевой матрицей.

Дальнейшие теоремы 2 и 3 обобщают следующее утверждение, доказанное, но не сформулированное в упомянутой выше книге Стоуна: Для того чтобы самосопряженный оператор T был представим с помощью якобиевой матрицы, необходимо и достаточно, чтобы у T был простой спектр, т. е. существовал бы порождающий элемент $x\in\mathfrak{H}$, для которого существуют все $(T^nx)_{n\geqslant 0}$ и их замкнутая линейная оболочка совпадает с $\mathfrak{H}$.

Теорема 2. Для того чтобы эрмитов (но не обязательно самосопряженный) оператор T был представим $(1J)$-матрицей, необходимо и достаточно, чтобы для T существовал порождающий элемент.

Теорема 3. Для того чтобы эрмитов оператор T был представим с помощью (nJ)-матрицы, необходимо и достаточно, чтобы для T существовало n-мерное порождающее подпространство.

Теорема 4. Если T — самосопряженный оператор, то: а) если T представим с помощью (nJ)-матрицы, то T представим с помощью $(pJ_\perp)$-матрицы для некоторого $p\leqslant n$; б) если T представим с помощью $(pJ_\perp)$-матрицы, то кратность его спектра $q\leqslant p$; в) если спектр T имеет конечную кратность q, то T представим с помощью $(rJ_\perp)$-матрицы при любом $r\geqslant q$.

И. С. Иохвидов

9000. О квадратных корнях нормальных операторов. Патнам (On square roots of normal operators. Putnam C. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 4, 768—769 (англ.)

Пусть A — некоторое решение уравнения $A^2=N$, где N — нормальный оператор. Доказывается, что если значения комплекснозначной функции (Ax, x), где $\|x\|=1$, лежат в некоторой полуплоскости, то оператор A является нормальным.

В. Б. Лидский

9001. Линейно возмущенные операторы. Реллих (Linearly perturbed operators. Rellich Franz), Publ. Nat. Acad. Sci. Nat. Res. Council, 1955, № 387, 30—36 (англ.)

Пусть A и S — симметрические операторы, определенные на многообразии $\mathfrak{D}$, плотном в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Через A_ε обозначается самосопряженное расширение оператора $A+\varepsilon S$, а через $\mathfrak{D}_\varepsilon$ — его область определения. Предполагается, что вещественный параметр ε изменяется в некотором интервале.

В работе устанавливаются достаточные условия, при которых наименьшая точка спектра $\lambda_0(\varepsilon)$ оператора A_ε является выпуклой функцией параметра ε. Вопрос представляет интерес лишь в связи с неограниченными операторами; в случае ограниченных операторов выпуклость всегда имеет место.

Из полученных условий отметим следующее: для выпуклости $\lambda_0(\varepsilon)$ достаточно, чтобы оператор $A+\varepsilon S$ был существенно самосопряженным и ограниченным снизу на многообразии $\mathfrak{D}$, не зависящем от параметра ε.

В. Б. Лидский

9002. Обобщенные резольвенты симметрических операторов и разложение по собственным функциям одного класса краевых задач. Штраус А. В., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 251—253

Краткое изложение доклада на совещании по функциональному анализу в Москве 23—30 января 1956 г., посвященного обзору исследований автора по теории обобщенных резольвент симметрических операторов, начатых в 1950 г.

Основной результат состоит в представлении совокупности всех обобщенных резольвент R_λ данного симметрического оператора A в гильбертовом пространстве в виде

$$R_\lambda=(A_{F(\lambda)}-\lambda I)^{-1}, \qquad (1)$$

где $F(\lambda)$ пробегает множество всех операторных функций, не превосходящих по норме единицы, регулярных в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda\cdot\operatorname{Im}\lambda_0>0$ и отображающих дефектное подпространство $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ оператора A в его дефектное подпространство $\mathfrak{N}_{\bar\lambda_0}$, а $A_{F(\lambda)}$ есть квазисамосопряженное расширение оператора A, определяемое оператором $F(\lambda)$ (РЖМат, 1954, 5661).

С помощью формулы (1) устанавливается, что обобщенные резольвенты симметрического регулярного или сингулярного дифференциального оператора L порядка $2n$ с минимальной областью определения являются интегральными операторами в $L^2(a, b)$, где a и b — концы интервала, на котором действует операция l, порождающая оператор L (РЖМат, 1958, 3805). Для любой спектральной функции E_λ оператора L разность $E_\beta-E_\alpha$ $(-\infty<\alpha<\beta<\infty)$ также является интегральным оператором в $L^2(a, b)$, откуда при $\alpha\to-\infty$, $\beta\to\infty$ вытекает формула разложения по некоторым решениям уравнения

$$l[y]-\lambda y=0 \quad (-\infty<\lambda<\infty)$$

(при $n=1$, $a=0$, $b=\infty$ и $\operatorname{Def}L=1$ аналогичный результат опубликован ранее автором; РЖМат, 1956, 3803). В случае, когда при вещественных λ оператор $F(\lambda)$ является изометрическим, обобщенная резольвента R_λ дифференциального оператора L, определяемая формулой (1) при $A=L$, приводит к разложениям по собственным функциям задачи с зависящими от λ краевыми условиями. При $l=-(py')'+qy$, $a=0$, $b=\infty$ и $\operatorname{Def}L=1$ такое краевое условие имеет вид

$$y|_{x=0}=\theta(\lambda)\,p(x)\,y'(x)|_{x=0},$$

где $\theta(\lambda)$ — произвольная мероморфная функция с неотрицательной мнимой частью в верхней полуплоскости и вещественная на вещественной оси или $\theta(\lambda)\equiv\infty$ (РЖМат, 1957, 8615).

И. М. Глазман

9003. О J-нерастягивающих оператор-функциях. Гинзбург Ю. П., Докл. АН СССР, 1957, 117, № 2, 171—173

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $H=H_1\oplus H_2$ оператор $J=E_+-E_-$, где E_+ и E_- — операторы проектирования соответственно на H_1 и H_2. Линейный оператор $\mathfrak{A}$, действующий в H, называется J-унитарным, если он имеет ограниченный обратный и если $\mathfrak{A}^*J\mathfrak{A}=J$. Оператор $\mathfrak{A}$ называется J-нерастягивающим, если $\mathfrak{A}^*J\mathfrak{A}\leqslant J$, и двусторонним J-нерастягивающим, если одновременно выполняются неравенства $\mathfrak{A}^*J\mathfrak{A}\leqslant J$ и $\mathfrak{A}J\mathfrak{A}^*\leqslant J$.

Пусть $Y(\lambda)$ — оператор-функция комплексного переменного λ, значения которой являются ограниченными операторами в H. Функцию $Y(\lambda)$ будем относить к классу $\mathfrak{R}_J$, если выполняются следующие усло-

вия: 1) $Y(\lambda)$ голоморфна в единичном круге, за исключением, быть может, счетного множества точек, 2) $Y(\lambda)$ — двусторонний J-нерастягивающий оператор в каждой точке голоморфности, 3) в некоторой точке λ_0 ($|\lambda_0|<1$) оператор $Y^{-1}(\lambda_0)$ существует, а $J-Y^*(\lambda_0)JY(\lambda_0)$ является вполне непрерывным оператором с конечным следом.

Если $Y(\lambda)\in K_J$, то все особые точки функций $Y(\lambda)$ и $Y^{-1}(\lambda)$ являются полюсами.

Без доказательства приводится следующая теорема, являющаяся обобщением на бесконечномерный случай теоремы В. П. Потапова (РЖМат, 1958, 289).

Каждая функция $Y(\lambda)$ класса $\mathfrak{R}_J$ допускает представление

$$Y(\lambda)=\mathfrak{A}Y_0(\lambda)\mathfrak{B}_1(\lambda)\mathfrak{B}_2(\lambda),$$

где

$$Y_0(\lambda)=\overrightarrow{\int_0^{\alpha}}\exp\left\{-\frac{e^{i\theta(t)}+\lambda}{e^{i\theta(t)}-\lambda}\,dE(t)\right\},$$

$$\mathfrak{B}_1(\lambda)=\overleftarrow{\prod_k}\mathfrak{B}_k^{-1}\left(\frac{\lambda_k'-\lambda}{1-\bar\lambda_k'\lambda}\frac{|\lambda_k'|}{\lambda_k'}P_k+I-P_k\right)\mathfrak{B}_k,$$

$$\mathfrak{B}_2(\lambda)=\overleftarrow{\prod_j}\mathfrak{W}_j^{-1}\left(\frac{1-\bar\lambda_j''\lambda}{\lambda_j''-\lambda}\frac{\lambda_j''}{|\lambda_j''|}Q_j+I-Q_j\right)\mathfrak{W}_j.$$

При этом $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_k$ и $\mathfrak{W}_j$ — J-унитарные операторы, $\theta(t)$ ($0\leqslant\theta(t)\leqslant 2\pi$) — монотонно убывающая функция, $JE(t)$ — эрмитово возрастающая оператор-функция, удовлетворяющая условию $\operatorname{sp}JE(t)\equiv t$, P_k и Q_j — проекционные операторы, для которых $P_k\leqslant E_+$, $Q_j\leqslant E_-$, $\overrightarrow{\int}$ — мультипликативный интеграл, а $\mathfrak{B}_1(\lambda)$ и $\mathfrak{B}_2(\lambda)$ — произведения, распространенные соответственно на все полюсы λ_k' и λ_j'' функций $Y^{-1}(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ с учетом их кратности. М. С. Бродский

9004. Суммы и произведения перестановочных спектральных операторов. Фогел (Sums and products of commuting spectral operators. Foguel S. R.), Arkiv mat., 1958, 3, № 5, 449—461 (англ.)

Пусть T_1 и T_2 — перестановочные линейные операторы в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ со спектрами $\sigma(T_1)$ и $\sigma(T_2)$. Через $\sigma(T_1)+\sigma(T_2)$ (соответственно $\sigma(T_1)\sigma(T_2)$) обозначается множество всех $\lambda+\mu$ (соответственно $\lambda\mu$) с $\lambda\in\sigma(T_1)$ $\mu\in\sigma(T_2)$. Пусть существует наибольшее натуральное число N (автор пишет n, что неудачно. *Реф.*), обладающее следующими свойствами: в $\sigma(T_1)$ найдется N различных точек $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$, являющихся полюсами резольвенты T_1 кратностей $n_1,\ldots,n_N$, а в $\sigma(T_2)$ найдется N аналогичных точек $\mu_1,\ldots,\mu_N$ кратностей $m_1,\ldots,m_N$, таких, что $\lambda_1+\mu_1=\ldots=\lambda_N+\mu_N=\delta$ (соответственно $\lambda_1\mu_1=\ldots=\lambda_N\mu_N=\delta$) и δ есть изолированная точка $\sigma(T_1)+\sigma(T_2)$ (соответственно $\sigma(T_1)\sigma(T_2)$). Тогда доказывается, что δ является полюсом резольвенты T_1+T_2 (соответственно T_1T_2) кратности не более чем $\max(m_i+n_i-1)$ ($i=1,\ldots,N$) (в соответствующей формулировке автора для T_1+T_2 (теорема 3) пропущено «of T_1+T_2». *Реф.*).

Пусть $S_1=\int\lambda E(d\lambda)$ и $S_2=\int\mu F(d\mu)$—скалярные операторы в смысле Данфорда (РЖМат, 1955, 5132), перестановочные между собой, причем булева алгебра проекторов, порожденная произведениями $E(\alpha)F(\beta)$, ограничена (α, β — произвольные борелевские множества). Тогда S_1+S_2 и S_1S_2 суть, как известно (РЖМат, 1955, 5133), скалярные операторы, и автор реферируемой статьи подсчитывает их разложения единицы, соответственно

$$G_1(\alpha)x=\int E(\alpha-\mu)F(d\mu)x$$

и

$$G_2(\alpha)x=\int E(\alpha/\mu)F(d\mu)x,$$

при том условии, однако, что (в обоих случаях) значение меры G_i на границе α обращает элемент x в нуль. Интегралы существуют в смысле Римана с сильной векторной сходимостью интегральных сумм, причем во втором случае для интегральных сумм $\sum E\left(\frac{\alpha}{\mu_i}\right)F(\Delta_i)x$ нужно, естественно, брать $\mu_i\neq 0$. Оба интеграла берутся по прямоугольнику, содержащему спектр S_2. М. К. Фаге

9005. Двупараметрические проблемы моментов. Девинац (Two parameter moment problems. Devinatz A.), Duke Math. J., 1957, 24, № 4, 481—498 (англ.)

Работа посвящена двупараметрическим аналогам известных теорем Стилтьеса—Гамбургера—Хаусдорфа для одномерной проблемы моментов.

Если $\{\mu(m,n)\}$ — последовательность действительных чисел (m, n — натуральные индексы), то запись $\mu(m+p,n+q)\geqslant 0$ означает, что для любых действительных $\{\zeta_i\}$ и точек $\{(m_i,n_i)\}$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\mu(m_i+m_j,n_i+n_j)\zeta_i\zeta_j\geqslant 0.$$

Соотношение $\mu(m+p,n+q)\geqslant\nu(m+p,n+q)$ означает, что $\mu(m+p,n+q)-\nu(m+p,n+q)\geqslant 0$.

Методами теории воспроизводящих ядер Аронштайна доказана следующая теорема: Пусть $\{\mu(m,n);m,n=0,1,\ldots\}$ — последовательность действительных чисел. Если

а) $$\mu(m+p,n+q)\geqslant 0,$$

б) $$a_1\mu(m+p,n+q)\leqslant\mu(m+p+1,n+q)\leqslant b_1\mu(m+p,n+q),$$
$$a_2\mu(m+p,n+q)\leqslant\mu(m+p,n+q+1)\leqslant b_2\mu(m+p,n+q),$$

в) при любых фиксированных m_0 и n_0 одномерная проблема моментов на всей оси (проблема Гамбургера) для последовательностей $\{\mu(m,2n_0)\}$ и $\{\mu(2m_0,n)+\mu(0,n)\}$ является определенной, то существует единственным образом определенная мера $d\alpha(x,y)\geqslant 0$ такая, что

$$\mu(m,n)=\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}x^my^nd\alpha(x,y).$$

При $a_k=-\infty$, или $b_k=+\infty$ соответствующие из неравенств б) отпадают. В случае $-\infty<a_k<b_k<\infty$ для $k=1$ или 2 условие в) можно полностью опустить, но тогда $d\alpha(x,y)$ определяется, вообще говоря, не единственным образом.

Теорема сопоставляется с результатами Хильдебранта (Hildebrandt T. H.), Шёнберга (Schoenberg I. J.) и Хавиленда (Haviland E. K.). В приложении приводится доказательство и интерпретация в терминах теории эрмитовых операторов с равными дефектными индексами критерия Гамбургера определенности проблемы моментов. И. С. Иохвидов

9006. О представлении положительных функционалов. Видав (Über die Darstellung der positiven Funktionale. Vidav Ivan), Math. Z., 1958, 68, № 4, 362—366 (нем.)

Пусть $\mathfrak{B}$ — линейная комплексная алгебра с единичным элементом 1, в которой определена инволюция, т. е. такое отображение $x \to x^*$ алгебры $\mathfrak{B}$ на себя, что: а) $x^{**} = x$, б) $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$, в) $(xy)^* = y^* x^*$. Элемент $u \in \mathfrak{B}$ называется симметричным, если $u^* = u$. Рассматривается алгебра $\mathfrak{B}$, порожденная двумя симметричными элементами p и q, связанными отношением $pq - qp = -i$ $(i^2 = -1)$ или, что то же, отношением $a^* a - aa^* = 1$, где $a \sqrt{2} = p + iq$, $a^* \sqrt{2} = p - iq$. Тогда любой элемент $x \in \mathfrak{B}$ является полиномом вида

$$x = \sum a_{kl} p^k q^l; \quad k = 1, 2, \ldots, m; \quad l = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $f(x)$ — положительный линейный функционал (т. е. такой, что $f(x^* x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathfrak{B}$), причем $f(1) = 1$. Элементы $x \in \mathfrak{B}$, для которых $f(x^* x) = 0$, образуют левый идеал $\mathfrak{N}$. Если ввести в пространстве $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ скалярное произведение $(\xi, \eta) = f(y^* x)$, где ξ и η суть смежные классы, отвечающие элементам x и y из $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ становится сепарабельным гильбертовым пространством, которое, однако, может не быть полным. Пусть $\mathfrak{H}$ — его пополнение. Каждый элемент $x \in \mathfrak{B}$ можно рассматривать как линейный оператор A_x, действующий в $\mathfrak{H}$: если ξ_0 есть смежный класс, отвечающий элементу $x_0 \in \mathfrak{B}$, то $A_x \xi_0$ есть смежный класс, отвечающий элементу xx_0. Областью определения оператора A_x является $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$, т. е. плотное множество в $\mathfrak{H}$. Так как

$$(A_{x^*} \xi_0, \eta_0) = f\left(y_0^* x^* x_0\right) = f\left[\left(xy_0\right)^* x_0\right] = (\xi_0, A_x \eta_0)$$

для любых ξ_0, $\eta_0 \in \mathfrak{B}/\mathfrak{N}$, то A_x обладает в $\mathfrak{H}$ замыканием $\bar{A}_x$.

Доказывается, что если замыкание оператора $A_{aa^*} = A_a A_{a^*}$ есть самосопряженный оператор, то существует последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\psi_k(q)$ $(-\infty < q < \infty; k = 1, 2, \ldots, n; n \leqslant \infty)$ такая, что для любого $x \in \mathfrak{B}$ имеет место представление

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} X \psi_k(q) \overline{\psi_k(q)}\, dq,$$

где X означает дифференциальный оператор

$$X = \sum a_{kl} \left(\frac{1}{i} \frac{d}{dq}\right)^k q^l,$$

отвечающий элементу x.

Отмечается, что если функционал $f(x)$ неразложим (положительный функционал $f(x)$ называется неразложимым, если из $f(x) = \alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x)$, $0 < \alpha < 1$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — положительные функционалы, следует $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv f(x)$), то $n = 1$, т. е. имеет место представление

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} X \psi(q) \overline{\psi(q)}\, dq.$$

С. Н. Крачковский

9007. О некоторых теоремах Нёймана, касающихся спектральных множеств. Ф о й а ш (Sur certains théorèmes de J. von Neumann concernant les ensembles spectraux. F o i a s C i p r i a n), Acta scient. math., 1957, 18, № 1—2, 15—20 (франц.)

Множество комплексных чисел S называется спектральным для элемента x банаховой алгебры A с единицей, если для всякой рациональной функции $r(\lambda)$, удовлетворяющей условию: $|r(\lambda)| \leqslant 1$ при $\lambda \in S$, в A существует элемент $r(x)$ с $\|r(x)\| \leqslant 1$.

Пусть A — банахова алгебра с инволюцией. Если полуплоскость $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$ является спектральным множеством для элемента $x \in A$, то $\mathrm{Re}\, f(x) \geqslant 0$ для всякого линейного положительного функционала f. Предположим, что для алгебры A верно также обратное предложение: Если для некоторого $x \in A$ неравенство $\mathrm{Re}\, f(x) \geqslant 0$ выполнено для всякого положительного функционала f, то полуплоскость $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$ является спектральным множеством для элемента x. Тогда алгебра A изоморфна и изометрична некоторой замкнутой подалгебре алгебры линейных ограниченных операторов гильбертова пространства.

Если банахово пространство обладает тем свойством, что круг $|z| \leqslant 1$ является спектральным множеством для всякого оператора T с нормой $\|T\| \leqslant 1$, то это пространство является гильбертовым. В. Э. Лянце

9008. Коммутаторы в банаховых алгебрах. Л у м е р (Conmutadores en álgebras de Banach. L u m e r G.), Bol. Fac. ingr. y agrimensura Montevideo, 1957, 6, № 2—3, 63—68 (исп.)

Перепечатана статья автора (РЖМат, 1958, 4851).

В. Э. Лянце

9009. Теория размерности операторных алгебр на основе теории структур. Л у м и с (The lattice theoretic background of the dimension theory of operator algebras. L o o m i s L. H.), Mem. Amer. Math. Soc., 1955, № 18, 36 pp. (англ.)

Построенная Нёйманом и Мерреем в связи с задачей о классификации факторов теория относительной размерности подпространств гильбертова пространства может быть перенесена на абстрактные структуры, удовлетворяющие некоторым дополнительным аксиомам.

Пусть L — полная структура, содержащая 0 и 1, в которой для каждого элемента a существует ортогональное дополнение, т. е. такой элемент a', что $aa' = 0$, $a \cup a' = 1$. Говорят, что $a \perp b$, если $b \subset a'$.

Пусть в L выполнена аксиома: (M) Если $a \subset b$, то $b = a \cup a'b$.

Пусть, далее, в L определено соотношение эквивалентности $(\sim)$, обладающее следующими свойствами:

(A) Если $a \sim 0$, то $a = 0$.

(B) Если $a_1 \perp a_2$ и $b \sim a_1 \cup a_2$, то существует такое ортогональное разложение элемента b, $b = b_1 \cup b_2$, что $b_1 \sim a_1$ и $b_2 \sim a_2$.

(C) Если $\{a_\alpha\}$ — семейство попарно ортогональных элементов и $\{b_\alpha\}$ — другое ортогональное семейство, причем $a_\alpha \sim b_\alpha$ при всех α, то $\bigcup a_\alpha = \bigcup b_\alpha$.

(D) Если a и b не ортогональны, то существуют ненулевые элементы $a_1 \subset a$ и $b_1 \subset b$ такие, что $a_1 \sim b_1$.

Полная структура с ортогональным дополнением, в которой определено понятие эквивалентности, удовлетворяющее аксиомам (A) — (D), называется размерностной структурой.

В некоторых вопросах требуется усиление аксиом (B) и (D).

Два элемента a и b называются связанными, если существуют такие ненулевые $a_1 \subset a$ и $b_1 \subset b$, что $a_1 \sim b_1$.

Размерностная структура называется фактором, если в ней любые два ненулевых элемента связаны. Теория размерности для факторов строится аналогично соответствующей теории Нёймана—Меррея. Элемент a называется конечным, если из $a \sim b$ и $a \subset b$ следует $a = b$. Элемент e называется инвариантным, если для любого a из $a \sim e$ следует $a \subset e$. Элемент b называется простым, если все его подэлементы представляют собой его пересечения с инвариантными элементами.

Элемент имеет тип I, если он представляет собой объединение простых элементов. Элемент имеет тип II,

если он есть объединение конечных элементов, но не содержит ненулевых простых элементов. Элемент имеет тип III, если он не содержит ненулевых конечных элементов. Фактор называется фактором класса I, если он состоит из элементов типа I; аналогично определяются факторы классов II и III. Каждая размерностная структура распадается в прямую сумму факторов.

Последние три параграфа посвящены приложениям теории к кольцам операторов и кольцам с инволюцией (§ 9), представлениям групп (§ 10) и к классификации булевых алгебр (§ 11). С. В. Фомин

9010. О квазиунитарных алгебрах с полуконечными левыми кольцамч. Хонго (On quasi-unitary algebras with semi-finite left rings. Hongo Eishi), Bull. Kyushu Inst. Technol. (Math. Natur. Sci.), 1957, № 3, 1—10 (англ.)

Ассоциативная алгебра $\mathbf{R}$ над полем комплексных чисел называется квазиунитарной, если в $\mathbf{R}$ существует автоморфизм $x \to x^j$, инволютивный антиавтоморфизм $x \to x^s$ и скалярное произведение (x, y) такие, что $\mathbf{R}$ есть предгильбертово пространство, удовлетворяющее условиям: 1) $(x^s, x^s) = (x, x)$; 2) $(x, x^j) \geqslant 0$; 3) $(xy, z) = (y, x^s z)$; 4) операторы левого умножения $L_x y = xy$ непрерывны; 5) линейные комбинации элементов вида $xy + (xy)^j$ плотны в $\mathbf{R}$. Если $x^j = x$, то алгебра $\mathbf{R}$ называется унитарной.

Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть $\mathbf{R}$ — квазиунитарная алгебра с полуконечным левым кольцом $\mathbf{R}^g$ (т. е. слабо замкнутым кольцом, порожденным операторами L_x) и пусть $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ — гильбертово пространство, являющееся пополнением $\mathbf{R}$ по норме $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Тогда в $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ существует плотная квазиунитарная алгебра $\mathbf{R}'_1$, которую можно перенормировать (не обязательно эквивалентно) так, что она становится унитарной алгеброй $\mathbf{R}'_2$ с той же инволюцией. Если при этом обозначить через (x, y) и $\langle x, y \rangle$ скалярные произведения в $\mathbf{R}'_1$ и $\mathbf{R}'_2$ соответственно, то существует положительный самосопряженный несингулярный оператор $M' \in \mathbf{R}^g$ такой, что $(x, y) = \langle x, M^{-1}M'^{-1}y \rangle$, $J = \overline{M'M}^{-1}$ ($\sim$ обозначает замыкание в $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$), где $M = SN^jS$, J — замыкание в $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ оператора $x \to x^j$, S — замыкание оператора $x \to x^s$.

2. Пусть $\mathbf{R}$ — унитарная алгебра и M' — положительный самосопряженный несингулярный оператор, принадлежащий $\mathbf{R}^g$; тогда в $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ существует плотная унитарная алгебра $\mathbf{R}'_1$, превращающаяся в квазиунитарную алгебру с той же инволюцией при скалярном произведении $\langle x, y \rangle = (x, M^{-1}M'^{-1}y)$ (где $M = SM'S$) с автоморфизмом J, являющимся замыканием сужения на $\mathbf{R}'_1$ оператора $M'M^{-1}$.

Эти теоремы обобщают результаты Огасавары (РЖМат, 1958, 6908), рассмотревшего случай полных квазиунитарных алгебр. М. А. Наймарк

9011. W^*-алгебры и абстрактные (L)-пространства. Цудзи (W^*-algebras and abstract (L)-spaces. Tsuji Kazô), Bull. Kyushu Inst. Technol. (Math. Natur. Sci.), 1957, № 3, 11—13 (англ.)

Пусть A — коммутативная B^*-алгебра (по поводу терминологии см. РЖМат, 1956, 5351, 5352), $\bar{A}$ — сопряженное к A пространство. Подпространство $\bar{A}_1 \subset \bar{A}$ называется главным сопряженным подпространством относительно A, если: 1) A есть сопряженное пространство к $\bar{A}_1$; 2) $\bar{A}_1$ есть абстрактное (L)-пространство. При этом $\bar{A}_1$ называется абстрактным (L)-пространством, если вещественное банахово пространство вещественных функционалов $f \in \bar{A}_1$ есть банахова структура, являющаяся абстрактным (L)-пространством в смысле Какутани (Kakutani S., Ann. Math., 1941, 42, 523—527), т. е. если $\|f_1 + f_2\| = \|f_1\| + \|f_2\|$ при $f_1 \geqslant 0$ и $f_2 \geqslant 0$.

Основные результаты:

1. Алгебра A имеет W^*-представление тогда и только тогда, когда она имеет главное сопряженное подпространство $\bar{A}_1$ относительно A.

2. Главное сопряженное подпространство $\bar{A}_1$ относительно A, рассматриваемое как абстрактное (L)-пространство, тогда и только тогда имеет единичный элемент, когда в W^*-представлении алгебры A всякое ортогональное семейство взаимно ортогональных операторов проектирования не более чем счетно. М. А. Наймарк

9012. Регулярное кольцо конечной AW^*-алгебры. Берберян (The regular ring of a finite AW^*-algebra. Berberian S. K.), Ann. Math., 1957, 65, № 2, 224—240 (англ.)

Сильно плотной областью (с. п. о.) в конечной AW^*-алгебре A называется неубывающая последовательность (e_n) проекционных элементов с верхней гранью, равной единице. Оператором с замыканием (о. з.) в A будет называться последовательность пар (x_n, e_n), где $x_n \in A$, (e_n) является с. п. о., и выполнены условия: $x_n e_m = x_n e_n$, $x_n^* e_m = x_n^* e_n$ при $n < m$. Два о. з. (x_n, e_n) и (y_n, f_n) называются эквивалентными, если существует такая с. п. о. (g_n), что $x_n g_n = y_n g_n$, $x_n^* g_n = y_n^* g_n$, для всех n. Класс всех о. з., эквивалентных (x_n, e_n), обозначается через $[x_n, e_n]$ и называется замкнутым оператором (з. о.). Совокупность всех з. о. обозначается через $\bar{C}$, а элементы $\bar{C}$ — через $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$. Доказывается, что $\bar{C}$ является ассоциативной алгеброй над полем комплексных чисел с инволюцией относительно естественным образом определяемых алгебраических операций и инволюции: $[x_n, e_n] + [y_n, f_n] = [x_n + y_n, e_n \cap f_n]$ и т. п., $[x_n, e_n]^* = [x_n^*, e_n]$.

Изучаются алгебраические свойства $\bar{C}$. Например, если все $x_n \in A$ обратимы, то $[x_n, e_n] \in \bar{C}$ — обратимый элемент в $\bar{C}$. Если все $u_n \in A$ — унитарные элементы, $[u_n, e_n] \in \bar{C}$, то существует единственный унитарный элемент $u \in A$ такой, что $[u_n, e_n] = [u, 1]$. С помощью преобразования Кэли устанавливается взаимно однозначное соответствие между самосопряженными и унитарными элементами $\bar{C}$, для которых единица не является точкой спектра. Если $\|x_n\| \leqslant M$ для всех n, то существует единственный элемент $x \in A$ такой, что $[x_n, e_n] = [x, 1]$, если $[x_n, e_n] \in \bar{C}$. Элемент $\bar{e} \in \bar{C}$ называется проектором, если $\bar{e}^2 = \bar{e}$, $\bar{e}^* = \bar{e}$. Элемент $\bar{w} \in \bar{C}$ называется частично изометричным, если $\bar{w}^* \bar{w}$ — проектор. Всякий частично изометрический элемент $\bar{w} \in \bar{C}$ имеет вид $\bar{w} = [w, 1]$, где w — частично изометрический элемент A. Аналогичный результат имеет место для проекторов. Поэтому проекторы в $\bar{C}$ образуют полную структуру, изоморфную структуре проекторов A. Для всякого неотрицательного элемента $\bar{x} \in \bar{C}$ существуют такой неотрицательный элемент $\bar{y} \in \bar{C}$ и такой проектор $\bar{e} \in \bar{C}$, что $\bar{y}$ и $\bar{e}$ коммутируют с каждым элементом, коммутирующим с $\bar{x}$ и $\bar{x}\bar{y} = \bar{e}$, $\bar{e}\bar{x} = \bar{x}$, $\bar{e}\bar{y} = \bar{y}$. Существует взаимно однозначное соответствие между $*$-изоморфизмами AW^*-алгебр A_1 и A_2 и $*$-изоморфизмами соответствующих алгебр з. о. $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$. Это соответствие можно получить, сужая $*$-изоморфизм C_1 на C_2 до A_1. Изучается связь между подалгебрами алгебр A и $\bar{C}$. Обозначая через $\bar{A}$ совокупность всех з. о.

вида $[x, 1]$, $x \in A$, имеем следующий основной результат: $\bar{C}$ является регулярной алгеброй над полем комплексных чисел, с инволюцией $*$ и единицей $\bar{1}$, содержащей $\bar{A}$ в качестве самосопряженной подалгебры:

При этом: из

$$\bar{x}^*\bar{x} + \bar{y}^*\bar{y} + \bar{z}^*\bar{z} = \bar{1} \qquad (A)$$

вытекает $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z} \in \bar{A}$. Обратно, для всякой алгебры с инволюцией D, являющейся регулярным кольцом, содержащей $\bar{A}$ в качестве своего самосопряженного подкольца и удовлетворяющей условию (A), существует $*$-изоморфизм D на $\bar{C}$, оставляющий на месте все элементы $\bar{A}$. В. Э. Линце

9013. Слабая компактность в операторном пространстве. Умэгаки (Weak compactness in an operator space. Umegaki Hisaharu), Kôdai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 4, 145—151 (англ.)

Пусть A есть W^*-алгебра, μ — мера на A в смысле Сигала (РЖМат, 1954, 1713), $\mathfrak{P}$ — совокупность всех проектирующих элементов $p \in A$. Множество S функционалов на A называется равностепенно μ-абсолютно непрерывным, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\mu(p) < \delta$, $p \in \mathfrak{P}$ следует $|f|(p)| < \varepsilon$ для всех $f \in S$. Множество $S \subset L'(A, \cdot\mu)$ называется равностепенно μ-абсолютно непрерывным, если множество функционалов $f_y(x) = \mu(yx)$, $y \in S$ обладает этим свойством. Множество K в банаховом пространстве E называется условно слабо компактным, если слабое замыкание множества K слабо компактно в E. Аналогично вводится понятие секвенциальной условной слабой компактности.

Теорема 1 (Обобщение теоремы Витали—Хана—Сакса). Пусть A полуконечна, а μ регулярна на A и пусть $\{f_n\}$ — последовательность линейных функционалов в A, сильно непрерывных на единичной сфере в A. Если для каждого $p \in \mathfrak{P}$ существует и конечен $\lim_{n\to\infty} f_n(p)$, то $\{f_n\}$ равностепенно μ-абсолютно непрерывна.

Теорема 2. Пусть $\mu(1) < \infty$. Множество $K \subset L^1(A, \mu)$ условно слабо компактно тогда и только тогда, когда K равностепенно μ-абсолютно непрерывно и множества $K' = \left\{\frac{1}{2}(x + x^*),\ x \in K\right\}$, $K'' = \left\{\frac{1}{2i}(x - x^*),\ x \in K\right\}$ ограничены в L^1-норме.

Теорема 3. Множество $K \subset L^1(A, \mu)^+$ секвенциально условно слабо компактно тогда и только тогда, когда K ограничено в L^1-норме и для любой последовательности $p_n \in \mathfrak{P}$ такой, что $p_n \searrow 0$, последовательность $\mu(xp_n)$ сходится к нулю равномерно относительно $x \in K$. М. А. Наймарк

9014. Условное ожидание в операторной алгебре. II. Умэгаки (Conditional expectation in an operator algebra. II. Umegaki Hisaharu), Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 1, 86—100 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 4972. Рассматривается полуконечная W^*-алгебра A в гильбертовом пространстве H с нормальным существенным максимальным следом μ в смысле Диксмье (РЖМат, 1953, 816), удовлетворяющим условию: $\mu(x^*x) = 0$ лишь при $x = 0$. Пусть J — двусторонний идеал в A, состоящий из всех μ — интегрируемых операторов $x \in A$.

Диксмье доказал (РЖМат, 1953, 816) следующую теорему: Пусть A_1 есть W^*-подалгебра в A; тогда существуют максимальный центральный проектирующий оператор $p_\mu \in A_1$ и отображение $x \to x^e$ алгебры A на $A^e = p_\mu A_1$ такие, что для всех $x \in A$:

(D. 1) $\|x^e\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty$;

(D. 2) $x^{ee} = x^e$ и $x^{*e}x^e \leqslant (x^*x)^e$;

(D. 3) из $x \geqslant 0$ следует $x^e \geqslant 0$;

(D. 3′) $x^{*e} = x^{e*}$;

(D. 4) из $x \geqslant 0$, $x^e = 0$ следует $p_\mu x p_\mu = 0$;

(D. 5) $(yx^ey')^2 = yx^ey'$ и $(p_\mu x p_\mu)^e = x^e$ для y, $y' \in A$;

(D. 6) $(xy)^e = (yx)^e$ для каждого $y \in A \cap A_1'$;

(D. 7) отображение $x \to x^e$ непрерывно в сильнейшей и слабейшей топологии;

(D. 8) $\|x^e\|_1 \leqslant \|x\|_1$ и $\|x^e\|_2 \leqslant \|x\|_2$ для каждого $x \in J$ ($\|x\|_1$, $\|x\|_2$ — нормы в $L^1(A)$ и $L^2(A)$);

(D. 9) $\mu(xy^e) = \mu(x^ey)$ для всех $x \in A$ и $y \in J$. Это отображение $x \to x^e$ (которое в силу (D. 8) можно рассматривать на $L^1(A)$ и $L^2(A)$) автор называет условным ожиданием по отношению к A_1.

Доказывается, что всякое линейное отображение $x \to x^\varepsilon$ алгебры A в себя, удовлетворяющее условиям $I^\varepsilon \leqslant I$ и (D. 2), (D. 3), (D. 9), совпадает с условным ожиданием x^e по отношению к W^*-подалгебре A_1, являющейся прямой суммой $A^\varepsilon = \{x^\varepsilon,\ x \in A\}$ и $\{\lambda(I - I^\varepsilon) : \lambda$ — комплексные числа$\}$. Далее вводятся следующие понятия: Пусть дано семейство операторов $\{x_\gamma,\ \alpha \in D\}$, где D — направленное множество; пусть далее $W(x_\beta)$ есть W^*-алгебра, порожденная всеми операторами E_λ спектрального разложения для $\frac{1}{2}(x_\gamma + x_\gamma^*)$, $\frac{1}{2i}(x_\gamma - x_\gamma^*)$, и A_α есть W^*-алгебра, порожденная алгебрами $W(x_\gamma)$, $\gamma \leqslant \alpha$. Множество $\{x_\alpha,\ \alpha \in D\}$ называется M-сетью, если $x_\alpha = x_\beta^{e_\alpha}$ для всех α, $\beta \in D$, $\alpha \leqslant \beta$, где e_α — условное ожидание относительно A_α, а алгебры A_α — ассоциированными с данной M-сетью.

M-сеть называется возрастающей (убывающей), если для каждых α, $\beta \in D$ существует такой элемент $\gamma \in D$, что α, $\beta \leqslant \gamma$ ($\gamma \leqslant \alpha$, β).

Пример M-сети получается, если взять семейство $\{B_\alpha,\ \alpha \in D\}$ W^*-подалгебр B_α алгебры A таких, что $B_\alpha \subset B_\beta$ при $\alpha \leqslant \beta$ и положить $x_\alpha = x^{e_\alpha}$ для $x \in L^1(A)$ или $x \in L^2(A)$, где x^{e_α} — условное ожидание относительно B_α; соответствующая M-сеть $\{x_\alpha,\ B_\alpha,\ \alpha \in D\}$ называется простой. Доказываются следующие теоремы:

I. Пусть A — конечная σ-конечная W^*-алгебра; тогда для M-сети $\{x_\alpha,\ \alpha \in D\}$ следующие утверждения эквивалентны:

а) $\left\{x_\alpha^{(1)},\ \alpha \in D\right\}$, $\left\{x_\alpha^{(2)},\ \alpha \in D\right\}$ $\left(\text{где } x_\alpha^{(1)} = \frac{1}{2}(x_\alpha + x_\alpha^*),\ x_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2i}(x_\alpha - x_\alpha^*)\right)$ равномерно μ-интегрируемы и равномерно ограничены в L^1-норме; б) $\{x_\alpha,\ \alpha \in D\}$ проста; в) существует $x \in L^1(A)$ такой, что $\|x_\alpha - x\|_1 \to 0$.

При этом множество $S \subset L^1(A)$ называется μ-интегрируемым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta > 0$ такое, что из $\mu(p) < \delta$ (где p — проектирующий элемент из $L^1(A)$) следует $\mu(p\,|\,x|) < \varepsilon$ для всех $x \in S$.

II. Пусть $\{x_\alpha,\ \alpha \in D\}$ — убывающая M-сеть в $L^2(A)$ (в $L^2(A) \cap A$). Тогда x_α сходится к оператору $x \in L^2(A)$ ($x \in L^2(A) \cap A$) в L^2-среднем (сильно к оператору в H). Если, в частности, A σ-конечна и конечна, μ — нормальный след и $\{x_\alpha,\ \alpha \in D\} \subset L^1(A)$, то x_α сходится в L^1-среднем к элементу $x \in L^1(A)$.

III. Пусть $p_1, p_2, \ldots,$ — попарно перестановочные проектирующие элементы. Отображение $x \to x^\varepsilon = x^{|p_1|p_2\ldots|p_n}$, где обозначено $x^{|p} = pxp + (1-p)x(1-p)$, есть условное ожидание по отношению к $A_{-n} = \{x^{\varepsilon_n},\ x \in A\}$, удовлетворяющее усло-

вию $I^{\varepsilon_n}=I$, и $\{x^{\varepsilon_n},\ n=1,2,\ldots\}$ есть убывающая простая M-сеть. Для $x\in L^2(A)\cap A$, $x^{\varepsilon_n}\in L_2(A)\cap A_{-n}$ и сильно сходятся к оператору $x_{-\infty}\in L^2(A)\cap A_{-\infty}$, где $A_{-\infty}=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{-n}$. М. А. Наймарк

9015. Представления слабо замкнутых алгебр. Фелл (Representations of weakly closed algebras. Fell J. M. G.), Math. Ann., 1957, 133, № 2, 118—126 (англ.)

Результат Капланского (Kaplansky I., Duke Math. J., 1952, 19, 219—222) относительно представлений алгебры ограниченных операторов в гильбертовом пространстве обобщен на случай вполне бесконечных AW^*-алгебр типа I.

Пусть I — двусторонний идеал в AW^*-алгебре A. Говорят, что A/I удовлетворяет условию счетности цепей, если не существует несчетного семейства проекций $\{e_\alpha\}$ таких, что $e_\alpha\notin I$ и $e_\alpha e_\beta\in I$ при $\alpha\neq\beta$. Полагая $I=(0)$, получаем соответствующее определение для A. Подалгебра вида eA, где e — центральная проекция, называется прямым слагаемым AW^*-алгебры A. $*$-представление R AW^*-алгебры A, действующее в гильбертовом пространстве H, называется представлением с прямыми слагаемыми (direct summand representation), если для всякого замкнутого инвариантного относительно R подпространства $K\subset H$ представление, индуцированное R на K, имеет своим ядром прямое слагаемое в A; $*$-представление R в H называется точно неприводимым (faithful-irreducible), если в H не существует такого замкнутого инвариантного подпространства K, что ядро сужения R на K совпадает с ядром R.

Теорема 2.4. Если A — вполне бесконечная AW^*-алгебра, а I — замкнутый двусторонний идеал в A такой, что A и A/I удовлетворяют условию счетности цепей, то I является прямым слагаемым.

Основной результат (теорема 4.5): Каждое $*$-представление R в сепарабельном пространстве вполне бесконечной AW^*-алгебры A типа I, удовлетворяющее условию счетности цепей, имеет (с точностью до унитарной эквивалентности) вид

$$R=\sum_{h\in D}\varphi(h)\,R(A;\ h),$$

где D — некоторое семейство попарно ортогональных (отличных от нуля) проекторов, с суммой равной единице; $\varphi(h)$ означает функцию, заданную на D и имеющую своими значениями кардинальные числа; $R(A;\ h)$ — точно неприводимое с прямыми слагаемыми представление алгебры A с ядром $(1-h)A$; символ $\varphi(h)R(A;\ h)$ означает прямую сумму $\varphi(h)$ экземпляров представления $R(A;\ h)$. В. Э. Лянце

9016. Изоморфизм унитарных групп в AW^*-алгебрах. Янь Ди (Isomorphism of unitary groups in AW^*-algebras. Yen Ti), Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 3, 275—280 (англ.)

Результат Сакаи (РЖМат, 1957, 5716), полученный им для AW^*-факторов, распространен на AW^*-алгебры, не содержащие компонент типа I_n.

Доказана теорема: Пусть M и N — две AW^*-алгебры, не содержащие компонент типа I_n; M_u, N_u — группы унитарных элементов соответственно алгебр M и N. Пусть ρ — равномерно непрерывный изоморфизм унитарных групп M_u и N_u. Изоморфизм ρ может быть расширен до суммы линейного и сопряженно-линейного изоморфизма алгебр M и N. В. Э. Лянце

9017. Функции положительного типа. Ионеску-Тулча (Fonctions de type positif. Ionescu Tulcea Cassius), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 19, 1389—1392 (франц.)

Известные теоремы о положительно определенных функциях на локально компактных группах переносятся (без доказательств) на положительно определенные функции на полугруппах, заключенных в локально компактных группах; при этом предполагается, что в полугруппе есть непрерывная операция $x\to x^+$, удовлетворяющая условиям: 1) $(x^+)^+=x$; 2) $(xy)^+=y^+x^+$; 3) A^+ есть локально нулевое множество, если A — локально нулевое множество (по отношению к сужению μ на полугруппу левоинвариантной меры на группе). Д. А. Васильков

9018. Структура одного класса представлений унитарной группы в гильбертовом пространстве. Сигал (The structure of a class of representations of the unitary group on a Hilbert space. Segal I. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 197—103 (англ.)

Пусть G — топологическая группа всех унитарных операторов в некотором гильбертовом пространстве H с сильной операторной топологией, $U\to\Gamma(U)$, $U\in G$ — непрерывное унитарное представление группы G в некотором другом гильбертовом пространстве K. Пусть $d\Gamma(A)$ (где A — самосопряженный оператор в H) обозначает самосопряженный оператор, порождающий однопараметрическую группу $\Gamma(e^{itA})$, $-\infty<t<\infty$. Представление $U\to\Gamma(U)$ называется физическим, если $d\Gamma(P)$ — неотрицательно определенный оператор для любого оператора проектирования P в H. Доказывается, что в этом случае оператор $d\Gamma(P)$, называемый автором числом частиц в PS, имеет только неотрицательные целочисленные собственные значения; последнее обстоятельство играет важную роль при корпускулярном представлении волновых полей.

Основной результат: Всякое непрерывное унитарное физическое представление группы G есть прямая ортогональная сумма ее неприводимых физических представлений. Каждое такое неприводимое представление унитарно эквивалентно некоторому представлению $U\to\Gamma_n(U)$, которое строится следующим образом: Пусть H_n — тензорное произведение n экземпляров пространства H; π — произвольный элемент симметрической группы $\sum_n$; $V_n(\pi)$ — унитарный оператор в H_n, однозначно определенный формулой $V_n(\pi)(x_1\otimes\ldots\otimes x_n)=x_{\pi(1)}\otimes\ldots\otimes x_{\pi(n)}$, $x_1,\ldots,x_n\in H$; Q — минимальный оператор проектирования в алгебре, порожденной операторами $V_n(\pi)$. Подпространство $L_n=Q_nS$ называется подпространством ковариантных тензоров максимального типа Q_n. Пусть $\tilde\Gamma_n(U)$ — унитарный оператор в H_n, однозначно определенный формулой $\tilde\Gamma_n(U)(x_1\otimes\ldots\otimes x_n)=Ux_1\otimes\ldots\otimes Ux_n$; тогда $\Gamma_n(U)$ есть сужение оператора $\tilde\Gamma_n(U)$ на L_n. М. А. Наймарк

9019. Группы положительных операторов. Дай, Филлипс (Groups of positive operators. Dye H. A., Phillips R. S.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 4, 462—486 (англ.)

В работе рассматриваются: X — локально компактное хаусдорфово пространство; $L(X)$ ($C_0(X)$) — алгебра непрерывных действительных функций на X с компактными носителями (соответственно равных нулю на бесконечности); P — совокупность непрерывных функций $p(x)$ на X таких, что $0<\inf p(x)$, $\sup p(x)<\infty$; G — некоторая группа (иногда топологическая); L_p — оператор умножения на $p(x)$: $(L_pf)(x)=p(x)f(x)$ ($x\in X$). Действие группы G на X есть представление группы G в группу гомеоморфизмов пространства X. Если G — топологическая группа, то действие $\sigma\to x\sigma$ ее на X непрерывно, когда отображение $(x,\sigma)\to x\sigma$ непрерывно по (x,σ). G действует на X эргодически, если всякая траектория $xG=\{x\sigma|\sigma\in G\}$ плотна в X. Поток группы G в $C_0(X)$

есть представление $\sigma \to T_\sigma$ группы G изометрическими преобразованиями пространства $C_0(X)$. Два представления $\{U_\sigma^{(1)}\}$, $\{U_\sigma^{(2)}\}$ группы G ограниченными положительными операторами в $L(X)$ P-эквивалентны, если $L_p U_\sigma^{(1)} L_p^{-1} = U_\sigma^{(2)}$, где $p \in P$. Мы имеем ограниченное положительное представление $\{U_\sigma\}$, если все U_σ положительны и равномерно ограничены. Пусть задано определенное действие $\sigma \to x\sigma$ G на X. Коцепь есть отображение $\theta(x, \sigma)$ группы G на P; коцикл есть коцепь, удовлетворяющая соотношению $\theta(x, \sigma\tau) = \theta(x\sigma, \tau)\,\theta(x, \sigma)$ ($Z^1(G, P)$ — группа коциклов); кограница есть коцепь вида $\theta(x, \sigma) = p(x)/p(x\sigma)$, где $p \in P$ ($B^1(G, P)$ — группа кограниц); коцикл ограничен, если $M^{-1} < \theta(x, \sigma) < M$. Сопряженным представлением к заданному сильно непрерывному представлению $\sigma \to U_\sigma$ группы G операторами в $C_0(X)$ называется представление $\sigma \to U_\sigma^0$ операторами в сопряженном пространстве $C_0(X)^*$, где $(U_\sigma^0 \lambda) f = \lambda(U_\sigma^{-1} f)$ (λ — ограниченный линейный функционал в $C_0(X)$), рассматриваемое совместно с подпространством $D(U_\sigma^0)$ тех $\lambda \in C_0(X)^*$, для которых отображение $\sigma \to U_\sigma^0 \lambda$ сильно непрерывно. Два сопряженных представления $\{U_\sigma^0, D(U_\sigma^0)\}$ и $\{V_\sigma^0, D(V_\sigma^0)\}$ эквивалентны, если существует ограниченное линейное преобразование W (с ограниченным обратным W^{-1}) пространства $C_0(X)^*$, такое, что $W^{-1} U_\sigma^0 W = V_\sigma^0$ для всех $\sigma \in G$.

Основные результаты работы:

1. Пусть $\sigma \to U_\sigma$ — представление G ограниченными положительными операторами U_σ в $C_0(X)$; тогда $U_\sigma = L_\theta T_\sigma$, где $\theta(x, \sigma) \in P$ и $\sigma \to T_\sigma$ есть поток, порожденный некоторым действием $\sigma \to x\sigma$ G на X, $(T_\sigma f)(x) = f(x\sigma)$; функции $\theta(x, \sigma)$ удовлетворяют условиям $\theta(x, \sigma\tau) = \theta(x\sigma, \tau)\,\theta(x, \sigma)$, $\theta(x, e) \equiv 1$. Если G — топологическая группа и представление $\sigma \to U_\sigma$ сильно непрерывно, то отображение $(x, \sigma) \to x\sigma$ $X \times C$ на X непрерывно и функция $\theta(x, \sigma)$ непрерывна на $X \times G$. Обратно, если заданы действие $\sigma \to x\sigma$ группы G на X и функция $\theta(x, \sigma)$, удовлетворяющая отмеченным условиям, то $\sigma \to L_\theta T_\sigma$, где $(T_\sigma f)(x) = f(x\sigma)$, есть сильно непрерывное представление G посредством операторов в $L(X)$ (в $C_0(X)$, если G локально компактна).

2. Если G действует на X эргодически, то всякий ограниченный коцикл из $Z^1(G, P)$ представляет собой кограницу.

3. Пусть X компактно, F — некоторая группа гомеоморфизмов пространства X и $\mathfrak{G}$ — группа операторов U в $L(X)$, положительных и ограниченных вместе с U^{-1} таких, что $U = L_p T_\sigma$, где $T_\sigma \in F$. Тогда группа автоморфизмов группы $\mathfrak{G}$ изоморфна полупрямому произведению $N(F) Z_{bd}$, где $N(F)$ изоморфно нормализатору F в группе всевозможных автоморфизмов X, а Z_{bd} изоморфна группе ограниченных коциклов в $Z^1(F, P)$.

4. Пусть $\sigma \to U_\sigma = L_\theta T_\sigma$ — сильно непрерывное ограниченное представление топологической группы G положительными операторами в $C_0(X)$. Если $\theta(x, \sigma) = p(x)/p(x\sigma)$, где $p \in P$ измерима на каждом множестве σ-кольца, порожденного компактными подмножествами X, то сопряженные представления $\{U_\sigma^0, D(U_\sigma^0)\}$ и $\{T_\sigma^0, D(T_\sigma^0)\}$ эквивалентны.

В приложении приводится пример двух однопараметрических сильно непрерывных групп операторов в комплексном $C_0(X)$ с производящими операторами A_1 и A_2 таких, что $D = D(A_1) \cap D(A_2)$ плотно в $C_0(X)$ и никакое продолжение оператора $A_1 + A_2$ (на D) не является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы.

Д. А. Васильков

9020. Почти периодические функции Безиковича на произвольных группах. Фёльнер (Besicovitch almost periodic functions in arbitrary groups. Følner Erling), Math. scand., 1957, 5, № 1, 47—53 (англ.)

Дается определение класса B^p-почти периодических функций на произвольной группе. Это определение не однозначно и основано на следующей лемме: Пусть G — произвольная бесконечная группа. Существует на G счетное число разделенных, симметричных подмножеств $E_1, E_2, \ldots$ таких, что для произвольного конечного числа элементов $a_1, \ldots, a_N$ из G и произвольного целого положительного числа h существует такой элемент $x \in G$, что $a_n x a_m \in E_h$ для $n, m = 1, \ldots, N$.

Для произвольной действительной функции $f(x)$, $x \in G$, и произвольного целого h положим

$$\bar{M}_h f = \inf_{\mathfrak{A}, B, C} \sup \sum_{n=1}^{N} \alpha_n f(x a_n y),$$

где $\mathfrak{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N;\ a_1, \ldots, a_N\}$, $\alpha_n > 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_N = 1$, $a_n \in G$,

$B = (b_1, \ldots, b_R)$, $b_r \in G$,

$C = (c_1, \ldots, c_R)$, $c_r \in G$

и sup берется по непустому множеству тех x, y, для которых все NR элементов $b_r x a_n y c_r$ принадлежат E_h. Далее, пусть

$$\bar{M}_B f = \overline{\lim_{h \to \infty}} \bar{M}_h f.$$

Теперь можно определить норму по Безиковичу. Именно для произвольного $p \geqslant 1$ и произвольной комплексной $f(x)$, $x \in G$ определим B^p-норму равенством

$$\|f\|_{B^p} = (\bar{M}_B |f|^p)^{1/p}.$$

Доказывается, что пространство всех комплекснозначных функций, определенных на G, с этой нормой полно.

Имея норму, можно определить B^p-почти периодическую (п. п.) функцию на G.

Функция $f(x)$, $x \in G$ называется B^p-п. п. на G, если существует последовательность многочленов вида

$$t(x) = \sum_{\nu=1}^{N} s^{(\nu)} \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\nu)} a_{\rho,\sigma} D^{(\nu)}_{\rho,\sigma}(x),$$

где матрицы $D^{(\nu)}(x) = (D^{(\nu)}_{\rho,\sigma}(x))$ порядков $s^{(\nu)}$ суть неприводимые, неэквивалентные представления группы G, которая B^p-сходится к $f(x)$. Отсюда при $p = 2$ получается теорема Рисса—Фишера: Ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} s^{(\nu)} \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\nu)} a_{\rho,\sigma} D^{(\nu)}_{\rho,\sigma}(x)$$

является рядом Фурье B^2-п. п. функции в том и только в том случае, если сходится ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} s^{(\nu)} \sum_{\rho,\sigma=1}^{s(\nu)} |a_{\rho,\sigma}|^2.$$

Б. М. Левитан

9021. О приближении абстрактных непрерывных функций неограниченными оператор-функциями. Зуховицкий С. И., Эскин Г. И., Докл. АН СССР, 1957, 116, № 5, 731—734

Теорема 1. Пусть на компакте Q задана оператор-функция, обладающая следующими свойствами: 1) $A(q)$ при каждом $q \in Q$ представляет собой замкнутый линейный оператор, действующий из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2 с плотной в H_1 и общей для всех $q \in Q$ областью определения D; 2) $A(q)x$ при каждом $x \in D$ является непрерывной функцией. Тогда для того чтобы для каждой непрерывной на Q функции $f(q)$ со значениями в H_2 существовал вектор $x_0 \in D$ такой, что функция $A(q)x_0$ наименее уклоняется на Q от непрерывной функции $f(q)$:

$$\inf_{x \in D} \max_{q \in Q} \| A(q)x - f(q)\|_2 = \max_{q \in Q} \| A(q)x_0 - f(q)\|_2,$$

необходимо и достаточно, чтобы $A(q)$ обладала следующим свойством:

$$\max_{q \in Q} \| A(q)x \|_2 \geqslant m \|x\|_1 \qquad (x \in D),$$

где $m > 0$.

Приведены примеры операторов (в частности, дифференциальных), удовлетворяющих условиям теоремы.

Теорема 2. Пусть $A(q)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и $\dim H_1 < \dim H_2$. Тогда для того чтобы для каждой непрерывной на Q функции $f(q)$ со значениями в H_2 существовала единственная наименее уклоняющаяся от нее на Q функция $A(q)x_0$, необходимо и достаточно, чтобы при $x = 0$ уравнение $A(q)x = 0$ не имело на Q ни одного корня.

В конце статьи сформулированы две теоремы, в которых даны условия существования и единственности функции наименьшего уклонения для случая, когда операторы $A(q)$ действуют из банахова пространства со слабо компактной сферой в другое банахово пространство. М. А. Красносельский

9022. Об одной теореме Борсука. Гранас (Über einen Satz von K. Borsuk. Granas A.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 10, 959—962, LXXX (чем.; рез. русск.)

Пусть непрерывное (вообще говоря, нелинейное) отображение f банахова пространства X в себя представимо в виде $f(x) = x + F(x)$, где F — вполне непрерывный оператор. Доказывается следующее предложение, обобщающее теорему Борсука (Borsuk K., Fundam. math., 1933, 21). Если существуют постоянные ε, $\eta > 0$ такие, что из неравенства $\|f(x_1) - f(x)_2\| < \eta$ $(x_1, x_2 \in X)$ вытекает неравенство $\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$, то пространство X переходит при отображении f само на себя, т. е. $f(X) = X$. Отмечается, что альтернатива Фредгольма для линейных вполне непрерывных операторов в банаховом пространстве является простым следствием этого предложения. С. Н. Крачковский

9023. К обобщению метода Ньютона. Альтман (On the generalisation of Newton's method. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 8, 789—795 (англ.; рез. русск.)

Обобщаются итерационный процесс Ньютона—Канторовича

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n)$$

для решения нелинейных уравнений $P(x) = 0$ в банаховых пространствах и некоторые результаты Л. В. Канторовича и И. П. Мысовского (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, 28, 104, 145), а также результаты автора (РЖМат, 1956, 7665; 1958, 3084).

Пусть $P(x)$ — нелинейный оператор из шара $S = \{x : \|x - x_0\| \leqslant r\}$ банахова пространства X в банахово пространство Y, дважды дифференцируемый по Фреше в каждой точке S. Пусть θ_x — пространство нулей производной Фреше $P'(x)$, т. е. множество всех решений z уравнения $P'(x)z = 0$, и X/θ_x — факторпространство. Предполагается, что для всякого $\mathfrak{z} \in X/\theta_x$ и любого $x \in S$ $\|\mathfrak{z}\| = \inf \|z\|$, $z \in \mathfrak{z}$, достигается на некотором векторе $z \in \mathfrak{z}$. Линейные операторы $P'(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, соответственно индуцируют в X/θ_n, где $\theta_n = \theta_{x_n}$, линейные операторы $\mathfrak{P}_n : \mathfrak{P}_n \mathfrak{x} = P'(x_n)x$ для всех $x \in \mathfrak{x}$, где $\mathfrak{x} \in X/\theta_n$. Для решения уравнения $P(x) = 0$ рассматривается следующий итерационный процесс: $\mathfrak{x}_1^{(0)} = \mathfrak{x}_0^{(0)} - \mathfrak{P}_0^{-1} P(x_0)$, где $x_0 \in \mathfrak{x}_0^{(0)}$ и $\mathfrak{x}_0^{(0)}$, $\mathfrak{x}_1^{(0)} \in X/\theta_0$, и выбирается такой элемент $x_1 \in \mathfrak{x}_1^{(0)}$, что $\|x_1 - x_0\| = \|\mathfrak{x}_1^{(0)} - \mathfrak{x}_0^{(0)}\|$. Если приближенные решения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определены, то полагается

$$\mathfrak{x}_{n+1}^{(n)} = \mathfrak{x}_n^{(n)} - \mathfrak{P}_n^{-1} P(x_n), \qquad (1)$$

где $x_n \in \mathfrak{x}_n^{(n)}$ и $\mathfrak{x}_{n+1}^{(n)}$, $\mathfrak{x}_n^{(n)} \in X/\theta_n$, и выбирается такой элемент $x_{n+1} \in \mathfrak{x}_{n+1}^{(n)}$, что $\|x_{n+1} - x_n\| = \|\mathfrak{x}_{n+1}^{(n)} - \mathfrak{x}_n^{(n)}\|$. Условия сходимости данного процесса к решению уравнения $P(x) = 0$ устанавливаются в следующих предложениях.

Теорема 1. Пусть выполнены условия: $\|[(P'(x_0))^*]^{-1}\| \leqslant B_0$, где $(P'(x_0))^*$ — оператор, сопряженный к $P'(x_0)$; $\|x_1 - x_0\| \leqslant \eta_0$; $\|P''(x)\| \leqslant K$ для всех $x \in S$; $h_0 = B_0 \eta_0 K \leqslant \frac{1}{2}$; $r = (1 - \sqrt{1 - 2h_0})\, h_0^{-1} \eta_0$. Тогда последовательность $\{x_n\}$, определенная процессом (1), сходится к решению $x^* \in S$ уравнения $P(x) = 0$, причем $\|x_n - x^*\| \leqslant 2^{-n+1} (2h_0)^{2^n - 1} \eta_0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия: $\|[(P'(x))^*]^{-1}\| \leqslant B$ для всех $x \in S$; $\|P(x_0)\| \leqslant \eta_0$; $\|P''(x)\| \leqslant K$ для всех $x \in S$; $h_0 = B^2 K \eta_0 < 2$; $r = HB\eta_0$, где $H = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-1} h_0)^{2^n - 1}$.

Тогда последовательность $\{x_n\}$, определенная процессом (1), сходится к решению $x^* \in S$ уравнения $P(x) = 0$, причем $\|x_n - x^*\| \leqslant r\,(2^{-1}h_0)^{2^n - 1}$. Отмечено, что в обеих теоремах существование второй производной можно заменить требованием, чтобы первая производная удовлетворяла условию Липшица.

М. М. Вайнберг

9024. Однопараметрические полугруппы отображений. Хаффорд (One-parameter semi-groups of maps. Hufford George), Duke Math. J., 1957, 24, № 3, 443—453 (англ.)

Пусть E — компакт, а C — банахова алгебра (нормированное кольцо) всех непрерывных вещественных функций на E.

Векторным полем на E называется замкнутый линейный оператор Ω, действующий в C, определенный на плотной в C подалгебре $D(\Omega)$, обладающий свойством

$$\Omega(fg) = f \cdot \Omega g + \Omega f \cdot g \qquad (f, g \in D(\Omega)).$$

Оказывается, что область определения $D(\Omega)$ содержит функции $\varphi(x)$, разделяющие любые два замкнутые непересекающиеся множества A и B ($\varphi(x) = 1$ при $x \in A$, $\varphi(x) = 0$ при $x \in B$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$). Оператор Ω носит локальный характер.

Пусть $u_t(x)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ — полугруппа непрерывных отображений E в себя, а T_t — полугруппа линейных операторов на C, определяемая формулой

$$T_t f(x) = f(u_t(x)). \qquad (1)$$

Основной является теорема: Если $u_t(x) \to x$ при $t \to 0$ и любых $x \in E$, то полугруппа T_t сильно непрерывна, а ее производящий оператор Ω является векторным полем. Обратно, если вектор Ω есть векторное поле и является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы T_t операторов в C, то эта полугруппа определяется формулой (1), где $u_t(x)$ — полугруппа отображений E в себя, причем $u_t(x)$ является функцией, непрерывной по совокупности переменных t и x.

Приводятся достаточные условия для того, чтобы векторное поле было оператором типа Хилле—Иосида ($\|(\Omega - \lambda I)^{-1}\| \leqslant 1/\lambda$, $\lambda > 0$). Рассматривается случай, когда топологическое пространство E не является компактным. С. Г. Крейн

9025. О потоках преобразований с инвариантной мерой. Ламперти (On flows of measure-preserving transformations. Lamperti John), Michigan Math. J., 1957, 4, № 2, 161—164 (англ.)

Пусть T — автоморфизм единичного отрезка, т. е. его взаимно однозначное преобразование, оставляющее инвариантной меру Лебега. Автоморфизм S называется корнем n-й степени из T, если $S^n = T$. Говорят, что T можно включить в поток, если существует такой поток (т. е. однопараметрическая группа автоморфизмов S_t, $-\infty < t < \infty$, $S_{s+t} = S_s \cdot S_t$, удовлетворяющая обычному условию непрерывности), что $S_1 = T$.

В дальнейшем T предполагается эргодическим автоморфизмом с чисто точечным спектром. Мультипликативная группа его собственных значений обозначается через $\mathrm{Sp}(T)$.

Теорема 1. Для существования корня n-й степени из T необходимо и достаточно, чтобы в $\mathrm{Sp}(T)$ не было корней n-й степени из единицы, кроме 1.

Для случая $n = 2$ эта теорема была получена Халмошем (Halmos P. R., Amer. J. Math., 1942, 64, 153 — 166).

Теорема 2. Автоморфизм T в том и только в том случае можно включить в поток, если $\mathrm{Sp}(T)$ можно включить в подгруппу мультипликативной группы комплексных чисел, по модулю равных 1, не содержащую -1 и вместе с каждым числом $z \in \mathrm{Sp}(T)$ содержащую последовательность $z_1, z_2, \ldots$ такую, что $z_0 = z$, $z_n^2 = z_{n-1}$, $z_n \to 1$.

В частности, в поток можно включить всякий автоморфизм T, у которого $\mathrm{Sp}(T)$ обладает независимой системой образующих (например, имеет конечную систему образующих и не содержит элементов конечного порядка).

Приводится пример автоморфизма T, имеющего корни всех степеней, который нельзя включить в поток. Л. М. Абрамов

9026. Интегрирование по гильбертову пространству и его расширению. Фридрихс, Шапиро (Integration over Hilbert space and outer extensions. Friedrichs K. O., Shapiro H. N.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 4, 336—338 (англ.)

В заметке определяется конструкция интеграла по сепарабельному пространству $\mathcal{H}$ Гильберта и по некоторому расширению этого пространства. Функция $f(x)$ элементов гильбертова пространства называется цилиндрической с основанием в конечномерном пространстве E, если для любого $x \in \mathcal{H}$ имеет место $f(P_E x) = f(x)$, где P_E — проектор на E. Для цилиндрических функций с основанием в E интеграл определяется так:

$$I_{\mathcal{H}}(f) = \int_E f(P_E x)\, d\mu_E,$$

где $d\mu_E$ — гауссова мера в пространстве E

$$d\mu_E = \sqrt{\left(\frac{a}{\pi}\right)^n}\, e^{-a\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)}\, dx_1 \ldots dx_n, \quad a > 0,$$
$$n = \dim E.$$

Функция $f(x)$ называется инвариантной при некотором фиксированном $\alpha \geqslant 1$, если: а) при любом ортонормированном базисе в $\mathcal{H}$ $I_{\mathcal{H}}(|f(P_n \cdot)|^\alpha)$ существует и последовательность $\{f(P_n x)\}$ фундаментальна в метрике $\|f\| = \{I_{\mathcal{H}}(|f|^\alpha)\}^{1/\alpha}$ (P_n — проектор на n-мерное пространство, определяемое первыми n элементами базиса).

б) для любых двух ортонормированных базисов

$$\lim_{m,\, n \to \infty} I_{\mathcal{H}}(|f(P_n \cdot) - f(Q_m \cdot)|^\alpha) = 0$$

(P_n и Q_m — проекторы, соответствующие этим базисам).

Все интегрируемые цилиндрические функции инвариантны. Для любой инвариантной функции интеграл определяется так:

$$\int_{\mathcal{H}} |f(x)|^\alpha\, d\mu_{\mathcal{H}} = \lim_{n \to \infty} I_{\mathcal{H}}(|f(P^n \cdot)|^\alpha).$$

Мера, связанная с введенным интегралом, не вполне аддитивна. Однако, пространство $\mathcal{H}$ можно расширить до пространства W, называемого короной $\mathcal{H}$, и введенную меру можно продлить до вполне аддитивной меры на W. На W можно также определить проекторы P_n и при этом $P_n W \subset \mathcal{H}$. Инвариантную при $\alpha = 1$ функцию $f(x)$ можно единственным образом продлить до функции $\hat{f}(x)$ на W так, что справедливы соотношения

$$\hat{f}(P_n x) = f(P_n x),$$
$$\lim_{n \to \infty} \int_W |\hat{f}(x) - \hat{f}(P_n x)|\, d\mu_W = 0,$$
$$\int_W \hat{f}(x)\, d\mu_W = \int_{\mathcal{H}} f(x)\, d\mu_{\mathcal{H}}.$$

Ю. И. Гросберг

См. также: 8754, 8755, 8763, 8766, 8789, 8793, 8836, 8838—8841, 8843—8846, 8858, 8862, 8913, 8981, 9028

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

9027. К «Закону больших чисел». Устименко (До «Закону великих чисел». Устименко М. П.), Наук. зап. Херсонськ. держ. пед. ін-т, 1956, вип. 7, 37—41 (укр.)

Доказывается теорема: Для произвольной последовательности случайных величин $\{z_s\}$ можно указать положительную монотонно возрастающую функцию $\theta(n)$, обладающую свойством: для любого $\varepsilon > 0$

$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\sum_1^n z_s\right| < \varepsilon\theta(n)\right) = 1$. Работа изобилует опечатками. А. А. Бобров

9028. Случайные функции и теоремы о предельных распределениях. Колмогоров, Прохоров (Zufällige Funktionen und Grenzverteilungssätze. Kolmogoroff Andrej, Prochorow Juri), Ber. Tagung. Wahrscheinlichkeitsrechnung und math. Statistik, Berlin, 1954, Berlin, 1956, 113—126 (нем.)

Обзор основных результатов, относящихся к основаниям теории случайных функций и к применению ее и методов функционального анализа для получения предельных теорем.

В § 1 даются основные определения относительно распределения вероятностей в топологических пространствах произвольной природы. В §§ 2 и 3 излагается два подхода к определению понятия случайной функции — при помощи конечномерных распределений и распределения вероятностей в функциональном пространстве — и связь между ними. В § 4 определяется слабая сходимость распределений в метрическом пространстве и формулируются различные критерии компактности и сходимости множества распределений. В § 5 вводится понятие характеристического функционала и указываются его свойства. В § 6 излагаются методы и основные результаты о сходимости распределений различных функционалов от последовательности сумм независимых слагаемых к распределению соответствующего функционала от винеровского процесса и указывается применение этих методов к важной для статистики проблеме о сходимости эмпирических распределений к теоретическому.

В. А. Волконский

9029. Марковские процессы входа и выхода. Мустафа (Input-output Markov processes. Moustafa M. D.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, A60, № 1, 112—118; Indagationes math., 1957, 19, № 1, 112—118 (англ.)

Рассматриваются бесконечные стохастические матрицы

$$B = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \dots \\ 0 & b_0 & b_1 \dots \\ 0 & 0 & b_0 \dots \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots \end{bmatrix},$$

причем $a_{ii} > 0$.

Простой процесс входа и выхода определяется матрицей $C = {}'A \cdot B$, где ${}'A$ — матрица, элементы которой a_{ij} связаны с элементами a_{ij} матрицы A следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ii-j} & \text{для } j \leqslant i, \\ 0 & \text{для } j > i. \end{cases}$$

Сложный процесс входа или выхода определяется матричным произведением $E = B \cdot {}'A$. Выводятся условия, достаточные для эргодичности этих процессов.

Т. А. Сарымсаков

9030. О распределении вероятностей в упорядоченных топологических пространствах. Ревю (Sur les répartitions de probabilités dans les espaces topologiques ordonnés. Revuz André), J. math. pures et appl., 1957, 36, № 2, 147—153 (франц.)

Приложение общих результатов автора о мерах в упорядоченных топологических пространствах (РЖМат, 1957, 7184) к теории вероятностей. Сформулировав основной результат предыдущей работы, автор использует его для обобщения теоремы Колмогорова об определении меры в бесконечномерном пространстве по ее конечномерным проекциям.

Упорядоченное топологическое пространство X предполагается полуструктурой (т. е. для любой пары xy существует $\inf xy$). Указывается что, по функции распределения $F(x)$, заданной на подмножестве $U \in X$, можно построить меру μ на X так, что

$$\mu[C_-(x)] = F(x) \quad (C_-(x) = \{y : y \in X,\ y < x\},\ C_+(x) = \{y : y \in X,\ y > x\}),$$

если U — само полуупорядоченно, $C_-(x)$ компактно для $x \in U$, $\inf xy$ непрерывна на U справа, во всякой правой полуокрестности $x \in U$ найдется такая точка $y \in U$, что $C_-(x)$ лежит строго внутри $C_-(y)$, и для любого набора $\{x, u_1, \dots, u_n\} - (n+1)$ элементов из U

$$\Delta(s) = F(x) - \sum F(\inf xu_i) + \dots$$

$$\dots + (-1)^p \sum F(\inf x, u_{i_1}, \dots, u_{i_p}) +$$

$$+ (-1)^n F(\inf x, u_1, \dots, u_n).$$

Если U всюду плотно, то функцию $F(x)$ можно единственным образом продолжить на X.

Н. В. Гирсанов

9031. Приближенные значения вероятности для наблюденного числа «успехов» в статистически независимых биномиальных испытаниях с неравными вероятностями. Уолш (Approximate probability values for observed number of «successes» from statistically indpendent binomial events with unequal probabilities. Walsh John E.), Санкия, Indian J. Statist., 1955, 15, № 3, 281—290 (англ.)

Задаются число событий и вероятности «успеха» для каждого события. Задача заключается в определении вероятности того, что наблюденное число «успехов» принадлежит данному множеству значений. В частном случае, когда каждое событие имеет одну и ту же вероятность «успеха», дело сводится к известному применению биномиального распределения. Основная часть работы посвящена выводу приближенного выражения для вероятности того, что наблюденное число «успехов» лежит между двумя данными числами. Если число событий достаточно велико, то оцениваются различные асимптотические приближения к вероятностному распределению наблюденного числа «успехов».

Если варьировать вероятности событий в известных пределах, чтобы верхняя граница изменения была не слишком велика, то искомую вероятность числа «успехов» можно с приемлемой точностью оценить, исходя из знания среднего значения вероятностей событий и границ изменения этих вероятностей. Б. М. Клосс

9032. Суммы независимых усеченных случайных величин. Шапиро (Sums of independent truncated random variables. Shapiro J. M.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 754—761 (англ.)

Рассматриваются последовательности серий независимых (в каждой серии) и равномерно бесконечно малых случайных величин x_{nk}, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $n = 1, 2$; такая последовательность серий $\{x_{nk}\}$ называется усеченной системой, если существует $b > 0$, не зависящее от k и n, для которого $P\{|x_{nk}| > b\} = 0$.

Теорема. Пусть $\{x_{nk}\}$ является усеченной системой, если при $n \to \infty$ существует предельная функция распределения $F(x)$ для последовательности $F_n(x) = P\{n_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nk_n} < x\}$, то $F(x)$ имеет конечные моменты всех порядков и при этом справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k eF(x)$$

для любого натурального k. А. А. Бобров

9033. Усиленная предельная теорема для гауссовских поцессов. Бакстер (A strong limit theorem for Gaussian processes. Baxter Glen), Proc Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 3, 522—527 (англ.)

Рассматривается гауссовский случайный процесс $x(t)$ на отрезке $[0, 1]$ с математическим ожиданием $m(t)$ и нормированной корреляционной функцией $r(s, t)$, обладающий тем свойством, что $m(t)$ имеет ограниченную производную, а $r(s, t)$ непрерывна при $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ и имеет равномерно ограниченные производные при $s \neq t$. Доказывается, что с вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left[x\left(\frac{k}{2^n}\right) - x\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right]^2 = \int_0^1 f(t)\,dt,$$

где

$$f(t) = D^+(t) - D^-(t),$$

$$D^+(t) = \lim_{s\to t+0} \frac{r(t, t) - r(s, t)}{t - s},$$

$$D^-(t) = \lim_{s\to t-0} \frac{r(t, t) - r(s, t)}{t - s}.$$

В частности, для винеровского процесса указанный выше предел равен единице, что было установлено Леви (Levy P., Amer. J. Math. 1940, 62, 487—500) и Камероном и Мартином (Cameron R. H., Martin W. T., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 130—137).

М. И. Ядренко

9034. Решение однородного интегрального уравнения Винера—Хопфа, встречающегося при разложении случайной функции стационарного процесса второго порядка. Юла (The solution of a homogeneous Wiener—Hopf integral equation occurring in the expansion of second-order stationary random functions. Youla D. C.), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, 3, № 3, 187—193 (англ.)

Во многих приложениях теории вероятностей к проблемам оценки и обнаружения случайных функций встречается интегральное уравнение вида $\varphi(x) = \lambda \int_0^T K(x-y)\varphi(y)\,dy$, $0 \leqslant x \leqslant T$, где $K(x)$ — функция ковариации непрерывного стационарного процесса второго порядка, обладающего абсолютно непрерывной спектральной плотностью. Дается способ нахождения собственных значений и собственных функций в специальном, но практическом случае, когда преобразование Фурье от $K(x)$ является рациональной функцией от ω^2, т. е. $K(x) = G(s^2) = N(s^2)/D(s^2)$, $s = i\omega$, где $N(s^2)$ и $D(s^2)$ — полиномы от s^2. Элементарными методами легко показать, что решения даются в форме $\varphi(x) = \sum_r C_r e^{-\alpha_r x} \cos(\beta_r x + v_r)$, причем константы $C_r, \alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ связаны между собой интегральным уравнением. Проблема приобретает сложность именно из-за трудности вычисления этих параметров. Результаты этой статьи сводят работу по вычислению этих параметров к несократимому минимуму, а именно — к решению трансцендентного уравнения. Резюме автора

9035. Характеристическое свойство нормального распределения в гильбертовом пространстве. Прохоров Ю. В., Фиш М., Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 4, 475—477 (рез. англ.)

Если f — линейный функционал в гильбертовом пространстве H, то говорят, что случайный элемент ξ в H имеет нормальное распределение, если действительные случайные величины (f, ξ), $f \in H$, имеют нормальное распределение. Математическим ожиданием ξ называется такой элемент $M\xi \in H$, что для любого $f \in H$

$$M(f, \xi) = (f, M\xi).$$

Авторы ограничиваются рассмотрением случайных элементов ξ, для которых выполняются следующие условия: 1) $M\|\xi\|^2 < \infty$; 2) $M(f, \xi)^2 > 0$ для любого ненулевого $f \in H$; 3) математическое ожидание ξ, существование которого следует из 2), равно нулю. Для таких случайных величин доказывается следующая теорема, являющаяся распространением известной теоремы Полиа на случайные элементы в гильбертовом пространстве.

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — случайные элементы в H, имеющие одинаковое распределение, причем ξ_1 и ξ_2 независимы, а величины $\xi_1 + \xi_2$ и $A\xi_3$ одинаково распределены (A есть линейный ограниченный самосопряженный положительный оператор в H). Тогда распределение каждого из случайных элементов ξ_i нормально и $A = \sqrt{2}E$, где E — единичный оператор.

Б. М. Клосс

9036. Распределения процесса Винера, подчиняющегося закону «арксинуса» Бакстер (Wiener process distributions of the «arcsine law» type. Baxter Glen), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 738—741 (англ.)

Под процессом Винера понимается стохастический процесс Гаусса $\{x(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ со средней функцией $E\{x(t)\} = 0$ и функцией ковариации $E\{x(s)x(t)\} = \min\{s, t\}$, где выборочные кривые процесса — непрерывные функции на интервале $[0, T]$ и стремящиеся к нулю в точке 0. Мера Лебега на интервале $[0, T]$ обозначается через $m(\ldots)$.

Закон арксинуса Эрдёша и Каца утверждает, что

$$P\{m(s \in [0, T] : x(s) > 0) \leqslant t\} = \frac{2}{\pi} \arcsin (t/T)^{1/2}.$$

Посредством вычисления функции распределения величины $m(s \in [0, T] : x(s) > as)$ для любого неотрицательного a получено обобщение этого результата. Также вычисляется плотность вероятности как функции от T, представляющая собою первое время T, когда функционал $m(s \in [0, T] : x(s) > as)$ принимает заданное значение t. Наконец, рассматривается случай, когда T бесконечно. Показывается, что усиленный закон больших чисел для процесса Винера вытекает из обычного закона больших чисел.

Резюме автора

9037. Условно устойчивые законы вероятностей. Гулотта (Leggi di probabilità condizionatamente stabili. Gulotta Beniamino), Giorn. Ist. ital. attuari, 1956, 19, 22—30 (итал.)

Одномерный закон распределения вероятностей $\mathfrak{L}_1$ называется условно устойчивым, если существует по крайней мере один n-мерный закон L_n, определенный для каждого n и обладающий свойством: если n-мерный случайный вектор $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ подчиняется L_n, то каждая компонента X_r и любая их линейная комбинация $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n$ $\left(\lambda_i \geqslant 0, \sum_1^n \lambda_i > 0\right)$ подчиняются закону типа $\mathfrak{L}_1$; при этом закон $\mathfrak{L}_1$ называется условно устойчивым относительно L_n.

Всякий устойчивый закон $\mathfrak{L}_1$ (имеющий функцию распределения $\Phi(x)$), является также условно устойчивым относительно $L_n \equiv \mathfrak{L}_1^n$ (имеющим функцию распределения $\Phi(x_1)\Phi(x_2)\ldots\Phi(x_n)$). Однако существуют условно устойчивые законы, которые не являются устойчивыми. Строится пример закона $\mathfrak{L}_1$, условно устойчивого относительно двух и большего числа законов $L_n', L_n'', \ldots$ различных типов (при $n > 1$).

В заключение выводятся условия (необходимые и достаточные) для того, чтобы для данного n-мерного

закона L_n, определенного для любого натурального n, существовал закон $\mathfrak{L}_1$, условно устойчивый относительно него. А. А. Бобров

9038. Эргодические свойства некоторых цепей с полными связями. Чуку (Proprietăți ergodice alle unor lanțuri cu legături complete. Ciuci George), Studii și cercetări mat. Acad. RPR, 1957, 8, № 3-4, 413—446 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказательство ряда свойств цепей с полными связями. В первой главе исследуется некоторая категория цепей с полными связями, со счетным множеством возможных состояний, которые автор называет цепями типа (B).

Сначала доказывается, при естественных условиях, что вероятности перехода $P_A^n(c)$, соответствующие цепи рассматриваемой категории, стремятся при $n \to \infty$ к пределу, не зависимому от начального пути c. Получаются также точные оценки разности $P_A^n(c) - P_A$, примененные во второй части первой главы.

Далее для последовательности случайных переменных $\{f_n\}$, $1 \leqslant n < \infty$, образующих цепь с полными связями, доказывается теорема Гаусса—Лапласа,

$$P\left(\frac{f_1 + \ldots + f_n}{\sigma\sqrt{n}} < a\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Во второй главе исследуются цепи с полными связями, для которых множества возможных состояний представляют собой компактные метрические пространства и для которых вероятности перехода $P^n(c, A)$ могут быть выражены плотностями $\varphi^n(c, x)$.

Пользуясь различными эргодическими теоремами, действительными для компактных операторов, автор получает спектральное представление плотностей $\varphi^n(c, x)$, что дает возможность немедленно получать эргодические свойства этих плотностей, а следовательно, и вероятностей $P^n(c, A)$.

В заключение вводится новая категория цепей с полными связями с плотностями и доказывается для этих цепей эргодическая теорема, соответствующая теореме, доказанной в первой главе для цепей со счетным множеством состояний. Резюме автора

9039. О некоторых процессах с ожиданием. Хомма (On a certain queuing process. Homma Tsuruchiyo. Rept Statist. Appl. Res. Univ. Japan. Sci. Engrs, 1955, 4, 14—32) (англ.)

Рассматриваются свойства эргодичности, нуль-возвратности и переходности без каких-либо предположений о времени обслуживания. J. Wolfowitz

Из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 636.

9040. Асимптотическое свойство плотностей одной непрерывной во времени цепи Маркова. Раду (O proprietate asimptotică a densităților unui lanț Markov continuu în timp. Radu N. C.), Comun. Acad. RPR, 1957, 7, № 11, 929—932 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается эргодическая теорема, относящаяся к переходным плотностям, соответствующим непрерывной цепи Маркова. Резюме автора

9041. Нерассеивающиеся цепи Маркова. Молдон (On non-dissipative Markov chains. Mauldon J. G.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, 53, № 4, 825—835 (англ.)

Рассматриваются однородные цепи Маркова со счетным множеством возможных состояний.

Пусть

$$g_{ij}^n = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} p_{ij}^r \qquad \mathfrak{A}_{ij} = \lim_{n\to\infty} q_{ij}^n,$$

где p_{ij}^r — вероятности перехода за r шагов из состояния i в состояние j.

Цепь Маркова (или стохастическая матрица) называется нерассеивающейся, если $\sum_{j=0}^{\infty} \mathfrak{A}_{ij} = 1$ для всех i. Пусть $\mathbf{w} = [w_i]$ — произвольный неотрицательный вектор, т. е. $w_i \geqslant 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Определим вектор $\mathbf{c}$ следующим образом: $\mathbf{c} = (P - I)\,\mathbf{w}$, где P — стохастическая матрица с элементами p_{ij}, а I — единичная матрица.

Основные результаты статьи формулируются в форме следующих теорем:

Теорема 1. Если существует неотрицательный вектор $\mathbf{w}$ такой, что $c_i < \infty$ для всех i и $\limsup_{i\to\infty} c_i < 0$, то P является нерассеивающейся.

Теорема 2. Если существует неотрицательный вектор $\mathbf{w}$ такой, что $c_i < \infty$, каково бы ни было нулевое состояние i, и $\lim_{i\to\infty} \sup c_i < 0$, то P нерассеивающаяся.

Приводятся примеры, показывающие, что условия теоремы 2 являются в известном смысле необходимыми.

Кроме того, формулируются условия, достаточные для того, чтобы матрица не была нерассеивающейся. Т. А. Сарымсаков

9042. Одна характеристика процесса Пуассона. Реньи (A Poisson-folyamat egy jellemzése. Rényi Alfréd), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956 (1957), 1, № 4, 519—527 (венг.; рез. русск., англ.)

Рассмотрим некоторый рекуррентный процесс, т. е. такой стохастический процесс, который состоит из событий, происходящих в случайные моменты времени $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < \ldots$, где положительные случайные величины $\delta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ независимы и имеют одинаковую функцию распределения $F(x)$. Рекуррентный процесс есть процесс Пуассона, если $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x \geqslant 0$, где $\lambda > 0$. Если существует $a = \int_0^\infty x\,dF(x)$, то величина $\lambda = 1/a$ называется плотностью процесса. В настоящей работе рассматривается следующее преобразование рекуррентных процессов: первый шаг есть контракция процесса, т. е. замена моментов τ_n на $q\tau_n$, где $0 < q < 1$. С помощью этого преобразования плотность увеличивается от λ до λ/q. Исходная плотность процесса восстанавливается на втором шаге, разрежении. Это достигается исключением определенных событий; исключение производится так, что каждое событие процесса исключается с вероятностью p и остается без изменения с вероятностью $q\,(p = 1 - q)$; исключение (соответственно неисключение) некоторого события не зависит от исключения (соответственно неисключения) другого события. Через T_q обозначается преобразование, состоящее из последовательного проведения указанных шагов. Показывается, что если преобразование T_q применяется к некоторому рекуррентному процессу, снова получается рекуррентный процесс, но функция распределения расстояния следующих друг за другом событий переходит из $F(x)$ в

$$F(x, q) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} q F_n\left(\frac{x}{q}\right),$$

где $F_1(x) = F(x)$ и $F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-t)\,dF(t)$, $n = 2, 3, \ldots$

Полагая $T_q(F(x)) = F(x, q)$, T_q может рассматриваться как преобразование, определенное на множестве распределений случайных величин. Легко показать, что

$T_{q_1}T_{q_2}=T_{q_1q_2}$ (лемма 1) и что показательные распределения инвариантны по отношению к каждому преобразованию T_q. В работе доказывается, что не существует других инвариантных распределений, т. е. если $T_q(F(x))=F(x)$ для какого-либо $q\,(0<q<1)$, то $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ при $x\geqslant 0$ с некоторым $\lambda>0$. Показывается далее, что если $F(x)$ есть любая функция распределения с конечным математическим ожиданием

$$a=\int_0^\infty x\,dF(x),$$

то $T_0(F(x))=\lim_{q\to 0}T_q(F(x))=1-e^{-\lambda x}$ при $x\geqslant 0$, где $\lambda=1/a$. Отсюда следует (теорема 3), что если рассматривать любой рекуррентный процесс с положительной плотностью событий и последовательно применять преобразования $T_{q_n}\,(n=1,\,2,\ldots)$, где $0<q_n<1$ и $\lim_{n\to\infty}q_1q_2\ldots q_n=0$, то процесс стремится к некоторому процессу Пуассона с той же плотностью.

Если плотность исходного процесса равна нулю, то этот процесс не ведет к цели. Однако с помощью примера показывается, что, изменяя преобразование так, что контракция и разрежение применяются в разной мере, рекуррентный процесс с плотностью, равной нулю, в пределе может быть преобразован в процесс Пуассона. Резюме автора

9043. Дифференциальные уравнения процессов рождения и смерти и проблема моментов Стильтьеса. Карлин, Мак-Грегор (The differential equations of birth-and-death processes, and the Stieltjes moment problem. Karlin S., McGregor J. L.), Trans. Amer. Math. Soc,, 1957, 85, № 2, 489—546 (англ.)

Рассматриваются прямые и обратные дифференциальные уравнения процессов рождения и смерти

$$P'(t)=P(t)A,\quad P'(t)=AP(t),\quad t\geqslant 0 \qquad (1)$$

при начальных условиях $P(0)=I$, где $P(t)=\|P_{ij}(t)\|$ $(i,j=0,1,2,\ldots)$ — матрица переходных вероятностей, I — бесконечная единичная матрица, $A=\|a_{ij}\|$ $(i,j=0,1,2,\ldots)$, a_{ij} равно λ_i, μ_i, $-(\lambda_i+\mu_i)$, когда j равно соответственно $i+1$, $i-1$, i, и равно 0 при $|j-i|>1$; $\lambda_i\geqslant 0$ $(i\geqslant 0)$, $\mu_i>0$ $(i\geqslant 1)$, $\mu_0\geqslant 0$.

Определим последовательность полиномов $Q_n(x)$ из рекуррентных соотношений $Q_0(x)\equiv 1$, $-xQ_0(x)=-(\lambda_0+\mu_0)Q_0(x)+\lambda_0Q_1(x)$, $-xQ_n(x)=\mu_nQ_{n-1}(x)-(\lambda_n+\mu_n)Q_n(x)+\lambda_nQ_{n+1}(x)$ $(n\geqslant 1)$. Существует, по крайней мере, одна положительная регулярная мера $\psi(x)$, $0\leqslant x<\infty$, с вариацией 1 и с бесконечным множеством точек роста, такая что полиномы $Q_n(x)$ являются ортогональными относительно ψ и

$$\int_0^\infty Q_i^2(x)\,d\psi(x)=\pi_i^{-1},\quad \pi_0=1,\quad \pi_i=\lambda_0\lambda_i\ldots\lambda_{i-1}(\mu_1\ldots\mu_i)^{-1}\quad (i\geqslant 1).$$

Такая мера ψ называется решением проблемы моментов Стильтьеса (S). Не обязательно положительная мера ψ с теми же моментами называется решением ограниченной вариации проблемы моментов Стильтьеса (BVS). Аналогично, положительная (не обязательно положительная) мера на $-\infty<x<\infty$ с теми же моментами называется решением (ограниченной вариации) проблемы моментов Гамбургера (H, BVH).

Если ψ — решение проблемы моментов BVH, при некотором a $\psi(x)=0$, когда $x<a$, и интегралы $\int_{-\infty}^{\infty}x^n d\psi(x)$ $(n=0,\,1,\ldots)$ сходятся абсолютно, то

$$P_{ij}(t,\,\psi)=\pi_j\int_{-\infty}^{\infty}e^{-xt}Q_i(x)\,Q_j(x)\,d\psi(x)$$

являются аналитическими функциями при $\mathrm{Re}\,t>0$, непрерывными при $\mathrm{Re}\,t\geqslant 0$, и удовлетворяют уравнениям (1). Таких мер существует бесконечно много. При этом, если ψ и ψ_1 — две такие меры и для некоторых i, j и всех t из некоторого интервала $P_{ij}(t,\psi)=P_{ij}(t,\psi_1)$, то $\psi=\psi_1$.

Существует бесконечно много матриц $P(t)$, удовлетворяющих (1). Рассматриваются дополнительные условия, при которых $P_{ij}(t)\geqslant 0$, сумма каждой строки матрицы $P(t)$ не превосходит 1 и имеет место уравнение Колмогорова—Чэпмена $P(t+s)=P(t)P(s)$. Отметим некоторые из полученных результатов.

Если ψ — решение проблемы моментов S, удовлетворяющее при $\mu_0>0$ дополнительному условию $\int_0^\infty x^{-1}\,d\psi(x)\leqslant\mu_0^{-1}$, то для всех i и $t>0$ ряды $\sum_{j=0}^\infty P_{ij}(t,\,\psi)=f_i(t,\,\psi)$, а также ряды, полученные из них почленным дифференцированием конечное число раз, сходятся равномерно на каждом конечном интервале $0\leqslant t\leqslant T$; $0<f_i(t,\,\psi)\leqslant 1$ при $\mu_0=0$, $0<f_i(t,\,\psi)<1$ при $\mu_0>0$.

Решение ψ проблемы моментов H называется экстремальным, если для всех $f\in L_2(\psi)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,d\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)Q_n(x)\,d\psi(x)\right|^2$$

Если ψ — решение проблемы моментов H, $\psi(x)=0$ при $x<a$, то $P(t,\,\psi)$ удовлетворяет уравнению Колмогорова—Чэпмена тогда и только тогда, когда ψ экстремально.

Если $\mu_0=0$, то следующие утверждения являются эквивалентными: 1) существует только одна матрица $P(t)$, удовлетворяющая (1) и такая, что для некоторого $M\geqslant 1$, всех $t\geqslant 0$ и всех i, n выполнено неравенство $\left|\sum_{j=0}^n P_{ij}(t)\right|\leqslant M$, 2) решение проблемы моментов S единственно, 3) ряд $\sum_{n=0}^\infty(\pi_n+\lambda_n^{-1}\pi_n^{-1})$ расходится. Последнее условие, когда $\mu_0>0$, является необходимым и достаточным для того, чтобы существовала единственная матрица $P(t)$, удовлетворяющая уравнениям (1) и условиям $P_{ij}(t)\geqslant 0$ $(i,j=0,1,\ldots)$, $\sum_{j=0}^\infty P_{ij}(t)\leqslant 1$ $(i=0,\,1,\ldots)$.

Указываются условия, при которых

$$\sum_{j=0}^\infty P_{ij}(t)=1\quad(i=0,\,1,\ldots).$$

Рассматривается метод приближения к решениям (1) решениями конечной системы дифференциальных уравнений, которые получаются из (1) заменой матрицы A матрицей порядка $n\times n$, составленной из n^2 элементов, стоящих в левом верхнем углу матрицы A.

Частные результаты были опубликованы авторами ранее (РЖМат, 1957, 7194). И. П. Кубилюс

9044. Вычисление эргодической проекции для цепей и процессов Маркова со счетным числом состояний. Кендалл, Рёйтер (The calculation of the ergodic projection for Markov chains and processes with a contable infinity of states. Kendall David G., Reuter G. E. H.), Acta math., 1957, 97, № 1—2, 103—144 (англ.)

Пусть P — матрица вероятностей перехода за один шаг в счетной однородной цепи Маркова, $P(t)$ — матрица вероятностей перехода за время t в счетном однородном стохастически непрерывном процессе

Маркова. Как известно, в случае цепи всегда существует предел P^n по Чезаро

$$\Pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} P^r,$$

в случае же процесса — обычный предел $\Pi = \lim_{t\to\infty} P(t)$. Рассматриваются три задачи: A) Найти Π, зная P. B) Найти Π, зная инфинитезимальный оператор Ω процесса $P(t)$. C) Найти Π, зная регулярную матрицу плотностей вероятностей перехода Q процесса $P(t)$ (регулярность матрицы Q означает, что все q_{ii} конечны, $\sum_j q_{ij} = 0$ и матрице Q соответствует единственный процесс $P(t)$). Даются решения этих задач в терминах подпространств, переводимых в нуль, соответственно, операторами $P - I$, Ω и Q и сопряженными к ним операторами (I — единичная матрица). В случае A используется разбиение всего пространства состояний на положительные классы и невозвратные и нулевые состояния; для нахождения финальных вероятностей внутри каждого положительного класса достаточно знать нуль-пространство оператора $P - I$, для нахождения вероятностей поглощения тем или иным положительным классом — нуль-пространство сопряженного оператора. Для случая B аналогичный результат получается сведением к случаю A, для случая C — сведением к B. Приводится несколько примеров вычисления Π предложенным методом, в том числе для процесса рождения и гибели. В конце рассматривается задача о нахождении по оператору Ω подпространств собственных векторов оператора Π, отвечающих собственным значениям 0 и 1 (так как $\Pi^2 = \Pi$, то других собственных значений Π не имеет). Дается частичное решение этой задачи, открывающей другой возможный подход к проблеме B. А. А. Юшкевич

9045. О распределении Пуассона. Ватанабэ (On the Poisson distribution. Watanabe Hisao), J. Math. Soc., Japan, 1956, 8, № 2, 127—134 (англ.)

Пусть x_{-1}, x_0, x_1, ... — случайные точки вещественной оси такие, что $< x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots$ ($x_0 = 0$) и $\{x_j - x_{j-1}\}$ независимы и одинаково распределены с функцией распределения (ф. р.) $F(x)$. В начальный момент времени $t = 0$ из каждой точки x_n выходит блуждающая частица P_n, совершающая в дальнейшем скачки в целочисленные моменты времени t. Случайные величины $X_n(t)$ и $N_I(t)$ обозначают соответственно смещение P_n за время t и число частиц, находящихся в момент времени t в интервале $I = [a, b]$. Предполагается, что 1) для любых n и t случайные величины $X_n(t) - X_n(t-1)$ взаимно независимы и одинаково распределены с решетчатой ф. р. $I(x)$ (максимальный шаг $I(x)$ равен d); 2) семейства случайных величин $\{X_n(t)\}$ и $\{x_n\}$ при $t > 0$ взаимно независимы; 3) $0 < m = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) < \infty$.

Доказывается, что предельное распределение случайной величины $N_I(t)$ при $t \to 0$ является распределением Пуассона с параметром λ, причем

$$\lambda = \frac{b-a}{m},$$

если ф. р. $F(x)$ нерешетчата или если $F(x)$ решетчата с максимальным шагом d' и d/d' иррационально, и

$$\lambda = \frac{1}{m_p} \sum_{r=-\infty}^{\infty} I\left(\frac{r}{p}\right),$$

если ф. р. $F(x)$ решетчата, а $\frac{d}{d'} = \frac{p}{q}$ несократимая дробь ($I(x)$ — характеристическая функция интервала $[a, b]$). Отмечается, что случай нерешетчатой ф. р. $I(x)$ изучен Маруяма (Maruyama G., Natur. Sci. Rept Ochanomizu Univ., 1955, 6). М. И. Ядренко

9046. Применение леммы Джуна к процедуре приближения Кифера—Вольфовица. Дерман (An application of Chung's lemma to the Kiefer—Wolfowitz stochastic approximation procedure. Derman Cyrus), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 2, 532—536 (англ.)

Пусть $H(y \mid x)$ — семейство функций распределения, зависящее от параметра x, и $M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y dH(y \mid x)$ — регрессия y по x. Предполагается, что $M(x)$ строго возрастает при $x < \theta$ и строго убывает для $x > \theta$. Постулируются следующие условия:

1. Существуют положительные константы K_1, K_2 и C_0 такие, что для каждого c, $0 < c < C_0$,

$$-cK_2(x-\theta)^2 \leqslant [M(x+c) - M(x-c)] \times$$

$$\times (x-\theta) \leqslant -cK_1(x-\theta)^2.$$

2. Пусть $\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M(x))^2 dH(y \mid x)$; существуют два числа M_1 и M_2 такие, что $0 < M_1 \leqslant \sigma^2(x) \leqslant M_2 < \infty$.

3. Пусть η и ε — два числа такие, что $\eta > \varepsilon > 0$ и $\eta + \varepsilon < \frac{1}{2}$. Полагаем $a_n = \frac{1}{n+\varepsilon}$; $c_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} - \eta}$. При этих условиях стохастическая процедура для приближенного определения параметра θ, предложенная Кифером и Вольфовицем (Amer. Math. Statistics, 1952, 23, 462—466), сходится. При выполнении некоторых дополнительных условий для этой процедуры, она сходится по распределению к нормальному закону. Метод базируется на одной лемме Джуна, которая использована им при анализе процедуры Робинса—Монро (РЖМат, 1956, 3203).

По резюме автора

9047. Потоки случайных событий без последействия. Хинчин А. Я., Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 1, 3—18 (рез. нем.)

Пусть $x(t)$ — поток случайных событий (п. с. с.) без последействия (РЖМат, 1957, 5032). П. с. с. называется финитным, если математическое ожидание числа событий потока, наступающих в интервале $(0, t)$, конечно при всех t. Пусть $v_k(\alpha, \beta)$ — вероятность того, что в интервале (α, β) наступит k событий потока и $p_k(t) = \lim_{h\to 0} v_k(t-h, t+h)$. Точка t называется регулярной точкой потока, если $p_0(t) = 1$, и сингулярной, если $p_0(t) < 1$. П. с. с., не имеющий ни одной сингулярной точки, называется регулярным. П. с. с. называется сингулярным потоком без последействия, если: а) события потока могут наступать лишь в некоторые заранее определенные моменты времени (ступени потока), образующие не более чем счетное множество; б) числа событий, падающих на различные ступени, представляют собою взаимно-независимые случайные величины. Доказываются следующие две теоремы, дающие полное описание финитных потоков без последействия:

Теорема 1. Каждый регулярный финитный п. с. с. без последействия имеет производящую функцию

$$\Phi(x, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\alpha, \beta) x^k =$$

$$= \exp\left\{ \sum_{r=0}^{\infty} [\chi_r(\beta) - \chi_r(\alpha)] x^r \right\},$$

где $\chi_r(t)$ — непрерывная монотонная функция (не убывающая при $k > 0$ и не возрастающая при $k = 0$) и $\sum_{k=0}^{\infty} \chi_k(t) = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} k\chi_k(t) < \infty$.

Обратно, каждая такая функция $\Phi(x, \alpha, \beta)$ есть производящая функция некоторого регулярного потока без последействия.

Теорема 2. Всякий финитный поток $x(t)$ без последействия представляет собой суперпозицию двух взаимно-независимых финитных потоков того же типа — регулярного и сингулярного. Ступенями сингулярной компоненты служат сингулярные точки потока $x(t)$.

Теорема 1 содержит в качестве частного случая результаты Редхеффера (РЖМат, 1954, 1722) и автора (РЖМат, 1957, 5032) относительно структуры стационарных п. с. с. без последействия.

Имеются опечатки. М. И. Ядренко

9048. О свертках сингулярных мер. Тортра (Sur le produit de composition des mesures singulières. Tortrat Albert), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 11, 1446—1448 (франц.)

Изучаются вопросы, связанные с абсолютной непрерывностью и сингулярностью мер на отрезке [0,1]. Производятся последовательные разбиения отрезка; отрезки S_{i+1} $(i+1)$ разбиения получаются из отрезков S_i подразделением каждого отрезка S_i на отрезки S_{i+1} первой и второй категории, причем относительная длина β_i отрезков первой категории такова, что

$$0 < \underline{\lim}\, \beta_i = \beta, \quad B = \overline{\lim}\, \beta_i < 1.$$

Пусть p_i — мера S_i.

Автор формулирует утверждение, что если

$$\underline{\lim}\, 1/n \sum_{1}^{n} \beta_i < \underline{\lim}\, 1/n \sum_{1}^{n} p_i,$$

то мера содержит сингулярную компоненту.

В терминах β_i, P_i, B, β даются некоторые критерии чистой сингулярности и абсолютной непрерывности. Указывается, что с их помощью могут быть исследованы композиции одного класса сингулярных мер; в частности, могут быть доказаны сингулярность композиции канторовской меры с собой, а также ее четырехкратной композиции.

Доказательства отсутствуют; есть только отдельные указания, некоторые из которых автор поместил в формулировки теорем. Отсутствует также определение величины T, которая обозначает композицию некоторых мер. И. В. Гирсанов

9049. Рациональные формулы для получения сферически симметричного распределения вероятностей. Кук (Rational formulae for the production of a spherically symmetric probability distribution. Cook J. M.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, 11, № 58, 81—82 (англ.)

Рассматривается удобный способ получения совокупности случайных точек (задаваемых прямоугольными координатами x, y, z), равномерно распределенных по поверхности сферы.

Пусть в нашем распоряжении находится совокупность $\{x\}$ случайных чисел x_i, имеющих равномерное распределение на прямой в интервале $(-1, +1)$. Процедура получения упомянутых выше точек сводится к следующему.

Из совокупности $\{x\}$ выбираем четверку чисел x_0, x_1, x_2, x_3 и проверяем справедливость неравенства

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1. \qquad (1)$$

Если неравенство (1) не удовлетворяется, то четверку чисел отбрасываем и выбираем новую. Так продолжаем до тех пор, пока неравенство (1) окажется выполненным. В последнем случае числа

$$x = \frac{2(x_1 \cdot x_3 + x_0 \cdot x_2)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$y = \frac{2(x_2 \cdot x_3 - x_0 \cdot x_1)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad z = \frac{x_0^2 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

будут координатами случайных точек, равномерно распределенных по поверхности сферы единичного радиуса. Приводится обоснование рассмотренной процедуры. Указывается на возможность использования метода в более общих предположениях. Н. П. Бусленко

9050. Метод произвольных функций в обосновании предельных распределений. Боброва А. А., Научн. ежегодник. Одесск. ун-та, 1956, Одесса, 1957, 117—119

Рассматривается детерминированный процесс, имеющий, однако, случайные «начальные условия»: интересующее нас состояние системы определяется величиной $S = F(v, \tau)$, зависящей от случайного параметра v и параметра τ, характеризующего систему в каком-нибудь определенном отношении (коэффициент трения, сопротивления среды и пр., τ может быть также функцией, кривой, вообще элементом произвольной природы). Ставится вопрос: при каких условиях, налагаемых на $F(v, \tau)$ при приближении параметра τ к «критическому значению» τ_0, закон распределения вероятностей величины S приближается к какому-нибудь закону распределения $\varphi(x)$, не зависящему от распределения вероятностей случайного параметра v, предполагаемого произвольным, но абсолютно непрерывным? Приводятся без доказательств теоремы, отвечающие на поставленный вопрос.

В качестве примера приводим теорему 1.

Теорема 1. Пусть $F(v, \tau)$ равномерно ограничена; тогда, для того чтобы существовало предельное распределение

$$\lim_{\tau \to \tau_0} P\{F(v, \tau) < x\} = \varphi(x),$$

не зависящее от распределения параметра v, необходимо и достаточно, чтобы все целые положительные степени функции $F(v, \tau)$ имели предельные средние значения

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} F^n dv = \mu_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

не зависящие от произвольно взятого интервала (v_1, v_2). По резюме автора

9051. Заметка о законе больших чисел. Роджерс (A note on the law of large numbers. Rogers Hartley, Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 518—520 (англ.)

Пусть X_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — независимые случайные величины, $EX_k = 0$. Обозначим через X_{kn} усеченную случайную величину, равную X_k, если $|X_k| < n$,

и равную 0, если $|X_k| \geqslant n$. Рассмотрим условия: 1) $\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| \geqslant n) \to 0$, 2) $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} EX_{kn} \to 0$, 3) $n^{-2} \sum_{k=1}^{n} EX_{kn}^2 \to 0$, 4) $n^{-2} \sum_{k=1}^{n} DX_{kn} \to 0$ при $n \to \infty$. Здесь EX и DX обозначают соответственно среднее значение и дисперсию случайной величины X. Колмогоров (Math. Ann., 1928, 99, 309—319; 1929, 102, 484—488) доказал, что условия 1), 2), 4) являются необходимыми и достаточными для справедливости закона больших чисел: $P\left\{n^{-1}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right\} \to 0$ при $n \to \infty$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$. Там же (теорема 11) приведено без доказательства утверждение, что условия 1), 2), 4) можно заменить условиями 1), 2), 3). Последнее утверждение содержится также в ряде монографий и статей. На примере автор показывает, что оно неверно. И. П. Кубилюс

9052. Исследования по проблеме восстановления, в частности представление ее цепью Маркова. Хец (Untersuchungen zum Erneuerungsproblem, insbesondere seine Darstellung als Markoffsche Kette. Hetz Wolfgang), Bl. Dtsch. Ges. Versicherungsmath., 1956, 3, № 1, 23—56 (нем.)

В случае, когда в задаче восстановления с дискретным временем имеется один восстанавливаемый объект, причем максимальный срок службы объекта равен n, можно рассматривать процесс как цепь Маркова с n состояниями, понимая под состоянием системы возраст объекта. Через характеристические корни матрицы вероятностей перехода этой цепи и начальное распределение можно в явном виде выразить распределение возраста объекта в любой момент t. Из эргодического свойства для конечной цепи Маркова вытекает, что при $t \to \infty$ это распределение стремится к предельному распределению, не зависящему от начального распределения возраста. Получается также, что совместное распределение величин $N_j(t)$ (число объектов до момента t, имевших срок службы j) асимптотически нормально при $t \to \infty$. Результаты легко обобщаются на случай нескольких независимых одинаковых объектов, а также на случай, когда имеются объекты двух типов, могущие замещать друг друга. Допускается, чтобы возраст объекта в момент начала его службы был случайным. А. А. Юшкевич

9053 К. Вероятности, ошибки. Борель, Дельтей, Ирон (Probabilités, erreurs. 9 ème éd. Borel E., Deltheil R., Huron Roger. Paris, Armand Colin, 1954, 220 p., 250 fr.) (франц.)

9054 К. Трактат по исчислению вероятностей и их приложениям Т. I. Принципы теории вероятностей. Ч. 4. Принципы математической статистики. Борель, Риссер, Тренар (Traité du calcul des probabilités et de ses applications. 2-e éd. Borel Émile. T. I. Les principes de la théorie des probabilités. Fasc. 4. Les principes de la statistique mathématique. Risser René, Traynard C. Émile. Livre 2, Corrélation, séries chronologiques. Paris, Gauthier—Villars, 1958, XII, 419 p., ill., 700 fr.), Bibliogr. France, 1958, 147, № 9, 255 (франц.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

9055. Проблема вероятностного оправдания индукции, проводимой перечислением. Червинский (Zagadnienie probabilistycznego uzasadnienia indukcji enumeracyjnej. Czerwiński Zbigniew), Studia log., 1957, 5, 91—107 (польск.)

Соображения по поводу проблемы индуктивного вывода, получаемого с помощью теории вероятностей и статистики. Автор ограничивается индукцией, проводимой простым перечислением. Критикуется попытка Кейнеса дать вероятностное оправдание индукции. Рассматривая различные возможные заключения, получаемые из предпосылок индуктивного вывода, автор находит, что повторная верификация высказывания «каждое A есть B» подтверждает его более строго, чем любое предложение типа «частота того, что B есть A равна c» ($0 \leqslant c \leqslant 1$). С другой стороны, интерпретация индукции как некоторого статистического критерия (в смысле Неймана или Пирсона) показывает, что с точки зрения критериев, принятых в математической статистике, индуктивный вывод является «хорошим» выводом. R. Suszko

9056. Сравнение двух совокупностей. Ромейко (Porównywanie dwóch partii towaru. Romejko A.), Zastosowania mat., 1957, 3, № 2, 217—228 (польск.)

Разбирается частный случай сравнения двух совокупностей. Совокупности могут быть как дискретного, так и непрерывного типа. Для обеих совокупностей исследуемое свойство обладает распределением Пуассона и совокупности могут различаться только по значению параметра. Выдвигается (сложная) нулевая гипотеза, что оба параметра имеют равное значение. Для проверки этой гипотезы автор строит последовательный критерий значимости. Критерий имеет два варианта, различающихся по способу выбора критической области и соответствующих двум различным формулировкам альтернативных гипотез.

Теоретическое обоснование вышеупомянутого критерия заключается в следующем. Рассматриваются два независимых стохастических процесса Пуассона. Автор находит условное распределение числа скачков в одном из процессов при условии, что исследование было прервано в момент, когда во втором процессе, с тем же самым параметром, осуществилось фиксированное число n скачков. Рассматриваемое распределение выражается формулой

$$P_n(m) = \frac{1}{2^{n+m}} \binom{m+n-1}{m}.$$

Статья содержит таблицу функции распределения. M. Mikulski

9057. Структурное соотношение двух переменных. Браун (Bivariate structural relation. Brown R. L.), Biometrika, 1957, 44, № 1—2, 84—96 (англ.)

Пусть дано n независимых наблюдений (x_i, y_i) двух переменных X, Y, причем ошибки измерения X и Y независимы и распределены $N(0, 1)$. Предположим, что X и Y связаны линейной зависимостью $Y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ с неизвестными коэффициентами. Сумма квадратов расстояний точек (x_i, y_i) до прямой $Y = \alpha_0 + \alpha_1 X$ имеет распределение χ_n^2. Это позволяет построить доверительную область для коэффициентов α_0, α_1. Ее границей служит кривая второго порядка. Огибающая L прямых $Y = \alpha_0 + \alpha_1 X$ при условии, что (α_0, α_1) лежит на этой кривой, называется приемочной кривой второго порядка (acceptance conic). Если L — гипербола, то все приемлемые прямые $Y = \alpha_0 + \alpha_1 X$ лежат вне гиперболы и угловые коэффициенты асимптот дают границы для α_1. При $n \to \infty$ параметры, определяющие гиперболу, сходятся к некоторым постоянным, таким, что гипербола в пределе превращается в истинную прямую $Y = \alpha_0 + \alpha_1 X$. Если L — мнимая кривая, то приемлемых линейных соотношений не существует. Если L — эллипс, то нельзя определить направления прямой. Рассматривается также случай, когда ошибки X и Y не являются независимыми, а также случай нелинейной зависимости между X и Y. И. П. Кубилюс

9058. **Многофакторный анализ с неполными данными относительно одного из факторов. Рао** (Analysis of dispersion with incomplete observations on one of the characters. Rao C. Radhakrishna), J. Roy. Statist. Soc., 1956, B18, № 2, 259—264 (англ.)

Для совместного анализа p факторов (многомерное обобщение дисперсионного анализа) в том случае, когда выборочные данные относительно одного из факторов не полны, применяется статистика, представляющая собой обобщение Λ-статистики Уилкса. Для распределения логарифма рассматриваемой статистики указано асимптотическое разложение, первые несколько членов которого дают аппроксимацию, достаточную для практического применения. Кроме этого, для распределения рассматриваемой статистики найдены точные моменты, которые используются для выбора параметров аппроксимирующего β-распределения. Применение полученных результатов проиллюстрировано примерами. А. А. Зингер

9059. **Анализ смешанных факториальных экспериментов при единичных повторениях. Байнет, Лесли, Уэйнер, Андерсон** (Analysis of confounded factorial experiments in single replications. Binet F. E., Leslie R. T., Weiner S., Anderson R. L. Techn. Bull. North Carolina Agric. Experim. Stat., № 113, 1955, 64 pp.) (англ.)

9060. **План эксперимента для трех факторов с тремя уровнями. Де-Бон** (An experimental design for three factors at three levels. De Baun Robert M.), Nature, 1958, 181, № 4603, 209—210 (англ.)

9061. **Симметрические функции от величин, зависящих от двух индексов. Хук** (Symmetric functions of a two-way array. Hooke Robert), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 1, 55—79 (англ.)

Обобщается понятие «поликея» введенное Тьюки (Tukey J. W., J. Amer. Statist. Assoc., 1950, 45, 501—519) для случая, когда поликей берется от величин, зависящих от двух индексов. Даются таблицы и примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

P. Révész

9062. **Некоторые применения «биполикеев» для оценки компонент дисперсии и их моментов. Хук** (Some applications of bipolykays to the estimation of variance components and their moments. Hooke Robert), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 1, 80—98 (англ.)

Автор применяет свои результаты о «поликеях» (реф. 9061) к некоторым проблемам дисперсионного анализа и, таким образом, обобщает свой метод, изложенный в предыдущей статье. P. Révész

9063. **О сравнении нескольких совокупностей с одной контрольной. Лукашевич, Садовский** (O porównywaniu kilku populacji z populacją kontrolna, Łukaszewicz J., Sadowski W.), Zastosowania mat., 1957, 3, № 2, 204—216 (польск.)

Предположим, что дано K выборок объема n, извлеченных из k непрерывных совокупностей. Пусть в выборке, содержащей наибольший элемент, находится R' элементов, больших всех элементов остальных выборок, причем выборка, содержащая наибольший элемент, извлечена не из первой совокупности; в противном случае полагаем $R'=0$. Подобным же образом, если наибольший и наименьший элементы принадлежат одной и той же выборке и эта выборка не есть выборка из первой совокупности, то обозначим через r' число элементов этой выборки, которые или больше или меньше элементов всех оставшихся выборок; если эта выборка из первой совокупности, то полагаем $r'=0$. При предположении, что все совокупности имеют одну и ту же функцию распределения, находятся распределения вероятностей величин R' и r', а также их предел при $n\to\infty$. Для некоторых значений n и k даются таблицы этих распределений. При предположении, что функции распределений рассматриваемых совокупностей имеют вид $F(x-a_1), \ldots, F(x-a_n)$, где $F(x)$ — фиксированная, но неизвестная непрерывная функция распределения, а $a_1, \ldots, a_n$ — параметры совокупностей, строится основанный на статистике R' критерий значимости для гипотезы $\max(a_2, \ldots, a_n) > a_1$. Подобным же образом строится критерий значимости, основанный на статистике r'. Для гипотезы $(\lambda_2, \ldots, \lambda_n) > \lambda_1$; здесь предполагается, что функции распределений имеют вид $F\left(\frac{x-\mu}{\lambda_1}\right), \ldots, F\left(\frac{x-\mu}{\lambda_m}\right)$, $F(x)$ — фиксированная, но не известная непрерывная функция распределения, μ — константа и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — параметры совокупностей. Смещение этих критериев не обсуждается. S. Zubrzycki

9064. **Следствия из выборки для случайной величины, подверженной ошибкам измерения. Финни** (The consequences of selection for a variate subject to errors of measurement. Finney D. J.), Rev. Inst. internat. statist., 1956, 24, № 1-3, 1—10 (англ.; рез. франц.)

Изучается случайная величина x. Наблюденная величина $y=x+w$, где w — ошибка измерения. Предполагается, что w распределена по нормальному закону и не зависит от x. При этом эксперимент производится так, что отбрасываются все значения $y<\eta$, где η определяется из соотношения $P\{y\geqslant\eta\}=P$, P — некоторое фиксированное число, $0<P\leqslant 1$. Обозначим через Y случайную величину, полученную путем описанного усечения y; $X=Y-w$. Изучается распределение X и Y в предположении, что распределение x и w известны. Даны выражения для характеристических функций и первых 4 моментов. Приведены таблицы для подсчета первого момента X при любом распределении x и для 5 первых семиинвариантов, когда x распределена по нормальному закону. И. П. Кубилюс

9065. **Оптимальный выбор из биномиальных совокупностей. Сомервилл** (Optimum sampling in binomial populations. Somerville Paul N.), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, 52, № 280, 494—502 (англ.)

Пусть имеются две биномиальные совокупности с параметрами θ_0 и θ_1 $(\theta_0>\theta_1)$, а рисковая функция принимается в форме

$$L=w(\theta_0, \theta_1)\,p_1+c(n),$$

где $w(\theta_0, \theta_1)$ — функция потерь от выбора совокупности с параметром θ_1; p_1 — вероятность выбора этой совокупности и $c(n)$ — функция стоимости контроля (n — объем выборки).

В реферируемой работе для оценки разности $d=\theta_0-\theta_1$ даются правила (минимальные), которые минимизируют по n максимум относительно θ_0 и θ_1 рисковой функции L. Р. Х. Дивеев

9066. **Усеченные биномиальное и отрицательно биномиальное распределения. Райдер** (Truncated binomial and negative binomial distributions. Rider Paul R.), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, 50, № 271, 877—883 (англ.)

Рассматриваются выборки из биномиального распределения величины X с параметрами n и p. Предполагается, что нижние k классов этого распределения усекаются и соответствующие результаты остаются незарегистрированными; неизвестным остается и общий объем выборки. Считая n известными, автор показывает, что оценкой p может служить

$$\hat{p} = \frac{T_2 - kT_1}{(n-1)T_1 - (k-1)nT_0}, \text{ где } T_i = \sum_k^n x^i f_x$$

$$(r = 0, 1, 2)$$

и f_x — наблюденные частотные значения x. Для оценки N неизвестного объема неусеченных выборок — получено уравнение:

$$N - T_0 = N \sum_0^{k-1} \binom{n}{x} \hat{p}^x (1-\hat{p})^{n-x}.$$

Аналогичным образом рассматривается случай отрицательного биномиального распределения. Полученные оценки сравниваются с оценками по методу наибольшего правдоподобия. Библ. 17 назв.

Н. В. Смирнов

9067. Оценка параметров по неполным данным. Лорд (Estimation of parameters from incomplete data. Lord Frederic M.), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, 50, № 271, 870—876 (англ.)

Рассматривается выборка объема $N = N' + N''$ из трехмерной нормальной совокупности величин u, v и w. Данные по признаку w регистрировались во всех N наблюдениях, по u регистрировались в группе из N наблюдений, причем данные по v этой группы отсутствуют, в остальных N'' наблюдениях даются данные по v и отсутствуют данные по u. Данные второй группы привлекаются для оценки параметров распределения u, w, а первой — для оценки параметров распределения v. Всего требуется оценить девять параметров — три центра, три дисперсии и три коэффициента корреляции. Для оценки ρ_{uv} данных недостаточно. Для остальных параметров оценки в явном и сравнительно простом виде находятся автором, использующим для этого метод наибольшего правдоподобия. Так, для оценки центров распределения получаются следующие статистики (используются обычные обозначения):

$$\mu_w^* = \bar{w},$$

$$\mu_u^* = \bar{u}' - s_u' r'_{uw/s'w} (\bar{w}' - \bar{w}),$$

$$\mu_v^* = \bar{v}'' - \frac{s_v'' r''_{vw}}{s_w''} (\bar{w}'' - \bar{w}),$$

где выборочные показатели первой группы помечаются одним, а второй — двумя штрихами. Н. В. Смирнов

9068. Оценка параметров из неполных многомерных выборок. Николсон (Estimation of parameters from incomplete multivariate samples. Nicholson George E., Jr), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, 52, № 280, 523—526 (англ.)

Рассматривается задача об использовании всех наблюдений в выборке из многомерной совокупности, если в некоторых наблюдениях значения определенных компонент отсутствуют. Результаты, полученные для оценки параметров в специальных случаях, распространяются на общий p-мерный случай и дается ответ на вопрос о том, как использовать данные из неполных многомерных выборок, когда нужно предсказать значение одной компоненты, если значения других известны. Автор приходит к заключению, что неполные выборки не могут быть использованы в целях предсказания. При некоторых обстоятельствах все наблюдения в неполной выборке могут быть использованы для построения улучшенных оценок. Дается приложение полученных результатов к многомерным нормальным распределениям, усеченным на одной или нескольких компонентах. Резюме автора

9069. Мощность коэффициента изменчивости Пуассона. Дарвин (The power of the Poisson index of dispersion. Darwin J. H.), Biometrika, 1957, 44, № 1—2, 286—289 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка, полученная в результате независимых испытаний над случайной величиной, распределение которой имеет достаточное большое среднее значение μ, дисперсию порядка μ и кумулянты $k_r = o\left(\mu^{1/2r}\right)$ для $r > 2$.

Исследуется предельное распределение коэффициента изменчивости

$$Z = \frac{\sum_j (x_j - \bar{x})^2}{\bar{x}}.$$

С. Х. Туманян

9070. Теоремы о двойных выборках в теории непрерывных сигналов. Хонда (Double sampling theorems in continuous signals. Honda Namio. XIIth Gen. Assembly, U. R. S. I., Commiss. 6, Boulder, Colo, 1957, № 48, 7 pp.) (англ.)

9071. Выбор между двумя альтернативами относительно числа экспериментов. Гранди, Рис, Хилл (Decision between two alternatives — how many experiments? Grundy P. M., Rees D. H., Healy M. J. R.), Biometrics, 1954, 10, № 3, 317—323 (англ.)

Пусть эффективность нового способа производства характеризуется случайной величиной η, для оценки которой проводятся n испытаний. Новый способ будет принят, если $\bar{y}$ (средняя результатов всех испытаний) больше некоторой постоянной c. Рекомендуется после первого испытания определить n так, чтобы «средний риск» $\bar{R} = M\left[kn - k'(\eta - c)P(\bar{y} > c)\right]$ был минимальным; здесь k — стоимость одного испытания, k' характеризует возможность применения нового способа, η считается распределенной нормально со средним y_1 (результат первого испытания) и заранее известной дисперсией σ. Даются номограмма и таблица для определения по $x = |y_1 - c|/\sigma$ и $\lambda = k'\sigma/k$.

Основная формула, связывающая $\bar{R}$, x и λ в статье дается без вывода. Референту не удалось подтвердить ее. Ряд рассуждений авторов вызывают сомнения в их обоснованности. Г. К. Энгелис

9072. Выбор без возвращения из слоев с вероятностью, пропорциональной объему. Йейтс, Гранди (Selection without replacement from within strata with probability proportional to size. Yates F., Grundy P. M.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, 15, № 2, 253—261 (англ.)

9073. Отсутствующие делянки и случайные блоки со сбалансированной неполнотой. Дас (Missing plots and a randomised block design with balanced incompleteness. Das M. N.), J. Indian Soc. Agric. Statist., 1954, 6, № 1, 58—76 (англ.)

Дается общий метод анализа неполных случайных блоков. Показывается и иллюстрируется на примерах, что в некоторых случаях этот метод более эффективен, чем другие известные методы. В некоторых случаях, с целью облегчения необходимых вычислений, выводятся явные выражения. P. Révész

9074. О концентрации распределения. Одерфельд (O skupieniu rozkładu. Oderfeld J.), Zastosow. mat., 1957, 3, № 2, 182—190 (польск.)

Относительная концентрация распределения вероятностей с функцией плотности $\varphi(x)$ определяется автором как $w = \left(\int \varphi^2(x)\,dx\right)^{1/2}$. Число $v = \left(\int_a^b \varphi^2(x)\,dx\right)^{1/2}$ он называет частичной концентрацией, соответствующей интервалу (a, b). Для того же типа распределе-

ний устанавливается связь между относительной концентрацией и стандартным отклонением.

Доказываются теоремы: I. Если функция плотности $\varphi(x)$ есть линейная комбинация от функций плотности $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, а w, w_1, w_2 — относительные концентрации, соответствующие $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, то $w = \max(w_1, w_2)$. II. Для данной функции плотности $\varphi(x)$ сумма частичных концентраций, соответствующих n смежным интервалам (d_{i-1}, d_i), $-\infty \leqslant d_0 < d_1 < \ldots$ $\ldots d_{n-1} < d_n = \infty$, принимает максимальное значение тогда, когда все n частичных концентраций равны между собой. Приводятся примеры, в которых, по мнению автора, стоимость партии товара может считаться пропорциональной относительным концентрациям, а выгодность разбиения на части — пропорциональной сумме частичных концентраций частей.

Примечание референта. Формулу на стр. 188, седьмая строка сверху, нужно читать

$$\frac{1}{2v_i}\varphi^2(d_i) - \frac{1}{2v_{i+1}}\varphi^2(d_i) = 0.$$

S. Zubrzycki

9075. Асимптотическая независимость линейных функций от эмпирических функций распределения. Чжа Ли-цянь, Фиш (Asymptotically independent linear functions of empirical distribution functions. Chang L. C., Fisz M.), Sci. Rec., 1957, 1, № 5, 335—340 (англ.)

Пусть $(x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn_j})$, $j = 1, 2, \ldots, k$, представляют результаты k независимых выборок из генеральной совокупности с непрерывной функцией распределения $F_1(x)$; $S_{jn_j}(x)$ — эмпирическая функция распределения j-й выборки. Определяется $(k-1)$ случайных процессов $\eta_{ik}(x) = \sum_{j=1}^{k} \beta_{in_j}\sqrt{n_j}\, S_{in_j}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, где β_{in_j} — действительные числа, зависящие от $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Пусть далее $A_{ik}^{+} = \max_x \eta_{ik}(x)$; $A_{ik} = \max_x |\eta_{ik}(x)|$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Предполагая, что выполнены условия:

1) $\sum_{j=1}^{k} \beta_{in_j}\sqrt{n_j} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$;

2) $\lim_{n_1\to\infty} \frac{n_j}{n_1} = a_j > 0$, $j = 2, \ldots, k$;

3) $\lim_{n_1\to\infty} \beta_{in_j} = \beta_{ij}$ $(i = 1, \ldots, k-1;\ j = 1, 2, \ldots, k)$,

причем $\sum_{j=1}^{k} \beta_{nj}\beta_{ij} = \delta_{hi}$ $(h, i = 1, 2, \ldots, k-1)$, имеем следующую теорему:

Для произвольных положительных чисел $a_1, \ldots, \ldots, a_{k-1}$,

$$\lim_{n_1\to\infty} P\left(A_{ik}^{+} < a_i;\ i = 1, 2, \ldots, k-1\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k-1}\left(1 - \exp\left(-2a_i^2\right)\right),$$

$$\lim_{n_1\to\infty} P\left(A_{ik} < a_i:\ i = 1, 2, \ldots, k-1\right) = \prod_{i=1}^{k-1} K(a_i).$$

кроме того, для каждого $\lambda > 0$

$$\lim_{n_1\to\infty} P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant k-1} A_{ik}^{+} < \lambda\right) = \left[1 - \exp\left(-2\lambda^2\right)\right]^{k-1},$$

$$\lim_{n_1\to\infty} P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant k-1} A_{ik} < \lambda\right) = \left[K(\lambda)\right]^{k-1},$$

здесь $K(\lambda) = \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} (-1)^s e^{-2s^2\lambda^2}$ Н. В. Смирнов

9076. Заметка о моментах логарифмического нецентрального χ^2- и z-распределений. Беннетт (Note on the moments of the logarithmic non-central χ^2 and z distributions. Bennett B. M.) Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo, 1955, 7, 57—61 (англ.).

Моменты, на которые указывает заглавие, даются через бесконечные ряды, члены которых выражаются через дигамма-функцию и ее производные.

I. R. Savage

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 5, 502.

9077. Выборочное распределение оценок наибольшего правдоподобия. Холдейн, Смит (The sampling distribution of a maximum-likelihood estimate. Haldane J. B. S., Smith Sheila Maynard), Biometrika, 1956, 43, № 1, 96—103 (англ.)

При некоторых предположениях (сформулированных нечетко) выводятся главные члены четырех первых моментов и кумулянтов для оценок параметра распределения, получаемых по методу наибольшего правдоподобия на основе данных выборки. Н. В. Смирнов

9078. Некоторые статистические свойства обратных гауссовых распределений. Туиди (Some statistical properties of inverse Gaussian distributions. Tweedie M. C. K.), Virginia J. Sci., 1956, 7, № 3, 160—165 (англ.)

Распределение с плотностью $e^{\lambda(x-\mu)^2/2\mu^2x}\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}$, $0 < x < \infty$, появляется при рассмотрении некоторых задач, связанных с случайным блужданием, с распределением длительности последовательных процедур и рядом физических проблем. Автор рассматривает вопросы оценки параметров и указывает некоторые статистические приложения. Н. В. Смирнов

9079. Анализ нормальной многомерной совокупности и ортогональная группа. Джеймс (Normal multivariate analysis and the orthogonal group. James A. T.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 1, 40—75 (англ.)

Вводятся новые методы для получения выборочных распределений статистик, получаемых из нормального многомерного распределения. Используются внешние дифференциальные формы для представления инвариантных мер на ортогональной группе и многообразиях Грассмана и Штифеля. Первая часть посвящена математическому изложению. Во второй части теория применяется: 1) для получения распределений коэффициентов канонической корреляции, когда соответствующие параметры совокупности равны нулю; 2) для расщепления распределения нормальной многомерной выборки на три независимых распределения: а) существенно вишартово распределение, б) инвариантное распределение случайной плоскости, задаваемое инвариантной мерой на многообразии Грассмана; в) инвариантное распределение случайной ортогональной матрицы.

С помощью этого расщепления выводятся распределение Вишарта и распределение собственных чисел выборочной дисперсионно-ковариационной матрицы, когда собственные числа соответствующей матрицы генеральной совокупности одинаковы. Резюме автора

9080. Распределение линейных и квадратичных форм. Камалов М. К., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 20, 53—62

Пусть $X_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jp})$ $(j = 1, \ldots, p)$, $p > 1$, — взаимно независимые и одинаково распределенные n-мерные случайные векторы. Доказывается, что стохастическая независимость системы линейных форм $L_\nu = \sum_{\lambda=1}^{n} h_{\nu\lambda}x_{\nu\lambda}$ $(\nu = 1, \ldots, p)$, где $\sum_{\lambda=1}^{n} h_{\nu\lambda} = \sqrt{n}$,

$\sum_{\lambda=1}^{n} h_{\nu\lambda}^2 = 1$, от системы квадратичных и билинейных форм

$$\sum_{\lambda=1}^{n} x_{\mu\lambda} x_{\nu\lambda} - L_\mu L_\nu \quad (\mu, \nu = 1, \ldots, p)$$

является необходимым и достаточным условием для того, чтобы векторы X_j были распределены нормально. Эта теорема обобщает и уточняет результаты А. А. Зингера (Успехи матем. наук, 1951, 6, № 5 (45), 172—175) и Лукача (Lukacs E., Ann. Math. Statistics, 1942, 13, 91). И. П. Кубилюс

9081. Приближенные распределения некоторых мер рассеивания, основывающиеся на последовательных разностях. Сатхе, Камат (Approximations to the distributions of some measures of dispersion based on successive differences. Sathe Y. S., Kamat A. R.), Biometrika, 1957, 44, № 3—4, 349—359 (англ.)

В качестве мер рассеивания генеральной совокупности, среднее которой смещается, предлагаются следующие 4 оценки для величины дисперсии по выборке объема n:

$$\delta^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2;$$

$$\delta_2^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2})^2;$$

$$d = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2;$$

$$d = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} |x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2}|.$$

Приближенно каждая из этих статистик распределена как $\left(\frac{\chi_\nu^2}{c}\right)^\alpha$, где ν — число степеней свободы и константы c и α определяются из уравнений первых трех моментов. Авторы показывают, что для $5 \leqslant n \leqslant 50$ α может быть взято постоянным для каждой из рассматриваемых статистик. Асимптотические эффективности этих оценок меняются от 0,47 до 0,66.

Приводятся значения $1/\alpha$, ν и c для широкого интервала объемов выборок. Статья обильно иллюстрирована таблицами, облегчающими пользование предлагаемыми оценками. М. А. Куликов

9082. Оценка логистической кривой. Сильверстон (Estimating the logistic curve. Silverstone H.), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, 52, № 280, 567—577 (англ.)

Для оценки параметров логистической кривой, когда реакция на данную дозу распределена биномиально, были предложены метод «максимального правдоподобия» и метод «минимума логит-хи-квадрата». Трудности вычисления, связанные с методом максимального правдоподобия, теперь большей частью исчезли. При сравнении двух методов показывается, что именно оценки максимального правдоподобия, а не оценки минимального логит-хи-квадрата являются достаточными оценками для параметров. Особое внимание уделяется выборкам, в которых все реакции, за исключением одной, являются 0 %-ными или 100 %-ными. Также рассматриваются эффекты использования «2n-правила» для проблемы минимума логит-хи-квадрата в случае 0 %-ной или 100 %-ной смертности в любом классе. Два множества оценок рассматриваются с точки зрения состоятельности; и для того случая, когда существуют достаточные оценки, делается несколько замечаний об оценках по способу наименьших квадратов. Резюме автора

9083. О совместном распределении среднего и стандартного отклонения. Беннетт (On the joint distribution of the mean and standard deviation. Bennett B. M.), Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo, 1955, 7, 63—66 (англ.)

Выводится рекуррентная формула для совместной плотности вероятности выборочного среднего и выборочной дисперсии при выборе из генеральной совокупности. Предполагается, что функция распределения генеральной совокупности является абсолютно непрерывной и что соответствующая плотность вероятности не имеет нулей. E. Lukacs

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 639

9084. Недопустимость обычной оценки среднего значения многомерного нормального распределения. Стейн (Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution. Stein Charles), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol 1. Berkeley—Los Angeles, 1956, 197—206 (англ.)

Пусть X — результат наблюдения n-мерной нормально распределенной случайной величины с единичной дисперсионной матрицей и неизвестным средним значением ξ, $d = d(x)$ — оценка для ξ. Оценка d называется допустимой относительно функции $L(\xi, d)$, если не существует такой d_1, что $E[L(\xi, d_1)] \equiv R(\xi, d_1) \leqslant R(\xi, d)$ со строгим неравенством хотя бы при одном ξ. Доказывается, что (для $L = (\xi - d^2)$): 1) $d = X$ является допустимой оценкой при $n \leqslant 2$, но не при $n > 2$, когда лучше оценка $d_1 = ((1-b)/(a + X^2))X$ с $0 < b < 2(n-2)$ и достаточно большим a; 2) при $b = n-2$ имеем $R(d_1, \xi) = n - (n-2)^2/(a + \xi^2) + o(\xi^{-2})$, но не существует таких d_2, c, ξ_0^2, чтобы было $c < (n-2)^2$, $R(d_2, \xi) \leqslant n - (n-2)^2/\xi^2$ для всех $\xi^2 > \xi_0^2$.

Формулируется несколько аналогичных нерешенных проблем. Г. К. Энгелис

9085. Семейство J-образных кривых распределений. Топп, Лион (A family of J-shaped frequency functions. Topp Chester W., Leone Fred C.), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, 50, № 269, 209—219 (англ.)

9086. «Явные выражения для первых четырех моментов усеченного распределения Пирсона VI типа». Исправления. Филипсон («Explicit expressions for the first four moments of a truncated distribution of Pearson type VI». Errata. Philipson Carl), Skand. aktuarietidskr., 1957, № 1-2, 18—19 (англ.)

9087. Изучение трудностей, встречаемых студентами при изучении статистики. Лебуте (Etude sur les difficultés des étudiants en statistique. Leboutet L.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1958, 37, № 191, 240—243 (франц.)

9088. Критерий согласия, основанный на функции правдоподобия. Шеффер (Der Likelihood-Anpassungstest. Schäffer K.-A.), Mitteilungsbl. math. Statist., 1957, 9, № 1, 27—54 (нем.)

Пусть область всех возможных значений наблюдаемой случайной величины Z разбита на попарно непересекающиеся области $T_1, \ldots, T_s$; $p_i = P(Z \in T_i)$ $(i = 1, \ldots, s)$, причем s и T_i подобраны так, чтобы $p_i > 0$. Предположим, что выборка, состоящая из n независимых наблюдений, содержит x_i $(i = 1, \ldots, s)$ значений, принадлежащих T_i. Обозначим

$$L = 2 \sum_{i=1}^{s} x_i \log(x_i/(np_i)).$$

Дается разложение функции L в ряд Тейлора по степеням $x_i/n - p_i$. Первые члены этого разложения образуют $\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} (x_i/n - p_i)^2\, n/p_i$. Для первых двух моментов L подсчитаны приближенные выражения μ_1, μ_2, учитывающие члены порядка n^{-2}.

Закон распределения величины L при $n \to \infty$ сходится к закону χ^2_{s-1}. Для построения критерия согласия при небольших n автор предлагает считать, что величина L/ρ распределена приближенно по закону χ^2_ν, причем ρ и ν следует подобрать так, чтобы первый и второй моменты для L, найденные, исходя из приближенного закона распределения, были равны соответственно μ_1, μ_2. На примерах сравнивается мощность критериев согласия, построенных, исходя из точного и приближенного распределений величины L и χ^2-критерия. Предлагаемый автором критерий дает вообще лучшие результаты по сравнению с χ^2-критерием. И. П. Кубилюс

9089. Асимптотическое распределение двух критериев согласия. Биллингсли (Asymptotic distributions of two goodness of fit criteria. Billingsley Patrick), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 4, 1123—1129 (англ.)

Пусть $\{X_1, X_2, \ldots,\}$ — стохастический процесс, в котором каждая случайная переменная принимает значения 1, 2, ..., s. Проверяется нулевая гипотеза, что этот процесс есть независимый и стационарный с вероятностями $P\{X_n = k\} = p_k > 0$.

Для этого составляется статистика

$$\sum_{u_1,\ldots,u_\nu=1}^{s} \frac{(n_{u_1\ldots u_\nu} - np_{u_1}\cdots p_{u_\nu})^2}{np_{u_1}\cdots p_{u_\nu}}, \qquad (1)$$

где $n_{u_1\ldots u_\nu}$ есть число целых $m \leqslant n$, для которых $(X_m, \ldots, X_{m+\nu-1})$ принимает значение $(u_1, \ldots, u_\nu)$. Показывается, что в случае справедливости нулевой гипотезы предельным распределением статистики (1) при $n \to \infty$ является

$$\mathop{*}_{\lambda=1}^{\nu-1} K_{s^{\nu-1}-\lambda_{(s-1)^2}}\left(\frac{x}{\lambda}\right) * K_{s-1}\left(\frac{x}{\nu}\right),$$

где $K_i(x)$ есть распределение χ — квадрат с i степенями свободы, а знак $*$, как обычно, означает свертку.

В случае, когда вместо p_k используются их оценки $\frac{n_k}{n}$, статистика (1) принимает вид

$$\sum_{u_1\ldots u_\nu=1}^{s} \frac{(n_{u_1\ldots u_\nu} - n^{1-\nu}n_{u_1\ldots u_\nu})^2}{n^{1-\nu}n_{u_1}\cdots n_{u_\nu}}. \qquad (2)$$

Показывается, что в случае справедливости гипотезы, состоящей в независимости и стационарности процесса, предельным распределением статистики (2) при $n \to \infty$ является

$$\mathop{*}_{\lambda=1}^{\nu-1} K_{s^{\nu-1}-\lambda_{(s-1)^2}}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

С. Х. Туманян

9090. Асимптотическая мощность некоторых критериев согласия, основанных на промежутках между выборочными значениями.
Уэйсс (The asymptotic power of certain tests of fit based on sample spacings. Weiss Lionel), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 783—786 (англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые и одинаково распределенные на $[0, 1]$ случайные величины с плотностью вероятности $f(x)$, обладающей следующими свойствами: 1) $f(x)$ может иметь на $[0, 1]$ не более конечного числа точек разрыва, 2) $0 < A \leqslant f(x) \leqslant B < +\infty$. Пусть теперь $Y_1 \leqslant Y_2 \leqslant \ldots \leqslant Y_n$ — те же величины X_k, но упорядоченные по величине, $Y_0 = 0$, $Y_{n+1} = 1$; положим $V(n) = \sum_{i=1}^{n+1} (Y_i - Y_{i-1})^r$, где $r > 1$. Справедлива теорема: закон распределения величины A/B, где

$$A = h^{r-1/2} V(n) - \sqrt{n}\,\Gamma(r+1)\int_0^1 f^{1-r}(x)\,dx;$$

$$B = \left[\Gamma(2r+1) - 2r\Gamma^2(r+1)\right]\int_0^1 f^{1-2r}(x)\,dx - (r-1)\,\Gamma(r+1)\int_0^1 f^{1-r}(x)\,dx\right]^2,$$

при $n \to \infty$ приближается к нормальному $(0, 1)$ закону.

В заключение показывается, как эта теорема может быть использована для подсчета асимптотической мощности некоторых критериев согласия, основанных на свойстве величин $V(n)$. А. А. Бобров

9091. Приближения к мощности порядковых критериев. Цзао Цзя-гуй (Approximations to the power of rank tests. Tsao Chia Kuei), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 1, 159—172 (англ.)

Проверяется нулевая гипотеза, согласно которой несколько случайных выборок произведены из совокупности с одной и той же функцией распределения, т. е.

$$H_0 : F = \ldots = F_k.$$

Дается общее определение порядковых критериев для проверки этой гипотезы при альтернативной гипотезе

$$H_1 : F_i = F_i^* \quad (i = 0, \ldots, k),$$

где $F_0^*, \ldots, F_k^*$ — заданные функции распределения. При этом F_i и F_i^* $(i = 0, \ldots, k)$ предполагаются непрерывными.

Предлагается метод для аппроксимации функции распределения соответствующих порядковых статистик в предположении справедливости альтернативной гипотезы. Более подробно рассматривается случай двух выборок.

Рассмотрена отдельно проблема испытания гипотезы: принадлежность двух выборок одной и той же совокупности при альтернативной гипотезе H_1, состоящей в том, что эти совокупности нормальны с одной и той же дисперсией, но различными средними. С. Х. Туманян

9092. О порядковом критерии для случайных последовательностей. Гуд (On the serial test for random sequences. Good I. J.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 1, 262—264 (англ.)

Пусть G есть конечная случайная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_N$ независимых случайных величин с вероятностями

$$P(a_j = r) = p_r \quad (j = 1, 2, \ldots, N;\ r = 0, 1, \ldots, t-1),$$

где $\sum p_r = 1$.

Последовательность, состоящая из ν случайных величин, называется ν-последовательностью и считается, что ν-последовательность принадлежит G, если она представляется в виде $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+\nu-1}$ $(j = 1, 2,$

$\ldots, N-\nu+1$). Одновременно с G определяется и циклическая случайная последовательность $\bar{G}$ и считается, что ν-последовательность принадлежит $\bar{G}$, если ν может принимать, помимо вышеозначенных, также значения $N-\nu+2$, $N-\nu+3, \ldots, N$, причем для всех целых k величина a_{N+k} отождествляется с a_k.

Пусть $n_{\bar{r}}$ и $\bar{n}_{\bar{r}}$ есть количества ν-последовательностей вида $\bar{r}=(r_1, r_2, \ldots, r_\nu)$ соответственно из G и $\bar{G}$ где $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ есть любые из чисел 0, 1, 2, $\ldots$, $\ldots, t-1$). Вводятся обозначения:

$$p_{\bar{r}}=p_{r_1}\cdots p_{r_\nu},$$

$$\psi_\nu^2=\sum_{\bar{r}}\frac{[n_{\bar{r}}-(N-\nu+1)\,p_{\bar{r}}]^2}{(N-\nu+1)\,p_{\bar{r}}},$$

$$\bar{\psi}_\nu^2=\sum_{\bar{r}}\frac{(\bar{n}_{\bar{r}}-Np_{\bar{r}})^2}{N_{p_{\bar{r}}}}.$$

Доказывается, что если $\nu\leqslant\frac{1}{2}(N+1)$, то $E\psi_\nu^2=t^\nu-1$, $E\bar{\psi}_\nu^2=t^\nu-1$.

Указывается, что эти результаты можно обобщить на случай многомерных последовательностей.

С. Х. Туманян

9093. Критерий сдвига для множества гамма-величин. Дорнбос, Принс (A slippage test for a set of Gammavariates. Doornbos R., Prins H. J. Math. Centrum Amsterdam. Statist. Afdeling Rept, 1956, S. 187, (VP4), 10 pp.) (англ.)

Излагаются модификации процедуры Кохрана (Cochran, Ann. Eugenics, 1941, 11, 47—52), распространяемой на случаи неравных объемов выборок и сдвига налево. Даются приближенные распределения для статистик критериев как при нулевой, так и при альтернативной гипотезах. I. R. Savage

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 641.

9094. Состоятельность некоторых критериев для проверки гипотезы о двух выборках. Блум, Уэйсс (Consistency of certain two sample tests. Blum J. R., Weiss Lionel), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 1, 242—246 (англ.)

Пусть X и Y — случайные переменные, распределенные в единичном интервале, причем X распределена равномерно, а Y имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $g(y)$, которая ограничена и имеет не более конечного числа точек разрыва.

Пусть, далее $X_1, X_2, \ldots, X_m$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — результаты независимых наблюдений соответственно случайных величин X и Y. Пусть $Z_0=0$, $Z_{n+1}=1$ и $Z_1<Z_2<\ldots<Z_n$ — значения $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, расположенные в порядке возрастания. Через S_i ($i=1, 2, \ldots, n+1$) обозначается число наблюдений случайной величины X, которые принадлежат интервалу $[Z_{i-1}, Z_i]$.

Пусть $Q_n(r)$ — число тех величин S_i ($i=1, 2, \ldots, n+1$), которые равны r.

Доказывается, что если $m\to\infty$ и $n\to\infty$, но так, что $\lim m/n=a$, имеет место соотношение

$$P\{\limsup_{n\to\infty}\sup_{r\geqslant 0}|Q_n(r)-Q(r)|=0\}=1,$$

где

$$Q(r)=a^r\int_0^1\frac{g^2(y)}{[a+g(y)]^{r+1}}\,dy.$$

Эта теорема используется для доказательства состоятельности некоторых критериев для проверки гипотезы о принадлежности двух выборок одной и той же совокупности, основанных на статистиках $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$, относительно альтернатив, приложенных к указанной теореме. С. Х. Туманян

9095. Расширенные таблицы «G-критерия» для средних значений. Джэксон, Росс (Extended tables for use with the «G» test for means. Jackson J. Edward, Ross Eleanor L), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, 50, № 270, 416—433 (англ.)

Дается таблица с точностью до двух десятичных знаков (но часто дающих только одну значимую цифру) для пользования «G-критерием» вида $G=|\bar{x}-\mu|/R$, где $\bar{x}$ — среднее выборки, μ — гипотетическое среднее генеральной совокупности, R — размах выборки. Эти таблицы составлены из таблиц Лорда (Lord E., Biometrika, 1947, 34, 41—69) при помощи простого преобразования и интерполяции. Их использование упрощает расчеты в практических приложениях. Ö. Éltetö

9096 Эффективные непараметрические гипотезы и оценки. Стейн (Efficient nonparametric testing and estimation. Stein Charles), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability, Vol. 1. Berkeley—Los Angeles, 1956, 187—195 (англ.)

Исследуется связь между параметрическими и непараметрическими задачами статистики. Рассматривается ряд задач, среди которых наиболее подробно следующая: Пусть $p(x)$ — неизвестная плотность по отношению к лебеговой мере на действительной оси, симметричная относительно начала, т. е. $p(x)=p(-x)$ для всех x. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайные переменные, такие, что для некоторого неизвестного ξ величины $X_1-\xi, \ldots, X_n-\xi$ распределены в соответствии с плотностью $p(x)$. Проверяется гипотеза $H_0: \xi=0$ против альтернативной гипотезы $H_1: \xi>0$ для больших n.

Показывается, что асимптотически наилучшая мощность при испытании гипотезы H_0 против альтернативной гипотезы H_1 в случае неизвестной плотности $p(x)$ такова, как и в случае, когда $p(x)$ известна.

С. Х. Туманян

9097. Дисперсионный и ковариационный анализы для несбалансированных классификаций. Федерер (Variance and covariance analyses for unbalanced classifications. Federer Walter T.), Biometrics, 1957, 13, № 3, 333—362 (англ.)

Дисперсионный и ковариационный анализы классифицируются по трем категориям: случай 1, взаимодействие отсутствует; случай 2, взаимодействия присутствует и эффекты предполагаются фиксированными; случай 3, взаимодействие присутствует и эффекты взаимодействия, а также хотя бы один из главных эффектов факторов, представленных во взаимодействии, предполагаются случайными. Статистические процедуры во всех трех случаях получены для двухсторонних и трехсторонних классификаций и иллюстрируются численными примерами для двухсторонней классификации с одним сопутствующим случайным фактором.

Указываются процедуры для q-сторонних классификаций с несколькими сопутствующими факторами. Резюме автора

9098. Критерий серийной корреляции в системах одновременных уравнений регрессии. Дербин (Testing for serial correlation in systems of simultaneous regression equations. Durbin J.), Biometrika, 1957, 44, № 3—4, 370—377 (англ.)

Рассматривается система одновременных уравнений регрессии

$$AY=BX+E,$$

где Y — $n\times(p+1)$-матрица наблюдений взаимно-

зависимых переменных y, $X = n(k+p)$-матрица наблюдений независимых переменных x, $E = n(p+1)$-матрица ошибок, A и B — матрицы оцениваемых параметров.

Рассматривается обобщение критерия отсутствия серийной корреляции ошибок, для малых выборок (Durbin, Watson G. S., Biometrika 1950, 37, 409; 1951, 38, 159) на случай всех ошибок системы.

Оценки для выборки объема n зависят от n-мерного вектора, r компонент которого (r — число независимых переменных в модели) лежат в пространстве оценок, а $n-r$ — в ортогональном дополнении к нему. Критерий серийной зависимости основывается на распределении направлений этого последнего вектора.

Выводятся критерии серийной корреляции для определенной и сверхопределенной системы уравнений регрессии. Таблицы уровней значимости выведенных критериев приведены в указанной выше работе при замене $k+p-1=k'$ для случая определенной системы и $k+q-1=k'$ ($q>p$) для случая сверхопределенной системы. И. А. Куликов

9099. Критерии для ранговых коэффициентов корреляции. I. Филлер, Хартли, Пирсон (Tests for rank correlation coefficients. I. Fieller E. C., Hartley H. O., Pearson E. S.), Biometrika, 1957, 44, № 3-4, 470—481 (англ.)

При ранговом коррелировании двух параллельно наблюдаемых величин U и V каждое значение как U, так и V заменяется соответствующим ему ранговым номером (в порядке возрастания). Таким образом, приходят к сопоставлению двух перестановок $(U_1, U_2 \ldots U_n)$ и $(V_1, V_2 \ldots V_n)$ целых чисел (1, 2, 3 ... n).

Авторы рассматривают следующие меры связи: коэффициенты Спирмана $r_S = 1 - 6\sum_1^n (U_i - V_i)^2/(n^3-n)$ и коэффициенты Кендалла $r_K = 4P_K/(n^2-n) - 1$, где P_K определяется подсчетом числа всех $V_j > U_i$ при $j > i$ и суммированием по всем i.

Вначале дается обзор ранее полученных результатов исследования распределений r_K и r_S. Основываясь на обширном экспериментальном материале, авторы показывают, что для не слишком больших n величины $z_S = \mathrm{th}^{-1} r_S$ и $z_K = \mathrm{th}^{-1} r_K$ распределены приблизительно нормально с дисперсиями, зависящими от объема выборки и почти независимыми от ρ, и обобщают этот результат на более широкий класс исходных распределений. Указывается, что внутри этого класса каждое из z-преобразований является несмещенной оценкой функции корреляции.

Показывается, что расхождения между предлагаемыми аппроксимациями и экспериментально полученными значениями не значимы при $\rho < 0{,}9$ и при $n > 10$. При $n \leqslant 10$ предполагается, что преобразование z имеет $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} > 3$.

В конце статьи авторы сравнивают чувствительность этих корреляционных мер к изменению ρ. Работа построена исключительно на экспериментальном материале и богато иллюстрирована числовыми таблицами.

Примечание референта. Выводы, сделанные авторами, окончательными быть признаны не могут и нуждаются в дальнейшем подтверждении. М. А. Куликов

9100. Анализ многомерной регрессии в k категориях. Калбак, Розенблатт (On the analysis of multiple regression in k categories. Kullback S., Rosenblatt H. M.), Biometrika, 1957, 44, № 1—2, 67—83 (англ.)

Рассматривается общая процедура, которая допускает подход с точки зрения теории информации и применяется к проблеме проверки гипотез относительно множеств частных коэффициентов регрессии в k категориях, каждая из которых включает $p+1$ переменных. Критерий значимости основан на анализе дисперсионного отношения. Как частный случай получается проблема Картера, характеризующаяся «корреляционным эффектом» среди i-х членов каждой категории. В заключение приводится пример, где полученные результаты применяются к данным измерений произведенной продукции, проверяемой при наличии трех условий (категорий), каждое из которых характеризуется тремя независимыми переменными. Б. М. Клосс

9101. Использование размаха выборки для оценки стандартного отклонения или дисперсии любой совокупности. Масуяма (The use of sample range in estimating the standard deviation or the variance of any population. Masuyama Motosaburo), Санкия, Indian J. Statist., 1957, 18, № 1—2, 159—162 (англ.)

Предлагается оценка стандартного отклонения или дисперсии любой генеральной совокупности с непрерывной функцией распределения, пропорциональная размаху выборки.

Обозначив через H гармоническое среднее максимального и минимального значений отношения стандартного отклонения (соответственно дисперсии) выборки к ее размаху (соответственно квадрату размаха), автор аппроксимирует коэффициент пропорциональности $1/d$ для стандартного отклонения выражением H/b, где b определяется из уравнения $E(u) = b\sigma$. Через u здесь обозначено стандартное отклонение выборки, а через σ — стандартное отклонение совокупности. Автор не указывает метода определения величины b, замечая лишь, что верхняя и нижняя границы b для выборок небольшого объема почти не зависят от исходного распределения.

Аналогично, автор предлагает H в качестве хорошей аппроксимации для $1/g$ в выражении $E(R^2) = g\sigma^2$. Попутно приведены аппроксимации величин d и g для нормального распределения (без доказательства), а также, в несколько более широких предположениях, выведена сходная оценка в случае существования корреляции между наблюдениями в выборке.

Приведенные таблицы показывают удовлетворительные результаты аппроксимирования при объеме выборки $4 < n < 10$. М. А. Куликов

9102 К. Введение статистических методов в биологию. Ламотт (Initiation aux méthodes statistiques en biologie. Lamotte Maxime. Paris, Masson et Cie, 1957, 145 p., ill., 2000 fr.), Bibliogr. France, 1958, 147, № 4, 100 (франц.)

9103 К. Введение в статистику для социальных наук. Конолли, Слуцкин (An introduction to statistics for the social sciences. 2nd ed. enlarg. Connolly Thomas Gerard, Sluckin Wladyslaw. London, Cleaver-Hume, 1957 (1958), vii, 166 pp., ill., 16 sh.), Brit. Nat. Bibliogr, 1958. № 423, 9 (англ.)

9104 К. Деловая статистика и статистический метод. Уэлдон, Теркетл (Business statistics and statistical method. Wheldon Harold James. 4th ed. completely rev. Thirkettle G. L. London, Macdonald and Evans, 1957, ix, 270 pp., ill., 15 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 414, 7 (англ.)

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

9105. Теория игр на единичном квадрате. Гиллис, Хейберехтс (Théorie des jeux sur le carré—unité. Gillis Paul P., Huyberechts Simone), Colloq. analyse statist., CBRM, Bruxelles, 1954, Paris, 1955; 159—175 (франц.)

Излагаются известные результаты (РЖМат, 1956, 4717). Кроме того, рассматриваются игры, для которых функция выигрыша $K(x, y) = \log r$ ($r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, $a, b \in [0, 1]$). В этом случае игра имеет единственное решение (кроме случая $a = 1/2$). Приводятся примеры игр с неограниченными ядрами с их решениями.

В. Рихтер

9106. Стратегическая информация в играх и в голосовании. Фаркуарсон (Strategic information in games and in voting. Farquharson Robin), Inform Theory 3rd London Sympos., 1955, London, 1956, 47—52 (англ.)

Доклад о понятии информации в позиционных играх.

И. В. Романовский

9107. Графическое представление в теории игр. Кейперс (Graphic representation in the theory of games. Kuipers L.), Operat. Res. Quart., 1957, 8, № 3, 165—170 (англ.)

Описывается графическое решение матричных игр и систем линейных неравенств с двумя неизвестными.

9108. Приложения исследования операций к военному делу. Заутендейк (Militaire toepassingen van Operations Research. Zoutendijk G.), Statist. neerl., 1956, 10, № 1, 65—73 (гол.; рез. англ.)

Особенности военных действий в условиях территории Голландии.

9109. Применение метода наименьших квадратов в исследовании рынка. Фашинг (Eine Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate in der Marktforschung. Fasching G.), Unternehmensforschung, 1956—1957, 1, № 4, 173—177 (нем.; рез. англ., франц.)

Рассматривается вопрос о выявлении района пониженного сбыта на территории сбыта данного предприятия, разделенной на r районов. Пусть $a_1, \ldots, a_r$ — размеры сбыта определенного продукта в r районах за некоторый промежуток времени; k — число групп потребителей этого продукта ($k \leqslant r$). Численность каждой из k групп в l-м районе b_{ij} ($i = 1, \ldots, r$; $j = 1, \ldots, k$) предполагается известной. «Слабым местом» сбыта предлагается считать тот район, для которого $a_i - A_i < 0$, где $A_i = \sum_{j=1}^{k} x_j b_{ij}$, а x_j определяются из условия $\sum_{i=1}^{r} \left(a_i - \sum_{j=1}^{k} x_j b_{ij}\right)^2 = \min$.

В. В. Петров

9110. Многофакторный анализ деятельности предприятий: приложение техники исследования операций к основной задаче планирования управления и контроля. Уэйнберг (Multiple factor break-even analysis: the application of operations-research techniques to a basic problem of management planning and control. Weinberg Robert Stanley), Res. Operat., 1956, 4, № 2, 152—186 (англ.)

Рассматривается вопрос о наиболее целесообразной деятельности предприятий крупной фирмы в условиях конкуренции. При этом используется ряд эмпирических формул и статистических оценок.

С. С. Кислицын

9111. Выбор и случай в экономическом управлении. Тинберген (Keus en kans in de theorie der economische politiek. Tinbergen J.), Statist. neerl., 1956, 10, № 1, 19—25 (гол.; рез. англ.)

9112. Вычисления на машине СВАК для некоторых задач теории расписаний с матрицей $m \times n$. Нелсон, Джэксон (SWAC computations for some $m \times n$ scheduling problems. Nelson R. T., Jackson, J. R.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, 4, № 4, 438—441 (англ.)

Приведены результаты вычислений на машине СВАК для задачи теории расписаний 3×3 (РЖМат, 1957, 6551). Подчеркивается важность проведения машинных вычислений для задач теории расписаний, изученных пока лишь в некоторых частных случаях. Вычислительная работа, помимо своего прикладного значения, вероятно, поможет выяснить и многие теоретические свойства рассматриваемых задач.

А. А. Корбут

9113. Пропускная способность дорожных перекрестков. Уордроп (The traffic capacity of weaving sections of roundabouts. Wardrop J. G.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 269—284 (англ.)

Пропускная способность секций петель перекрестков и их оптимальные размеры анализируются с помощью следующей формулы, проверяемой предварительно на основе наблюдений на одном из перекрестков, которые были проведены в 1955 и 1956 гг.:

$$Q = \frac{105w\,(1 + e/w)\,(1 - 3w/4l)\,(1 - 1/3p)\,v/h}{1 + 1 \cdot 8h}$$

где Q — максимальный поток, w и l — ширина и длина секции петли соответственно, e — среднее значение ширины подходящих дорог, h — относительный размер средних и тяжелых машин (включая автобусы), v — количество единиц транспорта, p — относительный размер транспортного сплетения. О. Г. Фаянс

9114. Теория игр. Аппарат исследования операций. Вайда (Theory of games. Vajda S.), Engineering, 1958, 185, № 4802, 369 (англ.)

Популярная заметка.

9115. Исследование операций. Де-Смет (Recherche opérationnelle. De Smet André), Bull. inform. et liaison Fédérat. entreprises ind. fabric. métall., 1957, № 557, 149—161 (франц.)

9116. Математическая модель науки управления. Гец (Mathematical models of management significance. Goetz B. E.), Advanced Manag., 1957, 22, № 2, 21—24 (англ.)

9117. Метод Монте-Карло и производственные задачи. Джессоп (Monte Carlo methods and industrial problems. Jessop W. Neil), Appl. Statist., 1956, 5, № 3, 158—165 (англ.)

9118. Об оптимальном программировании распределения пустых вагонов из парков к местам использования. Руссо-Фраттази (Sulla programmazione «ottima» della distribuzione dei carri vuoti dai centri di concentramento ai centri utilizzatori. Russo Frattasi Alberto), Ingegneria ferroviaria, 1957, 12, № 12, 1005—1013 (итал.; рез. франц., англ. нем.)

9119. Распределение пустых вагонов на основе исследования операций. Ласала (La distribution des wagons vides par application de la recherche opérationnelle. Lasala J. de), Bull. Assoc. internat. Congr. chemins fer, 1958, 35, № 2, 163—194 (франц.)

9120. Сбор данных об употреблении машин на фермах. Слейтер (The collection of data on the use of machinery on farms. Slater J. K. W.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 383—392 (англ.)

9121. Выборочный метод при административных ревизиях. Волф (Steekproeven bij administratieve controle. Wolff P. de), Statist. neerl., 1956, **10**, № 1, 35—44 (гол.; рез. англ.)

9122. Исследование операций — администрирование на основе достижений науки. Ситтиг (Operational Research—managers beslissen met behulp van de wetenschap. Sittig J.), Statist. neerl., 1956, **10**, № 1, 1—17 (гол.; рез. англ.)

9123. Область приложений исследования операций в промышленности. Бир (The scope for operational research in industry. Beer Stafford), Instn. Prod. Engrs J., 1957, **36**, № 5, 298—320. Discuss., 321—332 (англ.)

9124. Что сделано в исследовании операций. Леонард (Who's done what in operation research. Leonard Jack C.), Manag. Operat. Res. Digest. 1956, **1**, № 2, 12—15 (англ.)

9125. Международная конференция по исследованию операций в Оксфорде (La conferenza internazionale di Oxford sulla ricerca operativa), Boll. Centro ricerca operat., 1957, № 5-6, 53—59 (итал.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

9126. Важность учета ошибок вычислений как характеристик достоинств вычислительной таблицы. Зом (Die Anwendung der Korrelationsrechnung im Arbeits-und Zeitstudienwesen. Soom E.), Unternehmensforschung, 1956—1957, **1**, № 2, 61—68 (нем.; рез. англ.).

Стандартное отклонение является подходящей мерой для вычислительных ошибок. Величина ошибок при вычислениях может быть значительно уменьшена при учете существенных влияющих факторов и при построении органической динамической системы временных элементов (отрицательная корреляция между последовательными временными элементами). Резюме автора

9127. О некоторых вероятностных задачах из теории счетчиков. Такач (On some probability problems concerning the theory of counters. Takacs L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8, № 1-2, 127—138 (англ.)

В проблеме одного счетчика рассматриваются случайные события, состоящие в поступлении частиц в моменты $t_0, t_1, \ldots$, причем $t_0 = 0$, а разности $t_n - t_{n-1}$ являются положительными, независимыми, одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $F(x)$. В этом случае последовательность $\{t_n\}$ называется рекуррентным процессом событий. Новая последовательность $\{t'_n\}$ получается из следующей модели фильтрации: $t'_0 = t_0$; в момент t_0 возникает импульс продолжительностью χ_0; в момент t_n в счетчике возникает импульс с вероятностью p, если в нем уже имеется импульс, и с вероятностью 1, если в этот момент в нем нет импульса. Предполагается далее, что продолжительности импульсов $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n, \ldots$ образуют последовательность одинаково распределенных независимых положительных случайных величин. Последовательность $\{t'_n\}$ получается из тех моментов времени $\{t_n\}$, которые не перекрываются предшествующими импульсами. Обозначим через ν_t число событий $\{t'_n\}$, появляющихся в течение интервала времени $(0, t]$. В работе исследуется асимптотическое поведение величин ν_t. Через P/t обозначается вероятность того, что за время t не возникнет ни одного импульса. При некоторых предположениях доказывается теорема о существовании предела $\lim_{t\to\infty} P(t) = P$. Автором рассматриваются также системы, состоящие из m счетчиков. Предполагается, что закон появления частиц и схема фильтрации в каждом счетчике подобны вышеописанным, но, вообще говоря, различаются параметрами. Говорят, что система в момент t находится в состоянии E_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$, если в этот момент имеют место импульсы одновременно в k процессах. Если в момент t совершается переход $E_{k-1} \to E_k$, то говорят о k-кратном случайном совпадении. Определяется асимптотическая плотность вероятности k-кратного случайного совпадения.

С. М. Клосс

9128. О статистике электронного умножителя. Яноши (Az elektronsokszorozó statistikájáról. Jánossy Lajos), Magyar fiz. folyóirat, 1955, **3**, № 4, 345—362 (венг.)

Если каждый электрон, падающий на одну из пластинок электронного умножителя, порождает k $(k = 0, 1, \ldots)$ вторичных электронов с вероятностью P_{1k} и P_{Nk} — вероятность того, что k электронов возникнут из N-й пластинки умножителя $(N = 1, 2, \ldots; k = 0, 1, \ldots)$, если на первую пластинку попадает точно один электрон, тогда, полагая

$$G_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{Nk} z^k \quad (N = 1, 2, \ldots),$$

мы имеем $G_N(z) = G_1(G_{N-1}(z))$, т. е. функция $G_N(z)$ может быть получена суперпозицией функции $G_1(z)$ N раз. Автор исследует численное значение $G_N(z)$ $(N \geqslant 2)$, если $G_1(z)$, задано. Обратно, если $G_N(z)$ задано $(N \geqslant 2)$, то $G_1(z)$ может быть определена в принципе по формуле

$$G_1(z) = \lim_{n\to\infty} G_{Nn}\left(1 - \lambda^{1/N}(1 - G_{-Nn}(z))\right), \qquad (1)$$

где $G_{Nn}(z)$ — функция, полученная в результате Nn суперпозиций $G_1(z)$, $G_{-Nn}(z)$ — функция, обратная $G_{Nn}(z)$, и $\lambda = G'_N(1)$, при условии, что λ и $G''_N(1)$ конечны. Доказательство формулы (1) следующее: для $0 < u < 1$, u близкого к 1 имеем: $G_1(u) \sim 1 - \lambda^{1/N}(1 - u)$; таким образом

$$G_{Nn}\left(1 - \lambda^{1/N}(1 - G_{-Nn}(z))\right) \sim$$

$$\sim G_{Nn}\left(G_1(G_{-Nn}(z))\right) = G_1(z).$$

Суперпозиции нецелого порядка (Lémeray M., C. r. Acad. sci. 1889, 128, 278) рассматриваются здесь более детально, чем в предыдущей статье автора (Acta math. Acad. sci. hung., 1951, **2**, 165—175). A. Rényi

9129. Теоретико-вероятностное исследование процесса расщепления длинных цепных молекул. Прекопа (Hosszú láncmolekulák bomlási folyamatának valószínüségszámitasi tárgyalása. Prékopa András), Magyar tud akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, **2**, 103—123 (венг.; рез. русск., англ.)

Автор выводит дифференциальное уравнение для математического ожидания числа молекул длины k (состоящих из k единиц) как функции от времени, предполагая, что разрыв двух связей происходит независимо, и вычисляет это математическое ожидание в специальном случае. Далее вычисляются дисперсия числа молекул длины k и корреляция между числами молекул длины k и длины i, а также математическое ожидание средней длины молекул и оценивается отклонение этого от величины, полученной Симга (Simha R., J. Appl. Phys., 1941, **12**, 569—578) неточным путем. J. Pergel

9130. О некоторых теоретико-вероятностных проблемах, связанных с процессом замедления нейтронов, происходящим в атомных реакторах. **Модьородди, Немет** (Atommagreaktorokban végbemenö neutronlassitás-folyamattal kapcsolatos valószinüségszámitási problémákról. **Модьородди Józsel, Németh Géza**), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, **1**, № 3, 337—348 (венг.; рез. русск., англ.)

Одним из самых важных вопросов теории атомных реакторов является исследование закона замедления нейтронов. Настоящая работа исследует вопрос, сколько столкновений происходит в течение некоторого времени. Рассмотрим нейтрон, обладающий в момент $t=0$ (фиксированной) начальной энергией E_0. Пусть в момент t случайные величины E_t и $\eta_t = \log E_0/E_t$ обозначают соответственно энергию нейтрона и его летаргию. Предположим, что нейтрон движется в бесконечной однородной среде. Пусть эта среда состоит из атомных ядер r различных типов. Пусть $\nu_i(x)$ и $\nu_i^*(x)$ обозначают соответственно плотность столкновения и плотность рассеяния, происходящих на ядрах i-го типа. Пусть далее $C=\nu_1+\ldots+\nu_r$, $C^*=\nu_1^*+\ldots+\nu_r^*$, где эти величины зависят от летаргии x нейтрона. В случае такой модели можно считать, что вероятность того, что нейтрон, летаргия которого есть x, столкнется в промежуток Δt с атомным ядром i-го типа, равна $a\nu_i(x)\exp(-x/2)\,\Delta t + o(\Delta t)$, а вероятность рассеивания равна $a\nu_i^*(x)\exp(-x/2)\,\Delta t + o(\Delta t)$, где $a=\sqrt{2E_0/m}$, m — масса нейтрона. Предположим далее, что столкновения таковы, что во время рассеивания увеличение летаргии нейтрона не зависит от ее значения до столкновения. Пусть $H_i(x)$ — функция распределения увеличения летаргии во время рассеивания на атомном ядре i-го типа. Пусть $F_k(t, x)$ — вероятность того, что нейтрон в промежуток времени $(0, t)$ не поглощается (событие A_t), в момент t его летаргия не превосходит x (событие $\eta_t \leqslant x$) и число столкновений в момент t равно k (событие $v_t = k$), тогда функция распределения $F_k(t, x)$ удовлетворяет данному интегро-дифференциальному уравнению и может быть представлена в явном виде. Дается формула, выражающая условное математическое ожидание $M\{\nu_t \mid \eta_t \leqslant x,\ A_t\}$. В том специальном случае, когда $\nu_i^*(x)=\nu_i^*$, $\nu_i(x)=\nu$, $C^*(x)=C^*$, $C(x)=C$ — постоянные, преобразование Лапласа — Стилтьеса для $F_k(t, x)$

$$\psi_n(t, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-at)^j}{j!}\,\psi_{n,j}(s)$$

может быть вычислено с помощью рекуррентной формулы. В этом специальном случае дано в явном виде и условное математическое ожидание числа столкновений.

Резюме автора

9131. О процессах происшествий, порожденных процессами Пуассона, и о некоторых их технических и физических приложениях. **Реньи, Такач** (Poisson-folyamatok által származtatott történés folyamatokról és azok technikai és fizikai alkalmazásairól. **Rényi A., Takács L.**), Alkalm. mat. int. közl., 1952, **1**, 139—146 (венг.)

Реньи (Publ. math., 1951, 2, 66—73; Magyar tud. akad. Math. és fiz. tud. oszt. közl., 1951, **1**, № 1, 202—212) доказал, что те события в пуассоновском процессе, которые текут в данный момент, тоже будут подчинены распределению Пуассона. В реферируемой статье эта теорема доказывается проще, с помощью предельного закона, относящегося к распределению Пуассона. Реньи распространял эту теорему на процессы происшествий, порожденных обобщенными процессами Пуассона (Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1951, 1, № 2-4, 329—342). Авторы занимаются и этим вопросом, но в другом понимании, и сводят вопрос к простому процессу Пуассона. Вышеуказанные теоремы находят приложение при исследовании колебаний потребления электрической энергии, нагрузки телефонных станций и пространственного заряда электронных трубок.

Резюме автора

9132. Решение интегрального уравнения Больцмана—Гильберта. II. Коэффициенты вязкости и теплопроводности. **Пекерис, Альтерман** (Solution of the Boltzmann—Hilbert integral equation. 2. The coefficients of viscosity and heat conduction. **Pekeris Chaim L., Alterman Zipora**), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, **43**, № 11, 998—1007 (англ.)

Часть I см. РЖФиз, 1957, № 1, 916. Предлагается вычислять коэффициенты вязкости и теплопроводности по формулам, получаемым по методу Энскога и Чэпмана, в котором указанные коэффициенты выражаются при помощи вероятностных функций распределения частиц, а последние разлагаются в ряд по степеням некоторого малого параметра и их явный вид ищется методами теории возмущений с учетом подходящих физических аппроксимаций. В работе используется функция распределения, которая представляется в виде равновесной функции (однородной в пространстве и с максвелловским распределением по скоростям) и неравновесной малой добавки. Для газа молекул принимается модель твердых шаров. В этой модели для неравновесной добавки составляется известное интегральное уравнение Больцмана—Гильберта. Таким образом, задача нахождения коэффициентов вязкости и теплопроводности сводится к нахождению явного вида неравновесной части функции распределения. Путем громоздких математических преобразований трехкратные интегралы, входящие в интегральное уравнение, сводятся к однократным, а затем это уравнение преобразовывается к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка, которое решается при помощи вычислительной машины (основные результаты табулированы).

9133. Возвращения механической системы в первоначальное состояние по Пуанкаре. **Фриш** (Poincaré recurrences. **Frisch Harry L.**), Phys. Rev., 1956, **104**, № 1, 1—5 (англ.)

В связи с исследованиями о происхождении явной необратимости, проявляемой классом простых механических систем, а именно всеми кратно или условно периодическими системами Гамильтона—Якоби, в статье выводятся оценки для времени возвращения по Пуанкаре такой системы через заданные пределы ошибки механического возвращения. С помощью теории диофантовых приближений точно находится тот асимптотический отрезок времени, который система тратит на такие возвращения. Эти результаты позволяют сделать дальнейшие выводы относительно отрезка времени, в течение которого система строго подчиняется второму закону термодинамики, а также о существовании и порядке величины среднего времени возвращения по Пуанкаре для гиббсова множества систем, у которых степени свободы неразличимы. Рассматривается связь между результатами, полученными для этого важного класса механических систем, и разрешением Больцманном и Смолуховским парадоксов тепловой теории, предложенных Цермело, Лошмидтом и др. Детально исследуется чрезвычайно наглядная модель —

одномерный газ из жестких частиц сферической формы. Резюме автора

9134. **Теория аккумуляций всех видов и особенно механических и химических. Мачинский** (Théorie des accumulations de toutes sortes et spécialement mécaniques et chimiques. Matschinski Matthias), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, 43, № 8, 533—542 (франц.)

9135. **Опыт приложения математической статистики к изучению однообразного состава рафинированной стали. Гауч** (Poskus uporabe matematične statistike za spoznavanje enakomernosti sestave plemenitega jekla. Gautsch Otmar), Nova proizvodnja, 1957, 8, № 5-6, 312—313 (словенск.; рез. сербо-хорв., нем., англ., франц., итал.)

9136. **Минимизация энергопотребления для раздробления камня путем наиболее целесообразной установки дробилок первичного и вторичного дробления. Секель** (Kotörés energiaszükségletének minimalizálása az eloés utántörok legeélszerúbb beállísával. Székely G.), Alkalmazott mat. intéz. közl., 1952, 1, 157—163 (венг.)

Из результатов А. Н. Колмогорова (Докл. АН СССР, 1941, 31, № 2, 99—101) известно, что распределение величины зерен раздробленного материала логарифмически нормально. Для практического применения этих результатов автор дает номограммы для проведения двухстадийного измельчения щековыми дробилками, с помощью которых щековые отверстия регулируются так, что эффективность дробилок максимальна. Резюме автора

9137. **Использование группирования в минералогических изысканиях. Энгел** (Use of clustering in mineralogical and other surveys. Engel J. H.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 180—196 (англ.)

Рассматривается проблема двухстадийного поиска. Первая стадия (предварительный поиск) несовершенна: некоторые объекты поиска пропускаются, а иногда, при отсутствии объектов, фиксируются ложные сигналы. При второй стадии, или детализированном поиске, объекты, если только они присутствуют, всегда обнаруживаются. Однако детализированный поиск труден, дорог и занимает много времени, поэтому его концентрируют в областях, где он имеет шансы привести к успеху. Проблема разрешается применением «техники группирования», с помощью которой осуществляется интерпретация результатов, полученных при нескольких прохождениях данной области на первой стадии поиска. Даются меры эффективности для выбора оптимального равновесия усилий между первой и второй стадиями. Определяются вводные параметры и приводятся иллюстрирующие примеры. Возможные области применения — разведки олова, урана, свинца, меди или цинка, для которых предварительные изыскания проводятся при помощи приборов (например, магнетометров или индикаторов радиации), установленных на самолетах, грузовиках, суднах и т. п. Резюме автора

9138. **Элементарный анализ системы Леонтьева. Мак-Кензи** (An elementary analysis of the Leontief system. McKenzie Lionel), Econometrica, 1957, 25, № 3, 456—462 (англ.)

Новым элементарным способом доказываются стандартные теоремы о системе линейных уравнений $Bx = y_n$ с матрицей $B = \| b_{ij} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, типа Леонтьева $\left(b_{ij} \leqslant 0 \text{ при } i \neq j, \; y_i \geqslant 0, \; \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \geqslant 0 \right)$. Это относится к существованию единственного неотрицательного решения, к свойствам дуальности, эффективности и доходности, а также к обобщению, позволяющему производить замену вкладов в промышленность. Резюме автора

9139. **Исследование критерия экономичности для вычислительного аппарата. Штенгель** (Recherche d'un critère d'économicité pour un appareil de comptage. Stengel J.), Rev. statist. appl., 1957, 5, № 4, 101—109 (франц.)

9140. **Проблема транспорта. Джон** (Transport problem. John P. W. M.), Math. Gaz., 1957, 41, № 338, 275 (англ.)

9141. **О теории замены оборудования со случайным временем между авариями. Уэйсс** (On the theory of replacement of machinery with a random failure time. Weiss George H.), Naval Res. Logist. Quart., 1956, 3, № 4, 279—293 (англ.)

Известна вероятность $R(t)$ того, что оборудование, установленное в момент $t = 0$, проработает без аварии до момента t. Для удлинения срока службы через промежутки t_0 производится замена оборудования. Вычислены моменты функции $R_k(t)$ — вероятности того, что оборудование проработает без аварий время $kt_0 + t$ $(kt_0 \leqslant t \leqslant kt_0 + t_0)$. Аналогичные вычисления проделаны для случайной замены с известной функцией распределения $1 - F(t)$. С. С. Кислицын

9142. **Статистический риск при использовании правил арбитража относительно расценок шерстяной пряжи. Брени** (Risques statistiques encourus lors de l'application des règles d'arbitrage relatives au taux des fils peignés. Breny H.), Bull. Inst. text. France, 1956, № 60, 37—49 (франц.; рез. англ.)

Правила арбитража, установленные Интернациональной федерацией по шерсти относительно расценок шерстяной пряжи, могут быть применены только с помощью показаний выборки, взятой из рассматриваемой партии. Такие правила необходимо подвержены случайным ошибкам, но чем больше выборка, тем меньше значение риска неправильного решения. Размеры этого риска изучаются здесь в соотношении с объемом выборки. Резюме автора

9143. **Чувствительность предложенного метода качественного контроля. Стивенс** (Sensitivity of a proposed method of quality control. Stevens W. L.), Санкия, Indian J. Statist., 1957, 18, № 1-2, 13—18 (англ.)

Рассматривается качественный контроль при помощи «проходных» калибров. Для того чтобы показать, когда среднее проходит через контрольные пределы, автор предложил использовать индикатор $c - a$, где $c - a$ — числа объектов в выборке, которые соответственно не проходят через верхний проходной и проходят через нижний непроходной предел. С целью изменения чувствительности контроля Бхаттачария (Bhattacharyya B. C., Санкия, 1955, 15, 210—213) предложил делать точные измерения тех объектов, которые оказались вне контрольных пределов. При этом, этим объектам приписываются «веса», пропорциональные абсолютной величине разности результата измерения и пределов калибра. В реферируемой работе сравниваются чувствительности этих двух методов контроля. Р. Х. Дивеев

9144. **О методе усеченного теста для продолжительности жизни. Сугияма Китабатакэ** (On a method of truncated lifetesting. Sugiyama Hiroshi, Kitabatake Satoshi), Math. Japon., 1955, 3, № 4, 152—160 (англ.)

Пусть x — некоторая характеристика элементов совокупности, представленной для инспекции; x^0 — фиксированная величина (нижний предел спецификации характеристики). Если $x < x^0$, то данный элемент называется дефектным. Пусть, далее, p_1 — истинная доля, а p_0 — приемлемая доля (приемлемый уровень качества) дефектных элементов совокупности, α и β — ошибки первого и второго рода. Предполагается, что наблюдения над x, в объеме n, производятся упоря-

доченным образом $x_{1n} \leqslant x_{2n} \leqslant \ldots \leqslant x_{rn} \leqslant \ldots \leqslant x_{nn}$. Когда форма распределения x известна, в реферируемой работе дается следующее решающее правило оценки гипотезы $H_0 : p \leqslant p_0$ принять H_0, если $x_{r^*n^*} > x^0 + \lambda^*$, отвергнуть H_0, если $x_{r^*, n^*} < x^0 + \lambda^*$, где n^*, r^* и λ^* выбираются так, чтобы функция стоимости контроля $c(n, r) = c_1 n + c_2 r$ достигала минимума при данных p_0, p_1, α и β. Подробно разбираются случаи нормального и экспоненциального распределений. Р. Х. Дивеев

9145. Об одном стохастическом процессе, связанном с контролем качества. Секей (Egy minőségellenőrzéssel kapcsolatos sztochaztikus folyamatról. Székely Gábor), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl, 1953, 2, 217—222 (венг.; рез. русск., нем).

Контролер проверяет несколько станков-автоматов. Предполагая, что известны: 1) распределение времени, протекающего до возврата контролера к одному и тому же станку, 2) вероятность изготовления брака после порчи некоторого станка, — и что распределение периода правильного хода некоторого станка экспоненциально, автор дает математическое ожидание 1) периода разлаженного производства, 2) количества выработанного брака за данный период. J. Pergel

9146. Применение метода вариационной статистики в микробиологических исследованиях. Захарченко А. Ф., Почвоведение, 1958, № 3, 89—95 (рез. англ.)

Формулируется ряд выводов, полученных на основе применения элементарных методов математической статистики к определению характера варьирования микробиологических свойств почвы на территории опытной станции «Союз НИХИ» в Вахшской долине Таджикской ССР. Н. В. Смирнов

9147. Об использовании в метрологии методов теории случайных функций. Чехонадский Н. А., Измерит. техника, 1958, № 2, 3—6

Указывается, как на основе теории случайных функций можно получить выражение для математического ожидания и дисперсии относительной погрешности измерительной системы, зная погрешности ее отдельных звеньев и постулируя некоррелированность их. Приводится пример расчета. Н. В. Смирнов

9148. Методы математической статистики при контроле массового производства. Пардубский (Matematicko-statistické methody při kontrole hromadné výroby. Pardubský B.), Pokroky mat., fys a astron., 1957, 2, № 5, 534—544 (чешск.)

9149. Добавление к работе «Применение теории вариационных рядов при статистическом контроле качества». Фонтаньи, Шаркади, Ваш (Kiegészités «a rendezett minták elméletének alkalmazása a statisztikai minőségellenörzésben» cimü dolgo zathoz. Fontányi Ágota, Sarkadi Károly, Vas Éva), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, 1, № 3, 399—403 (венг.; рез. русск., нем.)

Таблицы предыдущей статьи (РЖМат, 1958, 6055) относятся к уровню 95% и 99%. На основании возникших на практике запросов добавление дает соответствующие таблицы для уровня 99,8%. Резюме автора

9150. Некоторые результаты в теории кодирования для каналов с шумами. Шеннон (Certain results in coding theory for noisy channels. Shannon Claude E.), Inform. and Control, 1957, 1, № 1, 6—25 (англ.)

В первой части работы рассматривается дискретный канал без памяти, заданный переходными вероятностями $p_i(j)$ того, что сигнал на входе E_i переходит в сигнал на выходе $\bar{E}_j$, $i = 1, \ldots, a$, $j = 1, \ldots, b$, и целым числом n-длинной передачи. Кодовым словом на входе автор называет совокупность $(E_{i_1}, \ldots, E_{i_n})$, а кодовым словом на выходе — совокупность $(\bar{E}_{j_1}, \ldots, \bar{E}_{j_n})$. Условная вероятность того, что на выходе возникнет слово $v = (\bar{E}_{j_1}, \ldots, \bar{E}_{j_n})$ при условии, что на вход подано слово $u = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_n})$, равна, по определению, $p(u|v) = p_{i_1 j_1} p_{i_2 j_2} \ldots p_{i_n j_n}$. Кодом длины M автор называет отображение $f(i)$ совокупности чисел $1, \ldots, M$ в множество слов на входе, а декодирующей системой — отображение $g(v)$ множества кодовых слов на выходе в множество $1, \ldots, M$. Вероятностью ошибки он называет число

$$P_e = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \sum_{g(v) \neq i} p(v|f(i)).$$

Цель первой части работы — нахождение точных оценок для вероятности P_e. Пусть задано некоторым произвольным образом распределение вероятностей $p(u)$ в множестве кодовых слов на выходе. Положим

$$I(u, v) = \frac{1}{n} \log \frac{p(v|u)}{\sum_u p(u)\, p(v|u)}.$$

Положив вероятность пары (u, v) равной $p(u)$, $p(v|u)$, мы можем считать $I(u, v)$ случайной величиной (среднее значение этой величины равно информации, содержащейся в случайном слове на выходе относительно случайного слова на входе); пусть $\rho(x)$ — ее функция распределения. Автор показывает, что для любых целого μ и положительного θ существуют код и декодирующая система такие, что

$$P_e \leqslant \rho(R + \theta) + e^{-n\theta},$$

где $R = \frac{1}{n} \log M$. Пусть далее

$$\bar{I}(i, v) = \log \frac{p(v|f(i))}{\frac{1}{M} \sum_u p(v|f(i))}.$$

Положив вероятность пары (i, v) равной $\frac{1}{\mu} p(v|f(i))$, мы можем считать $\bar{I}(i, v)$ случайной величиной (ее среднее значение равно информации, содержащейся в случайном сообщении (i) относительно случайного слова на выходе); пусть $\bar{\rho}(x)$ — функция распределения этой случайной величины. Показывается, что для кода и декодирующей системы, миминизирующих P_e

$$\frac{1}{2} \rho\left(R - \frac{1}{n} \log 2\right) \leqslant P_e \leqslant \rho\left(R - \frac{1}{n} \log 2\right).$$

Пусть далее p_i $(i = 1, \ldots, a)$ — произвольное распределение вероятностей для сигнала на входе E_i. Автор вводит производящую функцию

$$\mu(s) = \log \left\{ \sum_{i,j} p_i p_j(j) \left[\frac{p_i(j)}{\sum_k p_k p_k(j)} \right]^s \right\}$$

и дает оценки для P_e через функцию $\mu(s)$. В частности, если существует

$$R^* = \lim_{s \to -\infty} \left(\mu(s) - (s-1) \frac{d\mu(s)}{ds} \right),$$

то при $R=\frac{1}{n}\log M$ существуют код и декодирующая система такие, что

$$P_e \leqslant e^{(E^*+E^*-R)n},$$

где $E^*=\lim\limits_{s\to-\infty}\left(\mu(s)-s\frac{d\mu(s)}{ds}\right)$. Автор указывает, что полученная верхняя грань не является наилучшей.

Во второй половине работы рассматривается канал с конечным числом состояний памяти $s_1, \ldots, s_e$, т. е. канал, такой, что при заданных состояниях канала S_{k_e} и символе на входе E_{i_e} в l-й момент символ на выходе E_{j_e} имеет условное распределение, не меняющееся, если наложить новые условия на символы на входе и состояния канала до момента l. Автор называет канал вычислимым на входе, если состояние канала в момент $l+1$ однозначно задается его состоянием в момент l и символом на входе в момент l, и вычислимым на выходе, если состояние канала в момент $l+1$ однозначно задается его состоянием в момент l и символом на выходе в момент $l+1$. При некоторых дополнительных требованиях регулярности (аналогичных требованиям существования одного класса и одного подкласса цепи Маркова) автор находит явное выражение для пропускной способности канала, вычислимого одновременно на входе и на выходе, в виде наибольшего собственного значения некоторой целочисленной матрицы. Дается также выражение для пропускной способности канала, вычислимого на входе, включающее, однако, некоторый предельный переход. Р. Л. Добрушин

9151. Обнаружение флуктуирующих импульсных сигналов в присутствии шума. Суэрлинг (Detection of fluctuating pulsed signals in the presence of noise. Swerling Peter), IRE Trans. Inform. Theory 1957, 3, № 3, 175—178 (англ.)

Рассматривается радиолокационный приемник, состоящий из высокочастотного усилителя, квадратичного детектора и линейного интегратора. На вход приемника поступает импульсный сигнал $s(t)$ плюс шум $\xi(t)$. При этом

$$s(t)=\begin{cases}\zeta(t)\sin\omega t, & n(\tau_1+\tau_2)\leqslant t\leqslant n(\tau_1+\tau_2)+\tau_1,\\ 0 & \text{для остальных } t\end{cases}$$

($n=\ldots-1, 0, 1, \ldots$), где τ_1 и τ_2 — фиксированные числа, означающие соответственно длительность импульса и паузы ($\tau_1\ll\tau_2$), а $\zeta(t)$ — случайный процесс, учитывающий флуктуации поперечного сечения рассеяния цели. Шум $\xi(t)$ есть случайный стационарный процесс с гауссовым распределением и нулевым средним.

Картина приема идеализируется следующим образом: считается, что на входе приемника имеются не случайные процессы с непрерывным временем, а последовательность случайных величин $\eta(t_n)=s(t_n)+\xi(t_n)$ с дискретным временем $t_n=n(\tau_1+\tau_2)+\theta\tau_1$ (θ — произвольное положительное число, меньшее единицы, а $n=\ldots-1, 0, 1, \ldots$). Предполагается, для упрощения вычислений, что

$$s^2(t_i)=\sum_{k=1}^{L}u_{k,i}^2 \qquad (i=1, \ldots, N),$$

где L — положительное целое число, а $u_{k,i}$ — случайные величины, распределенные нормально, со средним, равным нулю. Случайные вектора $\mathbf{U}^{(k)}=(u_{k,1}, \ldots, u_{k,N})$ ($k=1, \ldots, L$) считаются независимыми. Выходом интегратора является случайная величина

$$a=\sum_{i=1}^{N}v_i(s(t_i)+\xi(t_i))^2,$$

где v_i — постоянные числа.

Определяется плотность распределения величины a. В предположении, что функция корреляции шума $R(\tau)\approx 1$ при $\tau<\tau_1$ и $R(\tau)\approx 0$ при $\tau>\tau_1+\tau_2$, непосредственным подсчетом найдено выражение для преобразования Лапласа плотности распределения a. Б. С. Цыбаков

9152. Последовательное обнаружение синусоидальной несущей в гауссовом шуме при произвольном коэффициенте заполнения. Бласбалг (The sequential detection of a sine-wave carrier of arbitrary duty ratio in Gaussian noise. Blasbalg H.), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, 3, № 4, 248—256 (англ.)

Статистическая теория последовательного анализа применяется к обнаружению синусоидальной несущей на фоне гауссова шума. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин. Имеют место две гипотезы:

$$\xi_i=\begin{cases}s_i+n_i, & \text{гипотеза } H_1,\\ n_i, & \text{гипотеза } H_0,\end{cases}$$

где s_i есть значение детерминированного сигнала, а n_i — случайная шумовая добавка. Значения n_i не зависят от значений s_j ($j=1, \ldots, n$). Априорная вероятность осуществления H_1 есть d, а H_0 — соответственно $1-d$. Пусть $r_1, \ldots, r_n, \ldots$ — реализация случайной последовательности ξ_i. Предполагается, что плотность распределения величины ξ_i при условии H_0 есть

$$p_0(r)=re^{-\frac{1}{2}r^2},$$

а величины ξ_i при условии H_1 —

$$p_\eta(r)=re^{-\frac{1}{2}(r^2+\eta^2)}I_0(\eta r) \qquad (i=1, \ldots, n, \ldots),$$

где η — фиксированная постоянная, равная отношению величины сигнала к величине шума. Найдено, что гипотеза H_0 принимается, если

$$\sum_{i=1}^{n}\log\left[1+d\left(e^{-\frac{1}{2}\eta^2}I_0(\eta r_i)-1\right)\right]\leqslant\log\frac{\beta}{1-\alpha},$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, а α и β — соответственно заданные вероятности ошибок первого и второго рода. Гипотеза H_1 принимается в противном случае. Путем разложения в ряд Тейлора функции $I_0(x)$ и логарифма установлены приближенные неравенства для различных гипотез и формула для среднего числа испытаний. Рассмотрены частные случаи: 1) $\eta<1$, d — произвольно; 2) $\eta>1$, $d\ll 1$. Б. С. Цыбаков

9153. Анализ когерентного интегрирования с приложениями к обнаружению сигнала. Миллер, Бернстейн (An analysis of coherent integration and its application to signal detection. Miller K. S., Bernstein R. I.), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, 3, № 4, 237—248 (англ.)

Теоретически обсуждаются возможности применения когерентного интегрирования к обнаружению синусоидального сигнала на фоне шума.

Идеальным когерентным интегратором, настроенным на частоту ω_0, называется прибор, отклик которого на входной сигнал $e_1(t) = a(t)\cos\omega_0 t + b(t)\sin\omega_0 t$ есть

$$e_2(t) = \cos\omega_0 t \int_0^t a(z)\,dz + \sin\omega_0 t \int_0^t b(z)\,dz.$$

Если на вход прибора поступает случайный процесс

$$\xi(t) = \xi_c(t)\cos\omega_0 t + \xi_s(t)\sin\omega_0 t,$$

где $M\xi = M\xi_c = M\xi_s = 0$, а ξ_s и ξ_c — независимые гауссовы процессы с функцией корреляции $\psi(\tau)$, то выход есть

$$\eta(t) = \eta_c(t)\cos\omega_0 t + \eta_s(t)\sin\omega_0 t.$$

Здесь $\eta_c(t) = \int_0^t \xi_c(t)\,dt$ и $\eta_s(t) = \int_0^t \xi_s(t)\,dt$. Выводятся формулы для функции корреляции процесса $\eta(t)$ через спектральную плотность $w(\omega)$ процесса $\xi(t)$.

В случае, когда имеются n идеальных когерентных интеграторов, настроенных на частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$, вычисляется совместная плотность распределения $p(R_1, \ldots, R_n)$ огибающих $R_1(t), \ldots, R_n(t)$, определяемых равенствами

$$R_r(t) = \sqrt{\eta_{c_r}^2(t) + \eta_{s_r}^2(t)} \quad (r = 1, \ldots, n),$$

Для $p(R_1, \ldots, R_n)$ вычисляются два члена разложения в ряд Тейлора по параметрам G_{rs}

$$G_{rs} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty w(\omega)\,\frac{\sin\frac{t}{2}(\omega-\omega_2)}{\omega-\omega_2}\times$$

$$\times\frac{\sin\frac{t}{2}(\omega-\omega_s)}{\omega-\omega_s}\,d\omega \qquad (r, s = 1, \ldots, n).$$

Доказывается известное положение, что если на вход идеального когерентного интегратора подать $a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t + \xi(t)$, то отношение мощности сигнала к мощности шума на входе будет

$$\rho_1 = \frac{a^2+b^2}{2\psi(0)},$$

а на выходе

$$\rho_2 = \frac{t^2(a^2+b^2)}{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty w(\omega)\left[\frac{\sin\frac{t}{2}(\omega-\omega_0)}{\omega-\omega_0}\right]^2 d\omega}$$

и асимптотически при $t\to\infty$ получается

$$\lambda = \frac{\rho_2}{\rho_1} \sim \frac{t\psi(0)}{w(\omega_0)}$$

В этом случае на выходе интегратора будет процесс

$$[\eta_c(t) + at]\cos\omega_0 t + [\eta_s(t) + bt]\sin\omega_0 t.$$

Вероятность обнаружения сигнала, равная вероятности того, что огибающая на выходе в момент t превосходит некоторое заранее выбранное пороговое число τ, есть

$$1-\beta = \int_\tau^\infty \frac{R}{\Psi(t)}\exp\left\{-\frac{R^2+t^2(a^2+b^2)}{2\Psi(t)}\right\}\times$$

$$\times I_0\left(\frac{Rt\sqrt{a^2+b^2}}{\Psi(t)}\right)dR,$$

где $\Psi(t) = M\eta_c(t)\,\eta_s(t)$, а $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

При использовании n интеграторов вероятность ложной тревоги α выражается как

$$\alpha = 1 - \int_0^\tau \ldots \int_0^\tau p(R_1, \ldots, R_n)\,dR_1 \ldots dR_n.$$

Ставится задача подбора чисел t, τ и n так, чтобы β была минимальной, при фиксированном α. Строгого решения задачи не приводится. Разбирается частный случай, когда $w(\omega) = 0$ при $|\omega| > f$ и $w(\omega) = \omega_0$ для $|\omega| \leqslant f$. Выводятся приближенные формулы для минимальной β. Рассматривается возможность использования в качестве когерентного интегратора идеального параллельного контура состоящего из индуктивности и емкости. Выясняются статистические характеристики такого интегратора. Б. С. Цыбаков

9154. Сопряженная модуляция линейного детектора. **Вилль** (Modulation conjuguée d'une démodulation linéaire. Ville J. A.), Onde électr., 1954, 34, № 325, 372—375 (франц.)

9155. Нагрузка узлов связи в современном телефонном сообщении. **Пиш** (Die Beanspruchung der Bündel im modernen Fernsprechverkehr. Piesch Johanna), Arch. elektr. Übertrag., 1954, 8, № 8. 353—362; № 9, 411—419 (нем.)

9156. Видоизменение математической теории хромосомных перераспределений. **Вейсман** (A modification of the mathematical theory of chromosomal rearrangements. Wijsman R. A.), J. Genetics, 1955, 53, № 1, 167—171 (англ.)

В математической теории хромосомных перераспределений, развитой Катчсайдом, Холдейном и Ли (Haldane J. B. S., Lea D. E., J. Genetics, 1947, 48, № 1; Lea D. E., Catcheside D. G., там же, 1945, 47, № 10), вероятность сцепления членов r расщепленных хромосомных пар в прежнем или новом порядке берется равной q^r, где q — число, заключенное между 0 и 1. В настоящей статье показывается, что эта формула неверна, и выводится новая формула

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2r-1)}{1\,(1+2q)\,(1+4q)\ldots[1+(2r-2)\,q]}\,q^r.$$

На примере демонстрируется, что когда $0 < q < 1$, эта формула дает существенно новые численные результаты для вероятности выживания клетки.

Резюме автора

9157. О проблемах совпадений, происходящих в счетчиках. **Такач** (Részecskeszámlálóknál fellépő koincidencia-problémákról. Takács Lajos), Magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 153—163 (венг.; рез. русск., англ.)

Решаются некоторые проблемы из теории умножителя и счетчика Гейгера—Мюллера с помощью предыдущих результатов автора (Magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl., 1951, 1, 371—386; РЖМат, 1954, 5023; 1957, 7204). Частицы, прибывающие по процессу Пуассона, исследуются умножителем или счетчиком Гейгера—Мюллера. Под действием этих частиц счетчики дают импульс, убывающий по

показательному закону. В точке времени t значением напряжения является сумма этих показательных функций для всех частиц, прибывающих в интервале $[0, t]$. Регистрирующая схема дает сигнал тогда, когда значение напряжения превосходит некоторое фиксированное напряжение a. Автор дает функцию распределения напряжения в обеих случаях и определяет, как изменяется плотность событий процесса Пуассона как функция от a. Автор занимается и проблемами совпадений. Он определяет плотность совпадений как функцию от a. J. Mogyoródi

9158. Случайные процессы в генетике. Моран (Random processes in genetics. Moran P. A. P.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, 54, № 1, 60—71 (англ.)

Райтовская модель случайного генетического процесса изменяется введением дополнительного условия. Вместо предположения об единовременной смене поколений, вводится условие случайности рождений и гибели индивидуумов. Для измененной модели получено точное распределение частот генов в популяции гаплоидных организмов, в которой происходят мутации в обоих направлениях. Для более же сложной модели популяции двуполых диплоидных организмов скорость приближения к гомозиготности найдена при предположении отсутствия мутаций. Эта скорость в два раза больше, чем в моделях Райта. И. Б. Игнатьев

9159. Совместимость гипотезы о «широком диапазоне выживаемости» с гауссовым распределением популяции. Дейвисон (The compatibility of the survival plateaux hypothesis with Gaussian distribution of population. Davison B.), Bull. Math. Biophys., 1957, 19, № 4, 241—246 (англ.)

Часто предполагается, что островершинное гауссово распределение характеристик популяции влечет подобное же распределение вероятностей выживания. Однако такая интерпретация является произвольной и ненужно ограничительной. В статье, напротив, показано, что в тех случаях, когда характеристики зависят от многих генов, даже широкая «зона выживаемости» приводит, при некоторых добавочных условиях, к почти гауссовому островершинному распределению характеристик популяции. Резюме автора

9160. Анализ генетических моделей по методу Монте-Карло. Фрейзер (Monte Carlo analyses of genetic models. Fraser A. S.), Nature, 1958, 181, № 4603, 208—209 (англ.)

9161. Расслоение, балансировка, ковариация. Финни (Stratification, balance, and covariance. Finney D. J.), Biometrics, 1957, 13, № 3, 373—386 (англ.)

Часто на экспериментальные объекты, предназначенные для различных способов обработки, налагают условие, что средние показатели для различных способов обработки в предварительных измерениях будут приблизительно равны. Такая балансировка может быть введена в полностью рандоминизированные планы или же в планы с применением рандомизированных блоков. Изучаются и сравниваются математические ожидания дисперсий средних значений показателей по способам обработки для таких планов и для соответствующих планов без балансировки.

Из резюме автора

9162. К оценке скрытого и инфекционного периодов кори. I. Семьи, содержащие только двух детей, восприимчивых к заболеванию. Бейли (On estimating the latent and infectious periods of measles. I. Families with two susceptibles only. Bailey Norman T. J.), Biometrika, 1956, 43, № 1, 15—22 (англ.)

Анализ заболевания корью в семьях с двумя членами, восприимчивыми к инфекции. Инкубационный период кори предполагается состоящим из двух периодов: скрытого и инфекционного. Предлагается схема, согласно которой скрытый период X распределен нормально со средним m и дисперсией σ^2, а инфекционный период имеет постоянную продолжительность a. При этом заражение второго члена семьи, восприимчивого к заболеванию, во время инфекционного периода рассматривается как пуассоновский процесс с параметром λ (вероятность заражения за время dt равна λdt). Для параметров m, σ^2, a и λ строятся оценки максимального правдоподобия.

А. А. Зингер

9163. Об оценке инкубационного и инфекционного периодов кори. II. Семейства с тремя и более детьми, восприимчивыми к заболеванию. Бейли (On estimating the latent and infectious periods of measles. II. Families with three or more susceptibles. Bailey Norman T. J.), Biometrika, 1956, 43, № 3—4, 322—331 (англ.)

Предполагается, что вероятность инфекции p следует β-распределению с параметрами x и y

$$dF = \frac{1}{B(x, y)} p^{x-1} (1-p)^{y-1} dp \quad (0 \leqslant p \leqslant 1),$$

и определяются параметры этого распределения. Теоретические положения иллюстрируются на конкретном материале относительно семейств с тремя восприимчивыми к заболеванию детьми до 15-летнего возраста, среди которых наблюдался по крайней мере один случай заболевания корью. А. К. Митропольский

9164. Попытка применения теории коллективного риска к страхованию урожая. Филипсон (A tentative application of the collective risk theory to crop insurance. Philipson Carl), Skand. aktuarietidskr., 1955, № 3—4, 201—253 (англ.)

Рассматривается ряд проблем, возникающих при общем страховании урожая. Объем требований на оплату страховых премий есть сложный случайный процесс, он зависит не только от числа требований, но и от суммы, подлежащей оплате по отдельным требованиям. Требования на страховую премию возникают в тех случаях, когда фактический урожай ниже некоторого уровня у какого-либо из застрахованных хозяйств. Страховая премия и должна покрыть часть убытка. Пусть β — размер урожая и пусть его уравнение регрессии $\beta = \zeta + \xi$, где ζ — систематическая часть уравнения регрессии, а ξ — случайная часть его. ζ — функция случайного вектора $E = (E^{(1)}, \ldots, E^{(n)})$, составляющие которого — факторы роста — являются в свою очередь случайными функциями параметров t (время) и u («пространства» в некотором обобщенном смысле). Таким образом в данном случае приходится рассматривать некоторые многомерные случайные процессы. В основном работа касается только марковских процессов. Широко используются в работе в качестве аппроксимации процессы Полиа, в связи с чем рассматриваются некоторые свойства этих процессов. Приводятся различные выражения, которые обычно могут служить хорошими аппроксимациями зависимости ζ от ξ (факторов роста). Дан прием, пользуясь которым, процесс $\beta(t, u)$ при некоторых условиях можно свести к одномерному случайному процессу. Приведены некоторые исследования этого процесса. Б. В. Финкельштейн

9165. Теоретико-вероятностное исследование некоторых сельскохозяйственных вопросов. Цирман (Néhány mezögazdasági kérdés valószínüségszámítási vizsgálata. I. Ziermann Margit L.), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956 (1957), 1, № 4, 547—557 (венг.; рез. русск., нем.)

Рассматриваются различные величины, которые измеряют равномерность сева сеялкой. Автор исходит из предположения, что в случае равномерного сева зерна располагаются вдоль линии, по которой следует сеялка, соответствуя процессу Пуассона, т. е. расстояния между отдельными зернами, которые обозначаются через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, — независимые случайные величины с одинаковыми показательными распределениями. Рассмотрим зерна, попадающие на фиксированный отрезок $(0, T)$. Их число ν является случайной величиной. Для измерения равномерности сева предлагается величина

$$v_k = \frac{\theta_k}{\nu - k + 1},$$

где k — данное целое положительное число,

$$\theta_k = \sum_{i=1}^{\nu-k+1} (\tau_i \tau_{i+1}, \ldots, \tau_{i+k-1})^{1/k}$$

для $\nu \geqslant k$, $\theta_k = 0$ для $\nu < k$.

Доказывается, что если сев в указанном смысле равномерен, то математическое ожидание величины v_k

$$M\{v_k\} = \frac{1}{\lambda}\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]^k \left(1 - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!}\right),$$

где $1/\lambda$ — математическое ожидание расстояний между зернами. Доказано, что для $T \to \infty$ v_k сходится с вероятностью 1 к пределу $\frac{1}{\lambda}\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]^k$. Дается также следующий альтернативный способ измерения равномерности сева:

$$r_k = R_k/(\nu - k + 1),$$

где

$$R_k = \sum_{i=1}^{\nu-k+1}\left(\tau_i + \tau_{i+1} + \ldots + \tau_{i+k-1} - \frac{k}{\lambda}\right)^2.$$

Доказывает, что если $T \to \infty$, то $M\{R_k\} \sim kT/\lambda$ и при $T \to \infty$ r_k сходится с вероятностью 1 к пределу k/λ^2. Резюме автора

9166. Местные изменения и климатическое влияние на продуктивность сахарной свеклы в Бельгии. Снейерс (Variations régionales et influences climatiques dans quelques rendements de la betterave sucrière en Belgique. Sneyers R. Contribs. Inst. roy. météorol. Belgique, 1957, № 37, p. 198—211) (франц.)

9167. Теория информации полной коммуникационной системы связи. Лоб (Information theory of a complete communication system. Loeb J. XII th Gen. Assembly U. R. S. I., Commiss. 6, Boulder, Colo, 1957, № 154, 6 pp.) (англ.)

9168. Модель распределения, приложимая к экономике. Енсен (A distribution model applicable to economics. Jensen Arne. Munksgaard, Copenhagen, 1954, 99, pp.) (англ.)

Излагаются некоторые из теоретических распределений, встречаемых в комбинаторных вероятностях и их континуальных аналогах, а также вкратце рассматриваются некоторые распределения, используемые для эмпирического выравнивания. В книге содержится элементарный разбор дискретных и непрерывных процессов с ожиданием (очереди) и их применения к построению моделей для некоторых экономических проблем. H. Rubin.

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 2, 155.

9169 К. Введение в биостатистику. Банкрофт (Introduction to biostatistics. Bancroft Hulda h, London, Cassell, 1958, xi, 210 pp., ill., 42sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 430, 9 (англ.)

9170 К. Методы математической статистики в биологии и опытном деле. Федоров А. И. Алма-Ата, Казгосиздат, 1957, 150 стр., илл., 7 р.

См. также: 8512, 9172

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев*

9171. Четырехугольники Мёбиуса. Мандан (Möbius tetrads. Mandan Sahib Ram), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 7, Part 1, 471—478 (англ.)

Пусть $T_0 = ABCD$ и $T_1 = A_1B_1C_1D_1$ — два тетраэдра таких, что $ABCD_1$, $BCDA_1$, $CDAB_1$, $A_1B_1C_1D$, $B_1C_1D_1A$, $C_1D_1A_1B$, $D_1A_1B_1C$, $DABC_1$ — плоские четырехугольники.

T_0 и T_1 определяют квадрику Q_1, для которой AB_1, A_1B, CD_1, C_1D — образующие одной серии. Показано, что прямые, пересекающие AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1, сопряжены относительно Q_1; эти трансверсали, согласно введенному определению, гармонически разделяют тетраэдры T_0 и T_1, которые на основании этого свойства легко строятся. Рассматриваются тетраэдры, связанные с T_0 и T_1. В. А. Маневич

9172. Типы четырехугольников. Хотори (Types of quadrilaterals. Hawthorne Frank), Math. Student J , 1957, 4, № 3, 3 (англ.)

Замечается, что в школе рассматривают только выпуклые четырехугольники, хотя многие геометрические теоремы относятся в равной степени к вогнутым четырехугольникам и к четырехугольникам с пересекающимися сторонами. Далее сообщается, что был проделан опыт с подбрасыванием вверх 9027 раз четырех перенумерованных цифрами 1, 2, 3, 4 предметов. После падения на землю соединяли их отрезками в порядке 1, 2, 3, 4, 1 и определяли форму полученного четырехугольника. В результате подсчета оказалось, что приблизительная вероятность появления четырехугольников с пересекающимися сторонами будет $^4/_9$, вогнутых $^1/_3$ и выпуклых $^2/_9$. Отсюда следует, что выпуклые четырехугольники встречаются реже других. Н. В. Наумович

9173. Задача о двух точках (Ганзена). Назаров Н. А., Тр. Молотовск. с.-х ин-та. 1957, **15**, 435—439

Решается задача: найти (на плоскости) координаты (декартовы) двух точек M и P по данным координатам двух других точек A и B и четырем углам, которые можно измерить, находясь в точках M и P, т. е. по углам между прямыми AM и MP, BM и MP, AP и PM, BP и PM. Ю. А. Волков

9174. Гиперболоидная четверка. До (Quadruples hyperboloïdiques. Deaux R.), Mathesis, 1956, № 4—6, 276—278 (франц.)

Дан тетраэдр $(A) = A_1A_2A_3A_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$. Четыре прямые r_i, проходящие по одной через каждую

из вершин тетраэдра (A), образуют гиперболоидную четверку (принадлежат поверхности 2-го порядка), если через каждую вершину A_i тетраэдра (A) проходит прямая S_i, пересекающая прямые r_i, выходящие из трех остальных вершин этого тетраэдра. Впрочем квадрика, несущая четверку, может вырождаться.

Доказывается теорема: Пусть произвольная плоскость ω пересекает грани a_i тетраэдра (A) по полному четырехстороннику (a), а прямые r_i в вершинах R_i полного четырехугольника (R). Для того чтобы r_i образовывали гиперболоидную четверку, необходимо и достаточно, чтобы вершины R_i были полюсами сторон a_i полного четырехсторонника (a) в некотором полярном соответствии.

Рассматриваются некоторые положения, как например: прямые, соединяющие соответственные вершины двух тетраэдров, взаимных относительно квадрики Ф, образуют гиперболоидную четверку.

В. А. Маневич

9175. О строфоиде. Севрен (Sur la strophoide droite. Sevrin A.), Mathesis, 1957, 66, № 1—3, 54—58 (франц.)

Рассматривается строфоида с вершиной O, двойной точкой A, асимптотой Δ, $OA = a$. Кривая — аналагматическая относительно инверсии с полюсом O и степенью a^2. Прямые Oz и Oz' пересекают кривую в четырех точках M_1, M_2, M_1' и M_2', лежащих на одной окружности с центром в точке пересечения перпендикуляров из середин отрезков M_1M_2 и $M_1'M_2'$. При стремлении Oz' к совпадению с Oz окружность коснется строфоиды в точках M_1 и M_2, центр окружности — точка касания перпендикуляра из середины M_1M_2 со своей огибающей π, являющейся параболой с фокусом O, директрисой Δ и вершиной A. Геометрическое место точек V, гармонически сопряженных точке O относительно M_1M_2 — окружность γ, описанная на OA, как на диаметре.

Прямая d проходит через A параллельно Δ; B — точка пересечения Oz с d. Перпендикуляр из середины M_1M_2 пересекает Ox в точке T; точка C, симметричная T относительно B, — центр окружности. Прямые CM и CM' — нормали строфоиды. Прямая P — поляра точки O относительно круга C — пересекает OC в точке Q. В инверсии с полюсом O и со степенью a^2 круг C остается неизменным. Центру C соответствует в инверсии точка Q. Геометрическое место точек Q — кривая, инверсная параболе π — кардиоида с осью Ox, с точкой возврата C и вершиной A. Касательные к строфоиде в точках M_1 и M_2, касательная к параболе π в точке C и касательная к окружности γ в точке V пересекаются в одной точке P. Геометрическое место точек P — диссоида T, для которой A — точка возврата и Δ — асимптота. Из точки P можно к строфоиде провести четыре касательные; две, касающиеся строфоиды в точках M_1 и M_2, и две, касающиеся в точках Q и R. Приводится уравнение четвертой степени относительно параметра, входящего в уравнения строфоиды. Корни уравнения — значения параметра для точек касания. Огибающая прямых QR — кривая третьего порядка, афинная диссоида с точкой возврата в середине OA и с асимптотой Δ. Геометрическое место точек пересечения OA и M_1M_2 — кривая третьего порядка.

В заключение определяется третья точка пересечения QR со строфоидой.

С. И. Зетель

9176. Диссоида Диоклеса. Мак-Карти (The cissoid of Diocles. Mc Carthy J. P.), Math. Gaz., 1957, 41, № 336, 102—105 (англ.)

В статье из пяти подразделений изучается диссоида Диоклеса. С этой целью, прежде всего, рассматривается парабола

$$y^2 = 8ax, \tag{1}$$

уравнение которой в полярной системе координат принимает вид

$$r = \frac{8a\cos\theta}{\sin^2\theta}. \tag{2}$$

Последняя подвергается инверсии относительно окружности радиуса $4a$ с центром в полюсе полярной системы или в начале координат исходной координатной прямоугольной системы. Получается плоская линия

$$r = 2a\sin\theta\operatorname{tg}\theta \tag{3}$$

или

$$y^2(2a - x) = x^3. \tag{4}$$

Эта линия оказывается диссоидой Диоклеса.

В пунктах 2—4 выявляются как свойства диссоиды в отдельности, так и другие свойства, связанные с параболой, окружностью инверсии и с вспомогательной окружностью радиуса a с центром в точке $(a, 0)$. В пункте 5-м отдельно рассматриваются некоторые свойства диссоиды, которые могут быть обнаружены с помощью инверсии параболы.

Г. И. Жотиков

9177. Об одном способе вывода инвариантов преобразования общего уравнения второго порядка. Бондарев А. Л., Уч. зап. Краснодарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 15, 71—72

Излагается вывод инвариантности дискриминанта общего уравнения поверхности второго порядка и корней ее характеристического уравнения относительно преобразования поворота системы координат.

Вывод основан на том, что ненулевой корень характеристического уравнения

$$s = D/d,$$

где D — свободный член уравнения главной диаметральной плоскости, соответствующей корню s, d — расстояние до этой плоскости от начала системы координат. В большинстве случаев в учебной литературе по аналитической геометрии вывод инвариантов поверхности второго порядка основывается на теореме алгебры о линейном преобразовании квадратичной формы, которая не излагается в курсе высшей алгебры в педагогических институтах. Хотя автор настоящей статьи не получил всех инвариантов поверхности второго порядка относительно поворота системы координат, он избегает использования указанной выше теоремы.

В. П. Иваницкая

9178. Об индикатрисе Дюпена для поверхностей в пространстве Лобачевского. Нестеренко М. И., Научн. ежегодник Черновицк. ун-та, 1956 (1957), 1 № 2, 291

В сообщении констатируется, что автор: 1) установил уравнение индикатрисы Дюпена для поверхностей с отличной от нуля полной относительной кривизной; в однородных координатах, при отнесении поверхности к линиям кривизны, это уравнение имеет вид: $a_1x^2 + a_2y^2 = a_3z^2$; 2) исследовал строение поверхности в окрестности точки в зависимости от вида индикатрисы и установил связь значений полной относительной кривизны с формой поверхности.

Никаких выкладок не приведено.

В. Н. Журавлева

9179. Эллипс из сопряженных диаметров. (Die Ellipse aus konjugierten Durchmessern. Frasch H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, 10, № 7, 317—318 (нем.)

Излагается простое решение следующей задачи: с помощью циркуля и линейки построить оси эллипса по данной паре его сопряженных полудиаметров. Решение этой задачи другими методами имеется в учебной литературе, например, в учебнике Глаголева А. А. «Начертательная геометрия» (изд. 1946 г., стр. 31).

В. П. Иваницкая

9180. Изучение сопряженных диаметров гиперболы. Малль (Behandlung der konjugierten Durchmesser bei der Hyperbel. Mall J.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, 10, № 6, 270—271 (нем.)

В основу изучения свойств сопряженных диаметров гиперболы положены уравнения в параметрическом виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{\cos\varphi} \\ y &= b\operatorname{tg}\varphi \end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{aligned} x &= a\operatorname{tg}\varphi \\ y &= \frac{b}{\cos\varphi} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

для гипербол 1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и 2) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$. Пусть $A_1(x_1;\ y_1)$ и $B_1(x_2;\ y_2)$ — две точки, координаты которых удовлетворяют соответственно уравнения (1) и (2) при одном значении φ. Тогда имеем $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{b^2}{a^2}$. Следовательно, диаметры OA_1 и OB_1 гипербол (1) и (2) имеют сопряженные направления.

Далее автор решает следующую задачу: даны указанные выше полудиаметры OA_1 и OB_1; найти величину и направление осей гипербол (1), (2).

В. П. Иваницкая

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

9181. К вопросу общей геометрии зуба эвольвентных прямозубых цилиндрических колес. Данилюк П. М., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1957, вып. 16, 113—115

Дается вывод новой формы уравнения для определения толщины зуба S_x прямозубого цилиндрического зубчатого колеса по дуге любой произвольной окружности радиуса r_x.

Общее выражение толщины зуба S_x, предложенное В. А. Гавриленко (Цилиндрическая эвольвентная зубчатая передача, Машгиз, 1956), имеет следующий вид:

$$S_x = m\frac{\cos\alpha_\partial}{\cos\alpha_x}\left[\frac{\pi}{2}+2\xi\operatorname{tg}\alpha_\partial \pm z(\theta_\partial-\theta_x)\right]$$

и требует предварительного определения значения углов давления (α_x) и эвольвентного (θ_x) для точки M_x.

Автор устанавливает зависимость между величинами $\cos\alpha_x$ и θ_x для точки M_x и коэффициентом f радиального расстояния от точки M_x до делительной окружности.

Новое выражение для толщины зуба S_x дается в функции параметра f. Полученная формула применяется для нескольких частных случаев определения толщины зуба.

А. М. Тевлин

9182. К вопросу построения профиля зуба или впадины цилиндрического колеса по точкам. Данилюк П. М., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1957, вып. 16, 117—120

Дается вывод общих уравнений эвольвенты бокового профиля зуба и впадины прямозубого колеса в координатных системах, начало которых лежит в центре колеса. В качестве параметра в уравнения входит коэффициент f радиального расстояния от точки эвольвенты до делительной окружности.

Автор показывает, как с помощью этих уравнений рассчитать координаты точек и построить теоретический боковой профиль зуба и впадины для колеса, нарезанного с заданным смещением ξ исходного контура. Уравнения для случая изготовления нулевых колес получаются из общих уравнений при значении $\xi=0$.

Автор указывает, что поставленная задача решена в общей форме, в то время как решение, данное проф. Н. И. Колчиным (Аналитический расчет плоских и пространственных зацеплений, Машгиз, 1949), пригодно только для случая приготовления нулевых колес, без учета смещения исходного контура.

А. М. Тевлин

9183. Некоторые вопросы общей геометрии профиля зуба эвольвентного прямозубого конического колеса. Данилюк П. М., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1957, вып. 16, 121—125

Дается вывод уравнения проекции кромки сечения эвольвентной конической поверхности зуба колеса поверхностью дополнительного конуса. Плоскость проекции выбрана перпендикулярной к оси делительного конуса. Параметром в уравнении является коэффициент f расстояния от точки M_x до образующей делительного конуса.

Вначале находится угол развернутости φ_x кромки сечения эвольвентной конической поверхности поверхностью дополнительного конуса в любой ее точке M_x, отстоящей от оси делительного конуса на расстоянии r_x.

Затем определяется угол зацепления α_x и эвольвентный угол θ_x проекции кромки зуба. После подстановки найденных выражений для φ_x, α_x и θ_x получаются весьма громоздкие уравнения искомой проекции кромки сечения эвольвентной конической поверхности поверхностью дополнительного конуса.

Имеются ссылки на другие работы автора (РЖМат, 1958, 2328, 8149).

А. М. Тевлин

9184. Неравенства Карле—Гауптмана и евклидова геометрия. Эллер (Inégalités de Karle-Hauptman et géométrie euclidienne. Eller Gerard von), Acta crystallogr., 1955, 8, № 10, 641—645 (франц.)

Для решения проблемы кристаллографии определения фаз факторов структуры употребляют неравенства Карле и Гауптмана. Сначала изучается центральная кристаллическая структура одного измерения.

Допускается, что электронная плотность строго положительная. Общий критерий положительности, имеющий, например, вид

$$\sum_{h}^{m}\sum_{h'}^{m} Y_h Y_{h'} \hat{F}_{h-h'} > 0 \quad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где Y_n — вещественные, произвольные числа, $\hat{F}_{h-h'} = F_{h-h'}/F_0$, выражает, что некоторая квадратичная форма является положительно определенной, т. е. такой, что определитель

$$D=\begin{vmatrix} \hat{F}_0 & \hat{F}_{-1} & \hat{F}_{-2} & \ldots \\ \hat{F}_1 & \hat{F}_0 & \hat{F}_{-1} & \ldots \\ \hat{F}_2 & \hat{F}_1 & \hat{F}_0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

а также все его миноры, главные диагонали которых состоят только из $\hat{F}_0$, являются положительными. Метод Карле—Гауптмана состоит в том, что для установления положительной природы электронной плотности следует употреблять только эти миноры D.

Но можно ввести пространство в $\mathcal{E}$ с базисом e_j, размерности, равной порядку D, и такое, что для опре-

делителя собственно евклидова фундаментального тензора $\mathfrak{G}$, компоненты которого $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_{j'}$, имеет место равенство

$$D = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3 & \dots \\ \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 & \dots \\ \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \det \mathfrak{G},$$

где D-симметричный, $\hat{F}_h = \hat{F}_{-h}$. Если базисные векторы единичные, то $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_{j'} = \cos\varphi_{j-j'}$, и знание углов $\varphi_{j-j'}$ позволяет в вопросе об определенной положительности $|\mathfrak{G}|$ алгебраическое исследование заменить геометрическим, причем каждый симметричный минор порядка p соответствует подпространству $\mathcal{E}$ размерности p. Среди практически употребительных критериев наиболее простыми являются те, которые содержат углы в вершине триэдра $\mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_{j'}$, $\mathbf{e}_{j''}$ (называемого первичным) пространства $\mathcal{E}$ (детерминанты 3-го порядка Карле—Гауптмана), затем сферически смежные углы в гипертриэдре 4 измерений и т. д.

Если обозначить $\varphi_{j-j'} = \arccos \hat{F}_h$, $\varphi_{j''-j} = \arccos \hat{F}_{h'}$, $\varphi_{j''-j'} = \arccos \hat{F}_{h-h'}$, где $j - j' = h$, $j'' - j = h'$, $j' - j'' = h + h'$, то для того чтобы первичный триэдр был собственно евклидовым, необходимо и достаточно выполнение условий:

1) $0 < \varphi_h + \varphi_{h'} + \varphi_{h+h'} < 2\pi$, 2) $0 < \varphi_h < \varphi_{h'} + \varphi_{h+h'}$;

$$0 < \varphi_{h'} < \varphi_{h+h'} + \varphi_h; \quad 0 < \varphi_{h+h'} < \varphi_h + \varphi_{h'}.$$

Геометрическое исследование первичных триэдров в $\mathcal{E}$ приводит к определению произведений $\hat{F}_h \hat{F}_{h'} \hat{F}_{h+h'}$, для которых условие положительности выполняется, каковы бы ни были значения других факторов структуры.

Употребление этих условий в комбинации с математическими операциями, относящимися к преобразованию D, позволяет получить другие условия, уже касающиеся вторичных триэдров и связанных с минорами Карле—Гауптмана 4-го порядка.

Метод угловых неравенств применяется для центральной положительной структуры двух измерений, затем трех измерений и указывается, что этот метод может быть применен к изучению кристаллических структур не центральных. В. С. Люкшин

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

9185. Приближенная трисекция произвольного угла циркулем и линейкой. Матер, Карр (Approximate trisection of an angle by ruler and compasses. Mather S., Carr A. J.), Math. Gaz., 1957, 41, № 337, 210—211 (англ.)

Приводится простое и достаточно точное приближенное построение трисекции произвольного угла, осуществляемое циркулем и линейкой. Из вершины данного угла $AOB = \alpha$ описывается произвольным радиусом OA дуга окружности s и на отрезке OA как на диаметре, строится полуокружность s_2. Внутри угла проводятся через O такие радиусы OP, OP_2, что $\angle AOP = \frac{\alpha}{8}$ и $\angle AOP_2 = \frac{\alpha}{4}$. Затем проводится прямая CP, где C — середина отрезка OA, и находится точка P_1 пересечения CP с полуокружностью s_2. Строится точка P_1', симметричная точке P_1 относительно OA, и P_1' соединяется с точкой P_2. Прямая P_2P_1' пересекается с полуокружностью в точке P_3. Точка P_3 соединяется с A и находится точка P_4, в которой точка AC_3 пересекается с дугой s_1. $\angle AOP_4 = \frac{\alpha}{3} + \varepsilon$, где ε — погрешность. При этом погрешность ε в зависимости от изменения α изменяется следующим образом: при $0 \leqslant \alpha \leqslant 189°33'40''$ $0 \geqslant \varepsilon \geqslant -0°2'11''$; при $189°33'40'' \leqslant \alpha \leqslant 249°32'0''$ $-0°2'11'' \leqslant \varepsilon \leqslant 0$; при $249°32'0'' \leqslant \alpha \leqslant 360°$ $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0°29'0''$

Н. В. Наумович

9186. Одна из теорем Помпейю. Буиклиу (O teoremă a lui D. Pompeiu. Buicliu Gh.), Gaz. mat. si fiz., 1956, A8, № 4, 175—176 (рум.)

Приведено новое доказательство теоремы, сформулированной в 1930 г. Помпейю: Если ABC, $A_1B_1C_1$ — два подобных треугольника и O — произвольная точка, лежащая в их плоскости, а A' (соответственно B' и C') — четвертая вершина параллелограмма OAA_1A', то треугольник $A'B'C'$ подобен треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$. Н. М. Остиану

9187. Теорема Клеро. Удреску (Teorema lui Clairaut. Udrescu Valeriu), Gaz. mat. şi fiz., 1957, B8, № 5, 241—249 (рум.)

Приведено доказательство обобщенной теоремы Пифагора, данное Клеро (Clairaut A. C.). Сумма площадей произвольных параллелограммов AA_1B_1B и AA_2C_1C (построенных соответственно на сторонах AB и AC заданного треугольника ABC) равна площади параллелограмма ACC_2B_2. Здесь $B_2C_2 \parallel BC$ и проходит через точку A_4, причем $A_4A_3 = MA$, где M — пересечение AB и AC, A_3 — пересечение MA и BC и A_4 лежит на MA.

Н. М. Остиану

9188. Простое доказательство и обобщение одного неравенства, относящегося к треугольнику. Беркеш (Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung. Berkes J.), Elem. Math., 1957, 12, № 6, 121—123 (нем.)

Приводится элементарное доказательство известного неравенства $R_1R_2R_3 \geqslant 8r_1r_2r_3$, где R_i $(i = 1, 2, 3)$ означает расстояния от произвольной точки O, находящейся внутри $\Delta A_1A_2A_3$ до его вершин, а r_i — расстояния от той же точки O до его сторон. Если $\Delta A_1A_2A_3$ — равносторонний и O — его центр, получается равенство.

Далее доказывается существование аналогичного неравенства для тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и точки O, лежащей внутри его: $R_1R_2R_3R_4 \geqslant 81r_1r_2r_3r_4$, где R_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ означает расстояние от O до вершин тетраэдра, а r_i — расстояния от O до его граней. Если тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ правильный и O — его центр, то будет иметь место равенство. Н. В. Наумович

9189. О преобразовании прямоугольника в квадрат (On the transformation of any rectangle into a square), Math. Student J., 1957, 4, № 1, 1—3 (англ.)

Решается задача: разрезать прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AD = a$ и $AB = b$ $(a < b)$ на части таким образом, чтобы из них можно было составить квадрат. Если $b < 4a$, то откладываем на стороне AD отрезок $AE = \sqrt{ab}$, на стороне CB — отрезок $CF = \sqrt{ab}$ и проводим $EK \parallel AB$ (E лежит на отрезке AD, K — на отрезке DF). Разрезав прямоугольник по линиям DF и EK, получим три части прямоугольника, из которых легко составляется квадрат. Если $b = 4a$, то решение очевидно.

Случай $b > 4a$ повторным откладыванием отрезка $\sqrt{ab}$ на стороне AD от точки A приводится к одному из двух предыдущих случаев. В. Ф. Рогаченко

9190. Два приближенных построения правильных многоугольников. Хаубольд (Zwei Näherungs

konstruktionen regelmäßiger Vielecke. Haubold K.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, 10, № 8, 358—359 (нем.)

Приводится два приема приближенных построений правильных вписанных многоугольников:

1. Пусть AB — диаметр данной окружности. Строится равносторонний ΔABS и диаметр AB делится на n равных частей. Точку S соединяют со второй точкой деления C, считая от точки A, и находится та точка D пересечения прямой SC с данной окружностью, которая лежит по другую сторону диаметра AB относительно точки S. Хорда AC — сторона искомого правильного n-угольника, вписанного в данную окружность.

Это построение дает очень точные результаты до 9-угольника включительно. Затем точность несколько уменьшается.

2. Из концов отрезка AB проводят две дуги радиусом AB до пересечения их в точке C. Из C опускается на AB перпендикуляр CO, отрезок CO делится на пять равных частей и такие же отрезки откладываются от точки C на продолжении перпендикуляра. Все полученные точки нумеруются в порядке так, что точка O имеет отметку 1. Отрезок, соединяющий точку A с n-й точкой перпендикуляра CO, есть радиус окружности, описанной около правильного n-угольника со стороной AB. Приведенное построение дает настолько незначительную ошибку, что практически ею можно пренебречь.

И. В. Наумович

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

9191. Об установлении соответствия между кривыми в гиперболической плоскости. Билинский (Über eine gewisse Kurvenzuordnung in der hyperbolischen Ebene. Bilinski Stanko), Comment. math. helv., 1957, 32, № 1, 1—12 (нем.)

Рассматривается кривая E в плоскости Лобачевского, заданная естественным уравнением $k = k(s)$, где k — кривизна, а s — длина дуги кривой. Участки кривой E, где $|k| \geqslant 1$, называются дугами первого рода, остальные — дугами второго рода. Для дуг первого рода, как и в евклидовой плоскости, имеет смысл обычное понятие эволюты. Точкам дуг второго рода не отвечают действительные центры кривизны. Тем не менее и для них оказывается возможным установить некоторое соответствие, подобное соответствию «эволюта — эвольвента».

Каждой точке T второго рода кривой E отнесится точка M, лежащая на пересечении нормали (в точке T) с нулевой линией (базисом) соприкасающейся эквидистанты. Геометрическое место B точек M называется базоидой кривой E, а сама кривая E — эквидистантоидой кривой B.

Устанавливается ряд свойств базоиды, в том числе следующее:

Теорема B. Пусть $\overset{\frown}{MM_1}$ — дуга базоиды, отвечающая дуге $\overset{\frown}{TT_1}$ ее эквидистантоиды, n — нормаль эквидистантоиды, проходящая через точки T и M, а b_1 — базис соприкасающейся эквидистанты для точки T_1 эквидистантоиды. Если прямые n и b_1 пересекаются в точке N и образуют при этом угол $\vartheta = \sphericalangle MNM_1$, то площадь области MM_1N, ограниченной прямыми n и b_1 и дугой $\overset{\frown}{MM_1}$, равна $F = \frac{\pi}{2} - \vartheta$. Если при этом функция $k(s)$ монотонна на дуге $\overset{\frown}{TT_1}$ (например, монотонно возрастает), то дуга $\overset{\frown}{MM_1}$ базоиды не рассекает сегмент $\overline{NM_1}$ базиса b_1, и тогда $F > 0$, т. е. $\vartheta > \frac{\pi}{2}$.

Длина дуги σ базоиды B связана с длиной дуги s эквидистантоиды E соотношением

$$d\sigma = \frac{[\dot{k}^2 + (1-k^2)^2]^{1/2}\, ds}{1-k^2}.$$

Если $\varkappa$ — кривизна базоиды, то параметрические уравнения базоиды имеют вид:

$$\varkappa = \frac{[\dot{k}(1-k^2) + 3kk^2](1-k^2)^{3/2}}{[k^2 + (1-k^2)^3]^{3/2}},$$

$$\sigma = \sigma_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{[\dot{k}^2 + (1-k^2)^3]^{1/2}}{1-k^2}\, ds.$$

Обратно, если дана кривая $\varkappa = \varkappa(\sigma)$, то формулы

$$k = \operatorname{th}\left[u_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sin\left(\varphi_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \varkappa d\sigma\right) d\sigma\right],$$

$$s = s_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left\{\operatorname{ch}\left[u_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sin\left(\varphi_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \varkappa d\sigma\right) d\sigma\right] \times \cos\left(\varphi_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \varkappa d\sigma\right)\right\} d\sigma$$

при любых u_0, φ_0, s_0 задают параметрические уравнения эквидистантоиды $k = k(s)$, для которой $\varkappa = \varkappa(\sigma)$ является базоидой.

Если не ограничиваться вещественной областью плоскости Лобачевского, то различие между дугами первого и второго рода становится несущественным. Для дуг первого рода существуют действительные эволюты, а базоиды состоят из идеальных элементов. Для дуг же второго рода, наоборот, базоиды действительны, а эволюты состоят из идеальных элементов.

И. С. Иохвидов

9192. Автоморфные инволюционные корреляции коаксиальных проективных винтовых преобразований. Берейс, Браунер (Die automorphen involutorischen Korrelationen koaxialer projektiver Schraubungen. Bereis R., Brauner H.), Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1956, Abt. 2. 165, № 8—10, 327—355 (нем.)

Проективными винтовыми преобразованиями называются коллинеации, составляющие 1-параметрическую группу, переводящую в себя все поверхности второго порядка, пучка с общим косым четырехсторонником прямолинейных образующих. Диагонали этого косого четырехсторонника называются осями проективного винтового преобразования. Траектории этих преобразований называются проективными винтовыми линиями. Развертывающиеся поверхности, огибающие семейства соприкасающихся плоскостей этих линий, называются проективными винтовыми торсами. Рассматриваются различные инволюционные корреляции, при которых точки проективных винтовых линий переходят в плоскости, касающиеся проективных винтовых торсов. Произведения этих корреляций на инволюционное кубическое бирациональное преобразование, переводящее каждую точку проективной винтовой линии в соприкасающуюся плоскость этой линии в этой точке, являются кубическими бирациональными преобразованиями, переводящими проектив-

ные винтовые линии в себя. Полученные результаты интерпретируются также с помощью неевклидовых и вырожденных неевклидовых метрик, абсолюгами которых являются квадрики пучка. Аналогичная задача решается также для евклидова пространства.

Б. А. Розенфельд

9193. О методах определения углов наклона координатных осей к аксонометрической плоскости проекций. Задорожний А. М., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1957, вып. 16, 105—108

Графическим построением, основанным на совмещении единичных отрезков пространственных координатных осей с плоскостью осей OX, OY, OZ чертежа, устанавливается аналитическая зависимость между двумя заданными углами наклона аксонометрических осей к осям эпюра и углами наклона пространственных осей к плоскости триметрических проекций, а также третьей аксонометрической осью. Рассуждения подкреплены примерами. Принятые обозначения не объяснены.

Л. Н. Лихачев

9194. К вопросу составления аксонометрических сборочных чертежей. Сухина И. А., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1957, вып. 16, 127—132

Приводятся методические указания по практическому выполнению учебных сборочных аксонометрических чертежей, с подразделением работ на шесть этапов: выбор вида аксонометрии; главного вида сборки; масштаба изображения; способа построения; выполнение аксонометрического чертежа; оформление.

Л. Н. Лихачев

9195. О фронтальной косоугольной изометрии. Сухина И. А. Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1957, вып. 16, 133—135

Обосновываются рекомендации применения косоугольной фронтальной изометрии при $\angle XOY=45^\circ$, для упрощения построения аксонометрических изображений деталей со сложными фронтальными контурами и небольшой толщиной. Без доказательств приводятся неполные данные по построению четырех центровых овалов для изображения кругов в основных плоскостях и очерка аксонометрии шара в этой изометрии.

Л. Н. Лихачев

9196. Применение центрального проектирования при решении задач на пересечение в эпюре. Руубель (Tsentraalprojekteerimise kasutamine loikumisülesannete lahendamisel epüüris. Ruubel A.), Eesti Põllumaj. Akad. teaduslike tööde kogumik, Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1957, 3, 385—396 (эст., рез. русск).

Рассматривается малоизвестный в литературе способ вспомогательного центрального проектирования для решения некоторых задач на пересечение конических и некоторых других поверхностей с плоскостью и друг с другом. Если центр вспомогательного проектирования поместить в вершине одного из конусов, то этот конус вместе с находящейся на нем линией сечения проектируется в контур своего основания. После этого выполняются обратные построения. Этот метод дает эффективный результат, если мы имеем такие поверхности, горизонтальные сечения каждой из которых являются подобными фигурами, причем соответственные точки которых лежат на некоторой данной кривой и которые можно из различных центров S_1, S_2, S_3 . . . . , расположенных на определенной оси, спроектировать в горизонтальный след этой поверхности. Приводится четыре примера позиционных задач на пересечение, решаемых этим методом.

Н. В. Наумович

9197. Определение наивысшей и наинизшей точек линии взаимного пересечения наклонных цилиндров и конусов. Нейфах Г. М., Сб. научн. работ Моск. ин-т нар. х-ва, 1957, вып. 10, 323—334

Рассматривается построение наивысших точек линии пересечения наклонных цилиндров и конусов, имеющих круговые основания в плоскости проекций (в любых сочетаниях), а также наклонных цилиндров и конусов с наклонными призмами и пирамидами. Метод определения низших и высших точек основан на использовании сечений плоскостями уровня. Получаемые в сечениях фигуры будут подобны основаниям. Наивысшие и наинизшие точки линии пересечения тел будут те, в которых получаемые фигуры в плоскости уровня будут касаться друг друга.

В работе подробно рассмотрены примеры пересечения двух цилиндров, конусов, а также пересечения наклонного цилиндра с наклонной призмой.

Л. И. Бабушкин

9198. Площади и объемы отсеков винтовых линейчатых поверхностей (геликоидов). Бубенников А. В., Сб. статей Всес. заочн. политехн. ин-та, 1957, вып. 19—20, 247—253

Применяются графические методы построения проф. М. Я. Громова к определению площадей и объемов отсеков винтовых линейчатых поверхностей (геликоидов). Опираясь на соотношение

$$\Delta f = \Delta F \cdot \cos\alpha,$$

где ΔF — площадь плоской фигуры, Δf — площадь ее проекции, α — угол между плоскостями проектируемой фигуры и плоскостью проекций, автор показывает, как пользуясь бесконечно тонкими круговыми кольцами, в которые проектируются бесконечно малые отсеки винтовых лент поверхности, можно построить фигуру, в форме криволинейной трапеции, равновеликую (приближенно) рассматриваемому отсеку геликоида. Дается также способ построения криволинейной трапеции, площадь которой численно равна объему отсека винтовой линейной поверхности.

Л. И. Бабушкин

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

9199. О бирациональной эквивалентности кривых при специализации. Хоу, Ланг (On the birational equivalence of curves under specialization. Chow Wei-Liang, Lang Serge), Amer. J. Math., 1957, 79, № 3, 649—652 (англ.)

Специализацией $\bar{Z}$ рационального цикла Z в проективном пространстве S^n над полем k с дискретным нормированием и с максимальным простым идеалом p в кольце нормирования называется цикл, полученный из Z редукцией mod p в смысле Шимуры (РЖМат, 1956, 2408). Специализация $\bar{A}$ абелева многообразия (м) A называется невырожденной, если $\bar{A}$ — абелево м. над $\bar{k}$ (полем вычетов k относительно p) и закон композиции в нем является специализацией закона композиции в A; аналогично, специализация $\bar{C}$ неособенной кривой C называется невырожденной, если $\bar{C}$ — неособенная кривая.

Показывается, что если A и B — абелевы м. и T — бирациональный изоморфизм между ними и если $\bar{A}$ и $\bar{B}$ невырождены, то $\bar{T}$ — многообразие и определяет бирациональный изоморфизм между $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Аналогично, если C_1 и C_2 — неособенные кривые положительного жанра и F — бирациональное соответствие между ними и если $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ невырождены, то $\bar{F}$ — бирациональное соответствие между $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$. Последний результат обобщает результат Дейринга для случая кривых жанра 1 (РЖМат, 1956, 7848).

В. В. Морозов

9200. Об одном вероятном неравенстве между характерами алгебраической поверхности. Цаппа

(Sopra una probabile disequaglianza tra i caratteri invariantivi di una superficie algebrica. Z a p p à G u i d o), Rend. mat. e applic., 1955, 14, № 3, 455—464 (итал.)

Пользуясь известными соотношениями между характерами алгебраической поверхности, автор получает некоторые неравенства между ними, эквивалентные одному неравенству, выдвинутому им ранее в качестве гипотезы (Acta Pont. Accad. Sci., 1943, 7, 4—8). Здесь приводятся два из них: (1) $p^{(1)} \leqslant 8p_a + 10$; (2) $\delta + 2p \geqslant k/3$ (δ — класс кривой разветвления поверхности, k — число ее двойных точек, p — жанр производящего плоскостного сечения).

Оправдывая последнее неравенство, автор показывает, что оно действительно выполняется для некоторых систем плоскостей и, следовательно, поверхностей, допускающих специализацию в виде таких систем. Как известно (РЖМат, 1956, 4806), существуют регулярные поверхности, для которых $p^{(1)} = 8p_a + 1$, и иррегулярные, для которых $p^{(1)} = 8p_a + 9$, так что верхняя грань неравенства (1) экспериментально не достигнута. В. В. Морозов

9201. Некоторые соображения о многообразиях, касательные многообразия которых опираются нерегулярно на данные многообразия. Г а л л а р а т и (Alcune osservazione sopra le varieta i cui spazi tangenti si appoggiano irregolarmente a spazi assegnati. G a l l a r a t i D i o n i s i o), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 20, № 2, 193—199 (итал.)

Автор рассматривает многообразия V_k пространства S_r, касательные многообразия S_k которых высекают на некоторых заданных многообразиях многообразия высшей размерности, чем те, которые даются начальным многообразием V_k.

1. Известна теорема Северн и Сегре: Необходимое и достаточное условие того, чтобы касательные S_k многообразия V_k в пространстве S_r опирались на данное S_b по многообразию S_a, состоит в том, чтобы V_k было составлено из ∞^{k-a-1} многообразий V_{a+1}, содержащихся в линейных пространствах измерения $b+1$, проводящих через заданное S_b. Теорема эта эквивалентна предложению: конус, проектирующий V_k (проективного пространства S_r) из S_b ($b < r$) имеет измерение пространства, объединяющего S_b с S_k, касательным к V_k. Пусть V_k — многообразие, касательные S_k которого имеют общее S_a с данным S_b, и обозначим через $\sum$ конгруэнцию, образованную многообразиями V_{a+1}, лежащими на V_k и принадлежащими пространствам S_{b+1}, проходящим через S_b и через W_{k+b-a} конус, проектирующий V_k из S_b. Тогда S_k касательные к V_k в точках одной из V_{a+1}, содержатся в одном и том же S_{k+b-a}, которое касается W_{k+b-a} по S_{b+1}, содержащем V_{a+1}; эти же пересекаются по два в одном пространстве измерения $\geqslant k-b+a$. Если в S_k выбрать однородную проективную систему координат так, чтобы S_b изображалось уравнениями

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_{r-b-1} = 0, \tag{1}$$

то V_k может быть представлено уравнениями

$$\begin{gathered} \rho x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_{k-a-1}) \\ (i = 0, 1, \ldots, r-b-1) \\ \rho x_j = \varphi_j(u_1, u_2, \ldots, u_{k-a-1}, u_{k-a}, \ldots u_k) \\ (j = r-b, r-b+1, \ldots, r). \end{gathered} \tag{2}$$

Обратно, все S_k, касательные к каждому V_k, изображаемому уравнениями (2), имеют общее S_a с пространством S_b, изображаемым уравнениями (1).

2. Далее автор устанавливает: измерение конуса $S_{b-\varepsilon}V_k$, проектирующего из общего подпространства $S_{b-\varepsilon}$, принадлежащего S_b (при условии, что $S_{b-\varepsilon}$ и общее S_a не содержатся в одном пространстве размерности меньше b, так что $\varepsilon \leqslant a+1$), равно $k + b - a$, т. е. совпадает с размерностью конуса S_bV_k. Если V_k — алгебраическое неприводимое многообразие, то конус S_bV_k алгебраический и представляет собой алгебраический неприводимый конус T^b, так что

$$S_bV_k = \lambda_1 T^{(b)},$$

аналогично

$$S_{b-a-1}V_k = \lambda_2 T^{(b-a-1)},$$

откуда заключается, что S_b должно пересекать V_k по многообразию размерности по крайней мере равной a. Особо рассматривается случай, когда S_b имеет с V_k общее многообразие V_a и его применение к поверхностям Веронезе.

3. Далее рассматривается многообразие W, покрытое пространствами (S_m), опирающимися на $m+1$ многообразий $V_{a_0}, V_{a_1}, \ldots, V_{a_m}$ и свойства его касательного многообразия в точке A, пробегающей точки $A_0, A_1, \ldots, A_m$, в которых пространства S_m опираются на $V_{a_0}, V_{a_1}, \ldots$

4. Указанные результаты, в частности, применяются к поверхности F четырехмерного пространства S_4. Если ее касательные плоскости проходят через фиксированную точку, поверхность будет конусом; если ее касательные плоскости пересекают по прямой фиксированную плоскость, то конус, проектирующий F из этой плоскости, будет трехмерным и, следовательно, F состоит из частей, каждая из которых принадлежит некоторому S_3, проходящему через фиксированную плоскость. Единственными случаями, представляющими некоторый интерес, будут такие, когда касательные плоскости F опираются (в переменных точках) на одну или большее число прямых, попарно косых. Если все касательные плоскости F опираются на прямую a, конус aF будет трехмерным и на F существует система $\sum$ плоских кривых, принадлежащих плоскостям, проходящим через a. Если выбрать проективную однородную систему координат так, чтобы прямая изображалась уравнениями $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, то каждая полость F, не содержащаяся в S_3 ($x_0 = 0$), представится уравнениями:

$$\frac{x_0}{1} = \frac{x_1}{\varphi_1(u)} = \frac{x_2}{\varphi_2(u)} = \frac{x_3}{\varphi_3(u, v)} = \frac{x_4}{\varphi_4(u, v)} \tag{3}$$

и обратно, все касательные плоскости поверхности в S_4, изображаемой этими уравнениями, опираются на прямую $x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

5. Если касательные плоскости поверхности F в S_4 опираются на две скрещивающихся прямых a и b, то эти плоскости пересекают заданное S_3 по прямым линейной конгруэнции K, которая случайно может быть специальной. Если конгруэнция K общая, то поверхность может быть представлена уравнениями:

$$\frac{x_0}{1} = \frac{x_1}{\varphi_1(u)} = \frac{x_2}{\varphi_2(u)} = \frac{x_3}{\theta_3(v)} = \frac{x_4}{\theta_4(v)}$$

Поверхность F, касательные плоскости которой пересекают данное S_3 ($x_0 = 0$) по прямым специальной конгруэнции, изобразится уравнениями:

$$\frac{x_0}{0} = \frac{x_1}{u} = \frac{x_2}{\alpha(u)} = \frac{x_3}{v} = \frac{x_4}{v\alpha'(u) + \beta(u)}$$

т. е. что это будет линейчатая поверхность, имеющая директрисой особую прямую конгруэнции K.

6. В заключение статьи автор указывает типы поверхностей, касательные плоскости которых опираются на три прямые попарно скрещивающихся; эти типы довольно просты. С. С. Бюшгенс

9202. О поверхностях пространства S_5, касательные плоскости которых опираются на заданные плоскости. Галларати (Sulle superficie di S_5 i cui piani tangenti si appoggiano a piani assegnati. Gallarati Dionisio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, **20**, № 3, 329—338 (итал.)

Продолжая свое исследование о касательных пространствах, которые опираются на заданные пространства (реф. 9201), автор рассматривает поверхности в пятимерном S_5, касательные плоскости которых опираются на некоторые плоскости, попарно не содержащиеся в S_3, или опирающиеся на одну плоскость α и имеющие с ней только по одной точке, или встречающие две плоскости α и β одного S_4, или опирающиеся на три плоскости α, β, γ, попарно инцидентные, или опирающиеся на четыре плоскости, попарно имеющие общую точку и т. д.

С. П. Фиников

9203. Восстановление приоритета. Галларати (Restituzione di priorità. Gallarati Dionisio), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 3, 382—383 (итал.)

См. реф. 9201 и реф. 9202, а также Терračини (Terracini A., Ann. mat. pura ed appl., 1938, **17**, № 4, 23—44).

9204. Некоторые кубические и квадратичные преобразования в проективном R_n. Гермер (Einige kubische und quadratische Transformationen im projektiven R_n. Germer Henning), Math. Nachr., 1956, **15**, № 5—6, 299—338 (нем.)

Статья является изложением диссертации автора, защищенной им в Вюрцбурге в 1955 г. Гудзон (Hudson H. P., Cremona-transformations to plane and space. Cambridge, 1927) показал, что в трехмерном пространстве существуют кремоновы преобразования (к.п.) любого порядка, которые не могут быть получены последовательностью преобразований низших порядков. Таким образом возникает проблема исследования других таких способов образования к. п., которые позволили бы свойства к. п. получить из известных свойств выбранных преобразований. Под влиянием одной работы Шмидта (H. Schmidt. Обобщение проективной инверсии, 1946) автор поставил себе задачей исследование отображений на системах v^n или v^{n-1} прямых и эти системы рассматривал в согласии с некоторыми замечаниями Гудзона (там же) как сопровождающий комплекс известного выбранного преобразования. Как простейший случай такого принципа построения автор выбирает коллинеации в качестве заданного к. п. и корреляцию за дуальное отображение. Пусть в проективном n-мерном пространстве R_n над полем комплексных чисел дается коллинеация

$$x' = x \cdot A, \quad A \neq \rho E$$

и некоторая произвольно выбранная корреляция

$$x k \tilde{y} = f \mid x,\ y \mid = 0, \tag{1}$$

где точка x представляется матрицей — строкой ее проективных координат, A, K — квадратные матрицы с постоянными элементами из основного тела, $\tilde{A}$ — транспонированная матрица, $\tilde{x}$ — столбец координат точки.

Прямая $\overline{xx'}$ состоит из всех точек

$$y = x \cdot (\mu A + \lambda E \mid, \tag{2}$$

и эта система уравнений описывает сопровождающую систему прямых для коллинеации A. Гиперплоскость (1) и прямая (2) имеют по крайней мере одну общую точку, определяемую отношением ее параметров

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{f(x,\ x')}{f(x,\ x)} \tag{3}$$

или рациональным представлением

$$y = x' f(x,\ x) - x f(x,\ x'). \tag{4}$$

Точка y определяется для всех точек x, кроме тех, которые принадлежат главному пространству H_ρ относительно $A : x' = a_\rho k$ ($\rho = 1, 2, \ldots, r$) (в этом случае (2) не определяет прямую), и тех, которые принадлежат многообразию $M : f(x, x) \equiv f(x, x') = 0$. Соотношение (4), за указанными исключениями, определяет вообще кубическое рациональное отображение R_n на самого себя или на его подпространство.

Если это есть к. п., то фундаментальные многообразия первоначального многообразия (относительно A) должны содержаться в M и H_ρ. В отношении порядка отображения (4) мы получим следующие специальные случаи. Квадратичное преобразование получится, если все уравнения системы (4) в правых частях выделяют некоторый общий линейный множитель $y_\nu = l(x)\Phi_\nu(x)$, где $l(x)$ линейно, Φ_ν — квадратичные формы без общего делителя. В этом случае (4) неопределенно для всех точек $l(x) = 0$, т. е. эта гиперплоскость содержится либо в M, либо в одном из H_ρ; преобразование не выше квадратичного, если

$$f(x,\ x) = l(x)\, m_1(x), \quad f(x,\ x') = l(x)\, m_2(x) \tag{5}$$

или матрица A есть матрица центральной коллинеации. Далее (4) дает линейное преобразование, если $y_\nu = \Phi(x)\, l_\nu(x)$; квадратичная гиперповерхность $\Phi = 0$ не может содержаться в многообразиях H_ρ, следовательно, или она тождественна с M, или она распадается в гиперплоскость (5) и на главное многообразие центральной коллинеации.

Далее автор, считая, что A дается в нормальной форме Жордана с характеристиками Сегре, строит и подробно исследует семейство обратных матриц (2) и инвариантное относительно A многообразие $M(y)$. Определяется совокупность точек, для которых лучи сопровождающей системы содержат точку y; эти точки принадлежат $M(y)$ и образуют в нем рациональную нормальную кривую, устанавливается порядок последней. Обращение преобразования (4) для общей корреляции будет вообще $(d-1)$-значно, где d — степень минимального полинома $\delta(\lambda, \mu)$ для A. Корреляции (1) по отношению к данной коллинеации с матрицей A классифицируются по видам разложения на неприводимые множители полинома $\delta(\lambda, \mu)\, f(x, y)$. Относительно данного отображения (4) назовем x регулярной точкой, если (4) не является неопределенным относительно x или иначе x вне квадрик $f(x, x') - a_\rho f(x, x) = 0$. Если x регулярна, то отображение (4) будет а) кубическим, если $f(x, x)$ и $f(x, x')$ не имеют общего множителя и порядок минимального полинома равен $D \geqslant 2$, обратное отображение будет $(D-1)$-значно, б) квадратичным, если $f(x, x) = f(x)\, m_1(x)$, $f(x, x') = l(x)\, m_2(x)$, и притом $m_1(x) \not\equiv m_2(x) \not\equiv m_1(x')$, в) линейным, если $bf(x, x) +$

$+cf(x, x') \equiv 0$, $\frac{b}{c} \neq -a_p$. Порядок отображения (и обращения) понижается на единицу, если (2) описывает связку (центральная коллинеация).

Исследуются также нерегулярные точки и их свойства. Разобраны довольно подробно и частные виды указанного преобразования. С. С. Бюшгенс

9205. Модели канонических поверхностей жанров $p_g=4$ и $p^{(1)}=13, 14, \ldots, 33$. (Первая заметка). **Бюрниат** (Modéles de surfaces canoniques de genres $p_g=4$ et $p^{(1)}=13, 14, \ldots, 33$. Premiere note. Burniat Pol), Bull. Cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, 43, № 10, 720—730 (франц.)

Построение канонических поверхностей с $p_g=4$ и $p^{(1)}$ изменяющимся от 13 до 33=8 4+1. Таким образом, такие поверхности существуют для всех целочисленных линейных жанров от 6 до 33 (РЖМат, 1955, 1931; 1956, 4806). В. В. Морозов

9206. Дальнейшие свойства псевдоабелевых многообразий. **Рот** (Further properties of pseudo—Abelian varieties. Roth Leonard), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte 1, 1957, 27, 1—15 (англ.)

Доказываются новые свойства псевдоабелевых многообразий (м.) (РЖМат, 1956, 8274). Каждое алгебраическое м., допускающее конечную непрерывную коммутативную группу автоморфизмов, либо псевдоабелево, либо пикарово; исключение составляет случай, когда оно пластинчатое (содержит конгруэнцию линейных пространств) и тогда все его плюрижанры — нули. Если W_p — псевдоабелево типа q, то конгруэнция $\{V_q\}$ высекает на каждом элементе $\{V_{p-q}\}$ инволюцию, порожденную конечной группой автоморфизмов V_{p-q}; группа эта циклическая или абелева с базисом $k\,(2 \leqslant k \leqslant 2q)$. Каждое псевдоабелево м. W_p допускает представление вида

$$v=(G_1g_1)^{1/n_1}+\ldots+(G_kg_k)^{1/n_k},\ F=0,\ f=0,$$

где G_i, F — полиномы от $x_1, \ldots, x_{q+1}$, g_i, f — полиномы от $y, \ldots, y_{p-q+1}$ и n_i — целые. Приводятся некоторые соображения о классификации псевдоабелевых м. и указывается один тип параабелевых м. (РЖМат, 1956, 4860), обладающий свойствами, сходными со свойствами псевдоабелевых м.

Указывается, что приоритет в рассмотрении псевдоабелевых м. принадлежит Дантони (Dantoni G., Ann. mat., 1945, 24, 177). В. В. Морозов

9207. Алгебраическое приближение многообразий. **Уоллес** (Algebraic approximation of manifolds. Wallace Andrew H.), Proc. London Math. Soc., 1957, 7, № 26, 196—210 (англ.)

Пусть M и M' — два дифференцируемых многообразия размерности r, дифференцируемо вложенные в n-мерное евклидово пространство E_n, и $B(\delta)$ — нормальный пучок к M радиуса δ (объединение $(n-r)$-мерных открытых шаров радиуса δ, описанных вокруг каждой точки $p \in M$ в нормальном к M в точке p пространстве; δ столь мало, что пучок существует). Если M' — сечение $B(\varepsilon)$ $(\varepsilon \leqslant \delta)$ и проекция $B(\delta)$ в M переводит касательное линейное многообразие (м.) к M' в любой его точке в ε-приближение касательного линейного м. к M в соответствующей точке (т. е. в многообразие, которое задано в ортогональной координатной системе уравнениями $y_i=\sum_i^r a_{ij}x_j$, $\sum|a_{ij}|^2<\varepsilon$, $i=1, \ldots n-r$, если уравнение касательного линейного м. к M будет $y_i=0$), то M' называется ε-приближением многообразия M. Показывается, что если M компактно и ε — заданное число, то в E_n существует вещественное алгебраическое м. W_0, изолированная пола которого является ε-приближением M; более того, можно построить в E_n вещественное алгебраическое м., состоящее из двух гомеоморфных раздельных пол, одна из которых будет сколь угодно точным приближением M. Теорема эта обобщает результат Наша (Nash, J., Ann. Math., 1952, 56, 405—421).

Приближения посредством полости вещественного алгебраического м., состоящего только из этой полости, называются чистыми. Указываются случаи м., допускающих чистые приближения: компактное ориентируемое ограничивающее дифференцируемое м. в E_n; компактное ориентируемое дифференцируемое м. размерности 1, 2, 3, 6, 7 в любом евклидовом пространстве; полное пересечение двух компактных дифференцируемых м., трансверсальных друг другу во всех точках пересечения; компактное дифференцируемое ориентируемое м. M размерности r, дифференцируемо вложенное в дифференцируемое м. W размерности $r+1$ или $r+2$, так, что фундаментальный цикл M гомологичен нулю в W.

В. В. Морозов

9208. Заметка о производных и дифференциалах на алгебраических многообразиях. **Розенлихт** (A note on derivations and differentials on algebraic varieties. Rosenlicht Maxwell), Portug. math., 1957, 16, № 1—2, 43—55 (англ.)

Изложение теории производных и дифференциалов на алгебраических многообразиях. Построение алгебр Ли и инвариантных дифференциалов в случае алгебраической группы. Применение к изучению связных коммутативных алгебраических групп: доказываются некоторые свойства дифференциалов на них.

В. В. Морозов

9209. Теория циклических инволюций, принадлежащих алгебраической поверхности и ее приложения. **Годо** (La théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et ses applications. Godeaux Lucien), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1957, 25, № 1, 3—15 (франц.)

Первые исследования инволюций, принадлежащих алгебраической поверхности и имеющих лишь конечное число соединенных точек, принадлежит Энрикесу (Enriques) и Севери (Severi) (Acta Math., 1909, 32); следует отметить также работы Банъера (Bagnera) и де Франши (de Franchis) (1908 и 1910 гг.). В дальнейшем автор занимался изучением инволюций с конечным числом соединенных точек жанра один, а также бижанра один; эти работы и литературные указания имеются в монографии автора: Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (Actualités scientifiques, № 270, Paris, Hermann, 1935).

Последние работы привели автора к изучению циклических инволюций, имеющих конечное число соединенных точек и принадлежащих некоторой произвольной алгебраической поверхности. Пусть F — поверхность, содержащая инволюцию, а Φ — образ этой инволюции, на котором точки дирамации изолированы. Если Φ жанра один или бижанра один, то точки дирамации будут двойными, если же Φ любая, то точки дирамации могут иметь любую кратность (не выше порядка инволюции); автором было доказано, что касательный конус в точке дирамации распадается не более как на четыре рациональных конуса. И прием, использованный при этом, давал структуру точки дирамации, т. е. совокупность рациональных кривых, эквивалентных этой точке в смысле алгебраической геометрии. В данной статье автор дает подробное резюме своих работ (1943—1953 гг.), относящиеся к указанной теме, а также тех, где он давал применение первых, доказывая существование поверхностей, имеющих заданные особенности.

С. С. Бюшгенс

9210. Иррегулярности алгебраических многообразий и присоединенные системы. Северн (Les irrégularités des variétés algébriques et les systèmes adjoints. Severi Francesco), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 19, 2333—2336 (франц.)

См. РЖМат, 1957, 3449. Подмногообразие V_k алгебраического многообразия M_r называется топологически общим, если всякий h-цикл многообразия M_r гомологичен некоторому h-циклу на V_k ($h \leqslant k$); V_k носит название ординарного подмногообразия индекса s, если s-иррегулярности V_k и M_r совпадают. Присоединенной системой гиперповерхности A многообразия M_r называется сумма A и канонической системы рода $r-1$ многообразия M_r.

Всякая внешняя форма ω первого рода, обращающаяся в нуль на топологически общем подмногообразии V_k многообразия M_r, равна нулю и на M_r. Если V_k — топологически общее ординарное подмногообразие индекса $k-1$ многообразия M_r, то наименьшее возможное значение k-иррегулярности для V_k равно k-иррегулярности q_k многообразия M_r.

Иррегулярность присоединенной системы ординарной гиперповерхности A индекса $r-1$ многообразия M_r равна числу независимых форм ω первого рода, заданных на M_r и обращающихся в нуль на A. Все результаты даны без доказательств.

Г. Б. Гуревич

9211. О построении проективно-канонических поверхностей. Годо (Sur la construction de surfaces projectivement canoniques. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, 43, № 10. 699—704 (франц.)

Указывается способ построения поверхностей, полная каноническая система которых задается системой гиперплоскостных сечений (проективно-канонических, по терминологии автора). Каждая такая поверхность получается как образ принадлежащей некоторой алгебраической поверхности циклической инволюции, число слитых точек которой конечно и все они первого рода.

В. В. Морозов

9212. Замечания о групповых системах линейной эквивалентности и алгебраической эквивалентности для гиперповерхностей некоторого многообразия. Северн (Osservazioni sui sistemi gruppali d'equivalenza lineare e d'equivalenza algebrica per le ipersuperficie d'una varietá. Severi Francesco), Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1956, 20 № 3—4, 127—135

Вносятся некоторые дополнения к теории групповых систем эквивалентности (РЖМат, 1956, 9060) гиперповерхностей на алгебраическом многообразии V. Алгебраическая эквивалентность не сводится к линейной только в том случае, если поверхностная иррегулярность q многообразия V положительна. Каждая групповая система эквивалентности распадается в семейство линейных систем. В связи с этим представляют интерес полные алгебраические системы полных линейных систем. Такая система называется обыкновенной, если она содержит ∞^q полных линейных систем, и аномальной в противном случае. Как алгебраическое многообразие (м.), обыкновенная система бирационально эквивалентна первому м. Пикара W_q для V; этим устанавливается одновременно алгебраическая структура каждой групповой системы эквивалентности. Существуют и аномальные полные системы ∞^{q_1} линейных систем ($q_1 < q$), бирационально эквивалентные м. Пикара W_{q_1}; в частности, если V — м. Пикара, то каждая полная непрерывная система на нем бирационально эквивалентна м. Пикара. Приводятся некоторые факты, относящиеся к аномальным системам на поверхности.

В. В. Морозов

9213. Исследование и эффективное построение непрерывных групп преобразований Де-Жонкьера. Дедо (Analisi e costruzione effettiva dei gruppi continui di trasformazioni di De Jonquières. Dedó Modesto). Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 21, № 1—2, 71—79 (итал.)

Автор ставит себе задачу определения и построения всех непрерывных групп преобразования плоскости Де-Жонкьера, проективно различных, с помощью непосредственного исследования их характеристических свойств. Непрерывная группа таких преобразований характеризуется как совокупность преобразований определенного порядка n, которые имеют общий центр O (кратная фундаментальная точка) и $n-1$ простых фундаментальных точек $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ для каждого прямого и обратного ему преобразования; остальные $n-1$ фундаментальных точек (J) суть точки, сопряженные точкам K_i, и они являются фундаментальными точками преобразования J^{-1}, отличными от точек K_i. Таким образом каждая непрерывная группа (J) характеризуется порядком преобразования, центром и фундаментальными точками K_i; выбрав центр O, $n-1$ точек K_i можно задать произвольно с одним лишь ограничением, чтобы каждая пара их не оказалась бы на одной прямой с центром O. Известно, что преобразований J порядка n, имеющих данный центр, будет $\infty^{\frac{1}{2}n+2}$; если $n-1$ точек K_i заданы в общем виде, то это налагает $4(n-1)$ условий и таким образом в общем случае мы получим группу, зависящую от шести параметров.

Под заданием точек K_i в «в общем виде» автор имеет в виду исключить случай, когда точки K_i расположены на мононде с вершиной в O и порядка меньшего $\frac{n-1}{2}$. Размерность группы (J) может увеличиться, если точки K_i расположены специальным образом, именно на мононде с вершиной порядка $\mu < \frac{n-1}{2}$; в этом случае размерность группы может увеличиться на число $n-1-2\mu$. Далее автор сначала исследует случай, когда n — нечетное и $n-1$ точек K_i общего расположения; введем преобразование T Де-Жонкьера порядка

$$m = \frac{n+1}{2}$$

имеющее центр в O и все остальные простые фундаментальные точки в точках K_i. Тогда преобразование

$$P = T^{-1}JT$$

будет по известной теореме порядка

$$(2m+n-2)-2(n-1)=1;$$

отсюда обратно

$$J = TPT^{-1}$$

и, следовательно, в данных условиях группа (J) получается из группы ∞^6 проективитетов, которые оставляют неподвижной точку O, с помощью частного преобразования Де-Жонкьера (именно T^{-1}), которое имеет центр в точке O и все простые фундаментальные точки (общие со своим обратным преобразованием) в точках K_i.

Если n — четное, то общее расположение точек K_i понимается как такое, при котором они не принадлежат мононду с вершиной O порядка ниже $\frac{n}{2}$. В этом

случае введем преобразование T с центром O порядка $\frac{n}{2}$ и имеющие $n-2$ фундаментальные точки во всех точках K_i, кроме одной. Преобразуя какое-нибудь J группы с помощью T, мы получим квадратичное преобразование, которое оставляет неизменным не только пучок прямых, соединяющих O с фундаментальными точками (кроме одной), но и пучок из точки Q, которая получилась преобразованием T из оставшейся точки K_i (не фундаментальной для T). В этом случае группа (J) строится из группы квадратичных преобразований, оставляющим неизменными два пучка (O) и (Q), с помощью специального преобразования $J_0 = T^{-1}$, которое одну из точек K_i преобразует в Q и имеет все простые фундаментальные точки (общие со своим обратным преобразованием) в остальных точках K_i; предыдущие построения предполагали существование преобразования T, которое имеет фундаментальными точками все точки K_i (при n нечетном) или все, кроме одной, при n четном. Преобразование Де-Жонкьера T центра O и порядка m становится вырожденным, когда его $2m-2$ простых фундаментальных точек принадлежит моноиду M (распадающемуся) центра O и порядка $\mu < n-1$. Моноид M вообще распадается на неприводимый моноид N порядка ν и на $m-\nu$ прямых через O, тогда фундаментальные точки T принадлежат N. Здесь можно найти преобразование T Де-Жонкьера порядка $m = \mu + 1$, имеющее фундаментальными точками все $\mu - \nu$ точек K_i вне моноида N и $\mu + \nu$ точек, произвольно выбранных среди точек K_i на моноиде N; это преобразование будет невырожденным. Тогда группа (J) получится преобразованием T^{-1} из преобразований Де-Жонкьера, которые имеют фундаментальные точки, принадлежащие окрестности первого порядка точки O ($n-2m-1$ точек, преобразованных с помощью T из точек K_i, не являющихся фундаментальными для T).

С помощью указанных построений непрерывных групп Де-Жонкьера дается затем переход к их аналитическому изображению. С. С. Бюшгенс

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

9214. Точечное соответствие между двумя трехмерными многообразиями, сохраняющее линии нулевой второй кривизны. Гульельмино (Corrispondenze puntuali fra due varietà a tre dimensioni che conservano le curve aventi nulla la seconda curvatura. Guglielmino Francesco), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 1, 57—60 (итал.)

В заметке рассматриваются два метрических трехмерных многообразия U_3 и U_3', находящиеся в точечном соответствии. Пользуясь соответствующими координатными системами, автор вводит в рассмотрение фундаментальные метрические квадратичные дифференциальные формы

$$ds^2 = a_{ij}dx_i dx_j, \quad ds'^2 = a'_{ij}dx'_i dx'_j$$

и соответствующие им кристоффелевы символы второго рода, разность которых обозначается через

$$\rho^h_{ij} = \left\{ \begin{matrix} ij \\ h \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} ij \\ h \end{matrix} \right\}.$$

Используется ранее известный результат, что соответствие между двумя многообразиями, сохраняющее линии нулевой первой кривизны (по утверждению автора, геодезические линии), имеет место и соблюдается, если выполняются условия

$$2\rho^j_{ij} - \rho^i_{ii} = 0 \ (i, j = 1, 2, 3; j \neq i),$$

$$\rho^h_{ij} = 0 \ (i, j, h = 1, 2, 3; j \geqslant i; h \neq i, j).$$

В последующем доказывается, что эти 15 условий являются необходимыми и достаточными для того, чтобы соответствие между U_3 и U_3' сохраняло линии нулевой второй кривизны. Г. И. Жотиков

9215. Ортогональные обобщенно-лиувиллевы сети, допускающие вращение. Комиссарук А. М., Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 6, 271—300

Обобщенно-лиувиллевой сетью (L_m) называется ортогональная изотермическая сеть, в параметрах которой первая квадратичная форма поверхности может быть приведена к виду $ds^2 = (U(\bar{u}) + V(\bar{v}))^m \times (d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$ или к виду $ds^2 = U(\bar{u})\,V(\bar{v})\,(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$ (в последнем случае сеть называют обобщенно-спиральной и относят ей значение $m = \infty$). Рассматриваются лишь те сети L_m, которые после поворота сетевых направлений на один и тот же постоянный угол остаются сетями L_m с тем же значением m, образуя, следовательно, пучок сетей L_m. Автор доказывает, что векторы x сетевых направлений искомого пучка сетей L_m определяются как решения дифференциального уравнения

$$(\nabla\psi)' x = \lambda x, \qquad (1)$$

где λ — скаляр, $\psi = \psi(\varphi)$ — скалярная функция аргумента φ, удовлетворяющая обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка $\psi'' = 2\frac{m+1}{m}\psi'$, а аргумент φ — некоторое решение дифференциального уравнения $\Delta\varphi + K = 0$ (K — гауссова кривизна поверхности). $\nabla\psi$ есть вектор $\psi_{|\alpha}$, а $(\nabla\psi)'x$ — вектор, равный $\nabla\psi^i_{|\alpha}x^\alpha$.

Поскольку уравнение (1) может иметь решение только для функций ψ, существующих на поверхностях вращения и их изгибаниях, то автор лишь среди таких поверхностей ищет те, на которых имеются пучки сетей L_m. Устанавливается, в частности, что на торсах существуют пучки L_m всех видов (т. е. для любого значения m), что на поверхностях $K = \text{const} \neq 0$ и только на них существуют пучки сетей Бонне ($m = -2$) и только такие пучки. При этом предполагается, что как в первом, так и во втором случаях в число сетей пучка на поверхности не входит сеть s, которая переходит в сеть меридианов и параллелей при изгибании данной поверхности на поверхность вращения. Что касается сети s, то она всегда является сетью L_m для любого значения m.

Автор находит вид первой квадратичной формы поверхности для различных значений m как в случае, когда пучок сетей L_m не содержит сети s, так и в случае, когда он содержит эту сеть. Между прочим, оказывается, что пучки сетей Бонне, содержащие сети s, существуют только на поверхности $K = \text{const} < 0$.

На каждой поверхности (за исключением торса) могут существовать пучки только одного вида (т. е. для одного значения m), причем на поверхностях переменной гауссовой кривизны пучок может быть только одним. Что касается поверхностей $K = \text{const}$, то на них не исключена возможность существования двух пучков сетей L_{-2}, не содержащих сети s.

Автор находит в частности, пучки сетей L_m торса, не содержащие сетей меридианов и параллелей. Очень подробно исследуются пучки сетей Бонне на различных поверхностях постоянной кривизны. Устанавливается, в частности, что линии сети Бонне суть линии постоянной геодезической кривизны. Определяется полное число пучков сетей Бонне на плоскости, на сфере, на гиперболической плоскости и, следовательно, на всех поверхностях, изгибаемых на них. Н. И. Кованцев

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

9216. Метрическая двойственность обобщенных пространств. Моор (Metrische Dualität der allgemeinen Räume. Moor Arthur), Acta scient. math., 1955, 16, № 3—4, 171—196 (нем.)

Обобщенное метрическое пространство (о.м.п.) есть многообразие ковариантных (контравариантных) векторных плотностей веса $-p$ $(+q)$, в которое с помощью основной функции $L(x, t)$ (x^i — точка, $t = t_i$, (t^i) — ковариантная (контравариантная) плотность) вводится определенная геометрия, в частности, метрический тензор g_{ij}, параллельное перенесение Γ^i_{jk} и т. д. о. м. п. являются обобщением пространств Финслера и Картана, геометризирующих вариационные проблемы с одной или несколькими переменными.

Пусть R_n и R_n^* — два о. м. п. с фундаментальными элементами (x, z) и (x, z^*) соответственно. Они называются двойственными, если существует взаимно однозначное соответствие

$$x^i \equiv x^i, \qquad z^i = \varphi^i(x, z^*), \qquad \left|\frac{\partial \varphi^i}{\partial z^{*k}}\right| \neq 0$$

между их фундаментальными элементами, при котором

$$g_{ij}(x, z) = g^*_{ij}(x, z^*).$$

Доказывается, что для двойственных R_n и R_n^* возможны лишь следующие случаи:

1. Плотность z и z^* обе ковариантны (контравариантны), а веса их равны. Тогда $z_i \equiv z^*_i$ ($z^i \equiv z^{*i}$), и R_n, R_n^* полностью совпадают.

2. Плотности $z = z_i$ ковариантны, $z^* = z^{*i}$ — контравариантны, а веса их отличаются знаком $(p = q)$. Тогда

$$z_i = g_{ik} z^{*k}.$$

3. Векторы кручения A^i и A^{*i} равны нулю.

Доказывается, что для двойственных о.м.п. параметры перенесения и тензоры кривизны совпадают. Для случаев 2 и 3 это устанавливается с помощью соприкасающихся римановых пространств.

А. С. Солодовников

9217. О значении производной вектора единичной нормали к гиперповерхности. Каул (On the magnitude of the derived vector of the unit normal to a hypersurface. Kaul R. N.). Tensor, 1957, 7, № 1, 70—72

Продолжение работы автора (РЖМат, 1957, 4332). Пусть V_n — n-мерная риманова поверхность m-мерного риманова пространства V_m, C — кривая в V_n, e — касательный вектор к C. N_1, N_2, . . ., N_{m-n} — взаимно ортогональные единичные векторы, нормальные к V_n.

В работе вычисляется значение $k_1^2 = \left(\frac{\delta N_1}{\delta s}\right)^2$, где производная берется вдоль C. При $m = n + 1$ получается классическая формула Эйлера $k_1^2 = \sum_{h=1}^{n} C_h^2 \cos^2 \theta_h$, где C_h — главные кривизны V_n, а θ_h — углы между e и главными направлениями V_n. Автор вычисляет k_1 также в случае $m > n + 1$. Л. Р. Волевич

9218. Соотношения Петерсона—Кодацци для гиперповерхности уровня. Катков Г. Ф., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1957, вып. 7 (а), 65—70

Для гиперповерхности. рассматриваемой как гиперповерхность уровня $\varphi(u^1, u^2, \ldots, u^n) = C$ скалярного поля $\varphi = \varphi(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ в n-мерном евклидовом пространстве, составляются уравнения Петерсона—Кодацци и определяется тензор кривизны.

П. М. Олоничев

9219. Поверхности, огибающие семейство гиперсфер. Ведерников В. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 89—97

Автор ставит своей целью нахождение условий, необходимых и достаточных для того, чтобы гиперповерхность n-мерного конформного пространства являлась огибающей m-параметрического семейства гиперсфер. Предполагая, что гиперповерхность задана в полисферических координатах, автор строит в каждой ее точке A_0 локальный конформный репер $\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n, A_{n+1}\}$, где A_n — касательная гиперсфера, $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ — гиперсферы, проходящие через точку A_0 и ортогональные гиперповерхности (A_0), A_{n+1} — вторая общая точка гиперсфер $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, A_n$. В силу известной специализации репера имеет место равенство

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^i A_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

В дальнейшем формы $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ принимаются в качестве базисных, остальные формы, фигурирующие в уравнениях инфинитезимальных перемещений репера, выражаются следующим образом через базисные:

$$\omega_i^0 = P_{ij}\omega^j, \quad \omega_i^n = b_{ij}\omega^j, \quad \omega_0^0 = l_i\omega^i, \quad \omega_i^j = I_{ik}^j \omega^k,$$

$$\omega_n^0 = -n_i\omega^i.$$

При замене касательной гиперсферы A_n другой касательной гиперсферой A_n' $(A_n = A_n + \lambda A_0)$ имеет место равенство

$$b'_{ij} = b_{ij} - \lambda g_{ij},$$

где g_{ij} — тензор, определяющий угловую метрику гиперповерхности.

Оказывается, что существенную роль при решении поставленной задачи играет характеристическое уравнение

$$|b_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0.$$

Хотя корни λ_i этого уравнения не имеют конформно-инвариантного смысла (они изменяются при перенормировании точки A_0), но их отношение и кратность конформно-инвариантны, конформно-инвариантными являются также гиперсферы $A_n + \lambda_i A_0$, называемые главными гиперсферами гиперповерхности.

Автор доказывает следующие два предложения:

1) Гиперповерхность $A_0(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1})$ является огибающей $(n - k - 1)$-параметрического семейства гиперсфер $(k \geqslant 2)$ тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение $|b_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0$ имеет k-кратный корень $\lambda(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1})$;

2) Если для гиперповерхности (A_0) характеристическое уравнение имеет простой корень λ и семейство каса-

тельных гиперсфер $B_n = A_n + \lambda A_0$ имеет вторую огибающую полость, то семейство гиперсфер B_0 зависит от $n-2$ существенных параметров, и гиперповерхность $A_0(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1})$ есть огибающая $(n-2)$-параметрического семейства гиперсфер. Если же семейство гиперсфер B_n не имеет второй огибающей полости, то оно зависит от $(n-1)$ существенного параметра (такое семейство автор называет невырожденным семейством главных гиперсфер гиперповерхности).

В последнем параграфе рассматривается гиперповерхность в евклидовом пространстве E_n, отнесенная к такому неголономному реперу, в котором матрица второго метрического тензора b_{ij} имеет диагональный вид, а матрица первого метрического тензора g_{ij} является единичной.

Автор устанавливает, что если характеристическое уравнение $|b_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0$ имеет корень кратности k, то уравнение $|R_{ij} - \mu g_{ij}| = 0$, где R_{ij} — тензор Риччи, также имеет корень кратности k. Наоборот, если последнее уравнение имеет корень кратности k_1, то характеристическое уравнение имеет одновременно корень λ_1 кратности p и корень λ_2 кратности $k_1 - p$. Соответствующая гиперповерхность в этом случае является одновременно огибающей $(n-p-1)$-параметрического и $(n-k+p-1)$-параметрического семейств гиперсфер (считая, что $n-p-1$ и $n-k+p-1$ больше единицы). В. А. Тихонов

9220. О конгруэнциях кривых в подпространствах. Мишра (On the congruences of curves in a subspace. Mishra R. S.), J. Math., 1953, **1**, № 2—3, 63—66 (англ.)

В римановом пространстве V_m рассматривается подпространство V_n и совокупность $m-n$ таких конгруэнций кривых, что через каждую точку V_n проходит одна кривая из каждой конгруэнции. Для $m-n$ полей единичных векторов λ_τ^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, m,\ \tau = n+1, \ldots, m)$ касательных к линиям конгруэнций автор получает систему уравнений, играющих роль уравнений Петерсона—Кодацци. В. И. Шуликовский

9221. О движениях в римановых пространствах V_4. Кручкович Г. И., Матем. сб., 1957, **41**, № 2, 195—220

Определяются римановы пространства 4 измерений V_4 с неопределенной по знаку метрической формой, допускающие интранзитивные группы движений $\mathfrak{G}_r$ порядка $r \geqslant 3$ с изотропными поверхностями системы интранзитивности.

Если V_4 допускает группу $\mathfrak{G}_3$ с двумерными поверхностями интранзитивности, то возможны два случая: 1) поверхности интранзитивности $\bar{V}_2$, на которых ранг метрического тензора равен 1; метрика V_4 приводится в некоторой системе координат к виду

$$ds^2 = g(x^3, x^4)\left(2dx^1dx^4 + dx^{2^2}\right) + g_{33}(x^3, x^4)\,dx^{3^2};$$

2) поверхности интранзитивности обыкновенного V_2, ds^2 приводится к виду $ds^2 = ds_0^2 + \varphi d\sigma^2$, где ds_0^2, $d\sigma^2$ — самостоятельные метрики от двух переменных каждая, причем $d\sigma^2$ — метрика постоянной кривизны, функция φ зависит от переменных из ds_0^2, ds_0^2 — неопределенная.

Пространства V_4, допускающие группу движений $\mathfrak{G}_3$, транзитивную на изотропных поверхностях $\bar{V}_3$ ($x^4 = \text{const}$) (ранг метрического тензора на $\bar{V}_3$ равен 2), приводятся к одному из 10 типов. Совокупность допустимых V_4 для данной группы $\mathfrak{G}_3$ зависит от 3 произвольных функций изотропной координаты, если группа содержит оператор, траектории которого являются нулевыми линиями метрики $\bar{V}_3$ или $\mathfrak{G}_3$ имеет операторы p_2, p_3, $x^3p_2 - p_1$; p_2, p_3, $x^3p_3 + p_1\left(p_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)$ и от пяти произвольных функций от x_4 во всех остальных случаях.

Пространства V_4, допускающие интранзитивную $\mathfrak{G}_4$ с изотропными поверхностями интранзитивности приводятся к 11 типам; метрика V_4 зависит не более чем от трех произвольных функций одной переменной. Далее выделяются типы (7 типов пространств, за исключением субпроективного пространства), когда $\mathfrak{G}_4$ является полной интранзитивной группой движений; полученные пространства допускают транзитивную группу только в случаях, если V_4 является пространством постоянной кривизны или является приводимым пространством $\left(ds^2 = d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2\right.$, где $d\sigma_1^2$, $\left.d\sigma_2^2$ — надлежащие метрики постоянной кривизны$\right)$ или V_4 с метрикой, принадлежащей к одному из двух типов: $ds^2 = 2dx^1dx^4 + 2\alpha(x_4)\,e^{-x^1}dx^2 \cdot dx^3$, $ds^2 = 2dx^1dx^4 + \alpha(x_4)\,e^{-x^1}\left[dx^{2^2} + dx^{3^2}\right]$ (в которых $\alpha(x_4)$ необходимо обращается в постоянную).

Если V_4 допускает интранзитивную группу $\mathfrak{G}_5$ с изотропными поверхностями интранзитивности $\bar{V}_3$, то его метрика может быть приведена к виду

$$ds^2 = 2dx^1dx^4 + \sum_{2,3} g_{\alpha\beta}(x^4)\,dx^\alpha dx^\beta.$$

Интранзитивную группу $\mathfrak{G}_6$ с изотропными $\bar{V}_3$ допускают субпроективные пространства исключительного случая и только они. И. П. Егоров

9222. О конформно кривых римановых пространствах V_n $(n \geqslant 6)$, допускающих группу движений G_r порядка $r > \dfrac{n(n+1)}{2} - (3n-11)$. Муто (On conformally curved Riemann spaces V_n, $n \geqslant 6$, admitting a group of motions G_r of order $r > n(n+1)/2 - (3n-11)$. Muto Yosio), J. Math. Soc. Japan, 1957, **9**, № 1, 38—61 (англ.)

Изучаются собственно римановы пространства V_n $(ds^2 > 0)$ при $n \geqslant 6$ ненулевой конформной кривизны, допускающие группу движений G_r порядка r, где $r > (n-2)(n-3)/2 + 8$. Получены необходимые условия (из условий инвариантности тензора конформной кривизны $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ при движениях в V_n в рассматриваемом случае), выражающие алгебраическую структуру тензора $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$. И. П. Егоров

9223. Теорема Майерса. Амброз (A theorem of Myers. Ambrose W.), Duke Math. J., 1957, **24**, № 3, 345—348 (англ.)

Пусть M^n — бесконечно дифференцируемое, метрически полное риманово многообразие, p — точка M^n, ξ — единичный контравариантный вектор в точке p. Для любой ортонормированной системы контравариантных векторов $e_1, \ldots, e_n$, $e_n = \xi$, составляется число

$$C = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} K(e_i, e_n),$$

где $K(e_i, e_n)$ — кривизна M^n в двумерном направлении, определяемом векторами e_i, e_n. Можно показать, что C зависит лишь от точки p и направления вектора ξ, но не от выбора репера $\{e_j\}$; C называется средней кривизной M^n в точке p в направлении ξ. Рассматриваются геодезические σ, исходящие из некоторой точки $m \in M^n$; если отложить вдоль σ от точки m дугу длины u, полученная точка обозначается $\sigma(u)$; средняя кривизна в точке $\sigma(u)$ в направлении касательной к σ обозначается $C(u)$. Точка m

удовлетворяет условию C, если для всякой геодезической σ, исходящей из m,

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A C(u)\,du=+\infty.$$

Основной результат работы: если на M^n существует точка, удовлетворяющая условию C, то M^n компактно. Эта теорема обобщает теорему Майерса, согласно которой M^n компактно, если средняя кривизна M^n ограничена снизу положительным числом (Myers S. B., Duke Math. J., 1941, 8, 401—404). Доказательство основано на формуле для второй вариации длины дуги в римановом пространстве, принадлежащей Синджу (Sundge J. L., Proc. London Math. Soc., 1926, 25, 247—264). А. И. Фет

9224. Дифференциальные инварианты нериманова пространства. Ромен (Invariants différentiels d'un espace non riemannien. Romain Jacques), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 23, 2777—2779 (франц.)

Следуя методу Хаскинса (Haskins C. N., Trans. Amer. Math. Soc., 1902, 3, 71—91), применившему инфинитезимальные преобразования для подсчета числа независимых дифференциальных инвариантов произвольного порядка симметрического тензора второго ранга (риманова пространства n измерений), автор установил число независимых инвариантов для n-мерного нериманова пространства, определенного заданием несимметрического тензора g_{ik} и снабженного несимметрической аффинной связностью Γ^h_{pq}, не зависящей от фундаментального тензора.

Число инвариантов порядка m от тензора g_{ik} равно

$$I_{n,m}=\frac{nm(n+m-1)!}{(n-2)!\,(m+1)!}.$$

Число инвариантов от объекта связности (содержащих производные m-го порядка от g_{ik} и $(m-1)$-го порядка от Γ^h_{pq}) равно

$$I'_{n,m}=\frac{n^2(n-m-2)!}{(n-1)!\,(m-1)!}.$$

Указывается, через какие аргументы можно выразить инварианты 1-го и 2-го порядков. Следует заметить, что независимые дифференциальные инварианты первого и второго порядка пространств симметрической аффинной связности двух и трех измерений были получены ранее П. И. Петровым (Докл. АН СССР, 1949, 65, № 2; 129—130; Уч. зап. Казанского ун-та 1952, 112, кн. 9, 21—37), приведшим проблему для инвариантов любого порядка к алгебраической задаче.

В единой теории поля коэффициенты связности могут быть выражены через g_{ik} и их производные, поэтому инварианты первого порядка связности в этом случае могут быть выражены через инварианты первого порядка фундаментального тензора. Учтены также дальнейшие условия, вызывающие определенное снижение числа независимых инвариантов в единой теории поля. Б. Л. Лаптев

9225. К теории поверхностей в геометрическом n-пространстве с заданной фундаментальной группой. Либер А. Е., Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу. МГУ, 1956, вып. 10, 193—226

Если переменные $x^1,\ldots,x^n$, преобразуемые r-членной группой Ли G_r, рассматривать как функции от m параметров $\tau',\ldots,\tau^m$, то частные производные этих функций до порядка v включительно будут преобразовываться дифференциально продолженной группой $G_r^{(vm)}$, имеющей одну структуру с G_r. Если u — наименьший порядок продолжения, при котором продолженные операторы V_i образуют систему r линейно независимых операторов, то полная система инвариантов $G_r^{(u+1,\,m)}$ называется фундаментальной. Ее фактическое построение сводится к интегрированию вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений в частных производных. Всякий дифференциальный инвариант группы G_r, т. е. инвариант какой-либо дифференциально продолженной группы, является функцией от фундаментальных дифференциальных инвариантов и их продолжений. На m-мерной поверхности в пространстве K_r с фундаментальной группой G_r фундаментальная система дифференциальных инвариантов инвариантно определяет фундаментальный объект. Всякий инвариантно определенный объект m-поверхности является функцией от фундаментального объекта и его дифференциальных продолжений. Две поверхности в K_n, отличающиеся только на автоморфизм пространства K_n, имеют одинаковые фундаментальные объекты и обратно. Если фундаментальный объект поверхности будет найден в явной форме, то для него можно будет написать систему дифференциальных уравнений, аналогичную системе уравнений Гаусса и Петерсона—Кодацци в теории поверхностей.

В заключение дается определение изгибаний m-поверхности как таких ее преобразований, при которых сохраняется тот или иной подобъект фундаментального объекта. Показывается эквивалентность этого определения картановскому. Г. Ф. Лаптев

9226. О некоторых свойствах аффинно-связных многообразий, допускающих группу аффинных движений. Мутo (On some properties of a kind of affinely connected manifolds admitting a group of affine motions, I. Muto Yosio), Tensor, 1955, 5, № 2, 127—142 (англ.)

Продолжение ранее опубликованной автором статьи (РЖМат, 1957, 6639) о структуре тензора кривизны аффинно-связного пространства A_n без кручения, допускающего группу движения G порядка $r>n^2-2n$ ($n\geqslant 2$). Получены необходимые условия, уточняющие алгебраическую структуру тензора кривизны рассматриваемых пространств. И. П. Егоров

9227. Тензор кривизны и некоторые типы пространств симметричной почти симплектической связности. Лемлейн В. Г., Докл. АН СССР, 1957, 117, № 5, 755—758

Исследуются свойства пространств, введенных автором (РЖМат, 1958, 6151). Показано, что для ковариантного тензора кривизны имеет место равенство $B_{ij,\,kl}+B_{ji,\,lk}+B_{lk,\,ji}+B_{kl,\,ij}=0$, что пространства, у которых $B_{ij,\,kl}=B_{ij,\,lk}$, и только такие пространства обладают следующим свойством: элементы алгебры Ли группы голономии, ассоциированные элементарным циклам, принадлежат симплектической алгебре Ли. Построен пример, показывающий существование таких пространств, отличных от плоских и от пространств симплектической связности. Установлен критерий эквиаффинности и показано, что свойство эквиаффинности слабее свойства существования ковариантно постоянного симплектического объема. Показано, что пространства 2 и 4 измерений с ковариантно постоянным объемом совпадают с пространствами симплектической связности, но для 6 и более измерений существуют такие пространства, отличные от пространств симплектической связности. И. Ю. Левин

9228. Группы проективных преобразований и группы конформных преобразований. Исихара (Groups of projective transformations and groups of conformal transformations. Ishihara Shigeru), J. Math. Soc. Japan, 1957, 9, № 2, 195—227 (англ.)

Пусть M — n-мерное пространство аффинной связности с коэффициентами связности Γ^i_{jk}, $P(M)$ — его группа проективных преобразований (переводящих геодезические снова в геодезические), $P^*(M)$ — подгруппа проективных преобразований, сохраняющих тензор Риччи пространства, $A(M)$ — группа аффинных преобразований (сохраняющих связность). Две аффинные связности находятся в проективном соответствии, т. е. имеют одинаковые геодезические, если

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j\psi_k + \delta^i_k\psi_j,$$

где ψ_k — некоторый ковектор. Подгруппа G группы $P(M)$ связности Γ^i_{jk} называется существенно аффинной, если найдется такая связность $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ с теми же геодезическими, относительно которой G является группой аффинных преобразований. Доказывается, что существенно аффинной является всякая группа G проективных преобразований в M, если 1) G — компактная группа или 2) G — транзитивная группа с компактной группой изотропии, или 3) G — транзитивная группа проективных преобразований не проективно плоского пространства M, а компонента единицы линейной группы изотропии неприводима в касательном пространстве данной точки. Относительно группы $P^*(M)$ устанавливается теорема: Если M — полное пространство аффинной связности, то $P^*(M)$ совпадает с $A(M)$.

Указанные результаты применяются, в частности, к риманову пространству M с положительно определенной метрической формой ds^2. Если риманово пространство M компактно, то его группа $P^*(M)$ совпадает с группой аффинных преобразований $A(M)$. Если при этом M неприводимо, то $P^*(M)$ совпадает с группой изометрических преобразований (движений) $I(M)$.

Рассматривается также группа конформных преобразований $C(M)$ риманова пространства M, ее подгруппа $C^*(M)$, сохраняющая тензор Риччи, и группа подобий $H(M)$. Рассмотрение ведется также в целом. Подгруппа G из $C(M)$ называется существенно изометричной, если для некоторого риманова пространства, находящегося в конформном соответствии с данным, G является группой движений. Устанавливается, что существенно изометричной является всякая компактная группа конформных преобразований или транзитивная группа G с компактной группой изотропии. Доказывается далее, что если риманово пространство M полное, связное и не локально евклидово, то в нем $C^*(M)$ совпадает с группой движений $I(M)$. Это выполнено также в случае компактного пространства M.

Если тензор Риччи данного пространства M обращается в нуль, то $P(M) = P^*(M)$ и $C(M) = C^*(M)$, и, следовательно, в таком случае полученные результаты относятся ко всей группе проективных или конформных преобразований в M. Следует отметить также, что группы $P^*(M)$ и $C^*(M)$, сохраняя тензор Риччи, автоматически сохраняют тензор кривизны пространства M. Г. И. Кручкович

9229. Теоремы о приведении для связностей и их приложение к проблеме групп изотропии и голономии римановых многообразий. Номидзу (Reduction theorems for connections and its application to the problem of isotropy and holonomy groups of Riemannian manifold. Nomizu Katsumi), Nagoya Math. J., 1955, 9, oct., 57—66 (англ.)

В данной работе автор продолжает изучение дифференциальной геометрии однородных пространств (РЖМат, 1956, 7605). Пусть $P(B, G)$ — главное расслоенное пространство с инфинитезимальной связностью Γ. По определению, структурная группа G приводится к подгруппе G', если существует главное расслоенное пространство $P'(B, G')$ и его изоморфное вложение f в $P(B, G)$. В этом случае $P'(B, G')$ вместе с отображением f называется приведенным. Отображение f порождает в P' связность Γ'. Тогда говорится, что связность Γ в P приводится к связности Γ' в P'. Доказывается принадлежащая Э. Картану теорема (Cartan E., Acta Math., 1926, 48, 1—42) о приведении связностей. Пусть $P(B, G)$ — главное расслоенное пространство со связностью Γ и пусть Ψ-группа голономии Γ по отношению к точке $x_0 \in P$, тогда структурная группа G приводится к Ψ и связность Γ приводится к связности Γ' в приведенном пространстве $P'(B, \Psi)$. Более того, приведенное пространство можно рассматривать как подпространство P, состоящее из точек, которые можно соединить с x_0 горизонтальной кривой (заданием связности мы указываем разложение в каждой точке P касательного пространства в прямую сумму подпространств; одно из них, касающееся слоя, называется вертикальным, а другое — горизонтальным; кривая, касающаяся в каждой точке горизонтального подпространства, называется горизонтальной). Из этой теоремы автор получает

Теорема 1. Пусть G/H — однородное пространство связной группы Ли G по замкнутой подгруппе G', не содержащей никаких нормальных делителей, отличных от e. Если G/H допускает инвариантную аффинную связность, чья однородная группа голономии содержится в линейной группе изотропии $\bar{H}$, то G/H приводимо (РЖМат, 1956, 7605) и ковариантная производная тензорных полей кривизны и кручения равна нулю. Из этой теоремы следует основная теорема.

Теорема 2. Пусть M — полное риманово многообразие. Если ограниченная однородная группа голономии Ψ^0_p содержится в линейной группе изотропии $\bar{H}_p$ в каждой точке p многообразия M, то M есть симметрическое риманово пространство. Используя теорему 2 можно получить следующие теоремы:

Теорема 3. Пусть M — полное риманово многообразие с неприводимой однородной ограниченной группой голономии. Если $r = s + n$, где $n = \dim M$, $s = \dim \Psi^0_p$, а $r = \dim G$, где G есть максимальная связная группа изометрий M, то либо M — симметрическое пространство, либо M есть кэлерово многообразие с равной нулю кривизной Риччи.

Теорема 3 дает некоторую характеристику симметрических пространств, выделяющую их из класса римановых многообразий, а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть M — компактное риманово многообразие с неприводимой ограниченной однородной группой голономии. Если $r = s + n$, то M симметрично. Л. В. Волевич

9230. Изоморфизм инфинитезимальных связностей. Аллами жон (Isomorphisme des connections infinitésimales. Allamigeon André-Claude), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 2, 220—222 (франц.)

Пусть $H(V_m, G, p)$ и $\bar{H}(V_m, \bar{G}, \bar{p})$ — два главных дифференцируемых расслоенных пространства с одной и той же базой V_m: σ — дифференцируемый изоморфизм группы Ли G на группу Ли $\bar{G}$; Φ — изоморфизм дифференцируемых расслоенных структур H на $\bar{H}$, так что $\Phi(hg) = \Phi(h)\sigma(g)$ $(h \in H,\ g \in G)$, $\bar{p} \circ \Phi = p$. Пусть на H дана инфинитезимальная связность, определенная полем H горизонтальных подпространств (Ehresmann, Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950, 29—55); тогда поле $\bar{H} = \Phi' H$ определяет соответствую-

шую связность на $\bar{H}$. Рассматриваются соответствующие соотношения между путями, группами голономии, дифференциальными формами и т. п. для H и $\bar{H}$. В частности, может быть $\bar{G}=\bar{G}$, $H=\bar{H}$. В этом случае в качестве примера рассматривается случай, когда H есть пространство линейных реперов V_m. Рассматриваются также аналогичные соответствия между однородными пространствами $F=G/G_1$ и $\bar{F}=\bar{G}/\bar{G}_1$ (где $\bar{G}_1=\sigma G_1$). Все эти рассмотрения обобщают опубликованные недавно результаты Каттанео по аффинным связностям и Маурер по коафинным связностям. А. Д. Мышкис

9231. О некоторых свойствах групп гомотетических преобразований в римановом и финслеровом пространствах. Хирамацу (On some properties of groups of homothetic transformations in Riemannian and Finslerian spaces. Hiramatu Hitosi), Tensor, 1954, **4**, № 1, 28—39 (англ.)

Обобщение результатов референта о возможных порядках групп движений римановых пространств V_n на случай групп $\mathfrak{G}_r$ гомотетических преобразований V_n ($ds^2>0$). Показывается, что $\mathfrak{G}_r$ порядка r в римановом (финслеровом) пространстве содержит нормальный делитель M_{r-1} порядка $r-1$, который является максимальной подгруппой движений; факторгруппа $\mathfrak{G}_r/M_{r-1}$ изоморфна мультипликативной группе вещественных положительных чисел. Любое преобразование T из $\mathfrak{G}_r$ представляется в виде RS (или SR'), где S — принадлежащее заданной одночленной подгруппе H_1 гомотетических преобразований $R(R')\in M_{r-1}$. Этот факт позволяет автору выяснить простейший вид конечных уравнений $\mathfrak{G}_r$ в надлежащей системе координат (и параметров). Далее выясняется, что $\mathfrak{G}_r$ является прямым произведением подгрупп H_1 и M_{r-1} тогда и только тогда, если H_1 является центром; любое $S\in H_1$ преобразует траектории произвольной подгруппы M_1 в траектории M_1, где $M_1\in M_{r-1}$. В римановом V_N ($N\neq 4$) не существует группы гомотетических преобразований $\mathfrak{G}_r$ порядка r, если

$$2+N(N-1)/2<r<N(N+1)/2. \qquad (1)$$

Группа гомотетических преобразований $\mathfrak{G}_r$ при $r=N(N-1)/2+2$ транзитивна и соответствующее V_N ($N>4$, $\neq 8$) необходимо локально евклидово.

В N-мерном финслеровом пространстве при $N>2$ ($N\neq 4$) не существует групп гомотетических преобразований $\mathfrak{G}_r$, если r удовлетворяет (1). И. П. Егоров

9232. Простой метод вложения эллиптического пространства в евклидово пространство. Блануша (A simple method of imbedding elliptic spaces in euclidean spaces. Blanuša Danilo), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1957, **12**, № 3, 189—200 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Автор рассматривает вложение n-мерного эллиптического пространства в евклидово пространство R_N. Именно, если параметры x_i ($i=1, \ldots, n+1$) подчинены условию

$$\sum x_i^2=\rho^2, \qquad (1)$$

то соотношения $x_{ik}=\frac{1}{\rho\sqrt{2}}x_ix_k$ ($i, k=1, \ldots, n+1$) определяют n-мерное эллиптическое пространство El_n кривизны $1/\rho^2$, изометрично вложенное в $R_{(n+1)^2}$. Уравнения

$$\xi_{ii}=\frac{1}{\rho\sqrt{2}}x_1^2, \quad \xi_{ik}=\frac{1}{\rho}x_ix_k \quad (i<k) \qquad (2)$$

осуществляют реализацию El_n в подпространстве размерности $\frac{n(n+3)}{2}+1$. Уравнения же $\eta_{ik}=\frac{1}{\rho}x_ix_k$

$$(i<k=2, \ldots, n+1) \quad \eta_{ii}=\frac{1}{\rho\sqrt{2i(i+1)}}\times$$

$$\times\left(ix_{i+1}^2-\sum_{k=1}^{i}x_k^2\right), \quad (i=1, \ldots, n) \qquad (3)$$

осуществляют реализацию El_n в подпространстве размерности $n(n+3)/2$. В последнем случае геодезические El_n являются окружностями в объемлющем пространстве. Само же El_n расположено на сферической гиперповерхности $S_{n(n+3)/2-1}$, имеющей радиус $\rho\sqrt{n/2n+2}$. Исключение параметров x_i из соотношений (2) показывает, что полученное в этом случае вложение располагается на алгебраической поверхности, которая содержит действительные точки, отличные от точек El_n. Автор устанавливает еще ряд интересных результатов, относящихся к указанным и другим вложениям El_n. Э. Г. Позняк

9233. О продолженных плоскостных преобразованиях в однородных контактных тензорных полях. Окубо (On the extended plane transformations in the homogeneous contact tensor fields. Okubo Tanjiro), Tensor, 1956, **6**, № 1, 32—59 (англ.)

После сжатого изложения основных моментов тензорного контактного исчисления, развитого за последние 20 лет рядом авторов: Эйзенхартом и Кнебельманом (Eisenhart L. P., Knebelman M. S., Ann. Math., 1936, **37**, 747—765), Муто (Muto Y., Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 1938, **20**, 451—457), Дойлем (Doyle T. C., Ann. Math., 1941, **42**, 698—721), Дэйвисом (РЖМат, 1954, 1803) и др., и получившего окончательное оформление с помощью теории неголономных пространств у Яно и Дэйвиса (РЖМат, 1957, 2645), автор проводит дальнейшее развитие теории однородных контактных преобразований.

Ранее был изучен вопрос о C-пространствах, т. е. о пространствах, допускающих обращение в нуль второго контактного репера (Π^{ij}), введенного Муто в цитированной выше работе, и о контактных преобразованиях, сохраняющих это свойство (которые оказываются продолженными точечными преобразованиями:

$$x^{i'}=x^{i'}(x), \quad p_{i'}=p_{i'}(x, p).$$

В настоящей работе автор проводит исследование пространств, допускающих обращение в нуль первого контактного репера (Γ_{ij}), введенного Эйзенхартом и Кнебельманом в цитированной выше работе. Поскольку однородное контактное преобразование, сохраняющее это свойство, имеет вид: $p_{i'}=p_{i'}(p)$, $x^{i'}=x^{i'}(x, p)$, т. е. формально двойственно продолженному точечному преобразованию, автор называет его продолженным плоскостным преобразованием (extended plane transformation). В виде примера такого рода пространств автор рассматривает C'-пространства, фундаментальный тензор которых в специальной системе зависит только от ковариантного вектора, т. е. не зависит от координат точки. Далее рассмотрены C''-пространства, входящие как в класс C-пространств, так и в класс C'-пространств. При некоторых дополнительных требованиях, введенных Муто, из них выделяются обычные аффинные (евклидовы) пространства.

Установлено также, что если риманово пространство допускает однородное контактное преобразование, обращающее первый контактный репер в нуль, то про-

транство — евклидово, а преобразование — продолженное плоскостное. Б. Л. Лаптев

9234. О классической теории поля. Судзуки (On the classical theory of field. Suzuki Yasutaka), Тиба дайгаку бунри гакубу киё (сидзэн кагаку) J. Coll. Arts and Sci. Chiba Univ. Natur. Sci. Ser., 1956, 2, № 1, 17—29

Общепзвестное построение теории поля в четырехмерном римановом пространстве с использованием метрического тензора, по мнению автора, нельзя признать целесообразным с физической точки зрения, ввиду отсутствия средств для прямого определения метрики пространства. Поэтому предлагается видоизменить теорию так, чтобы геометрические свойства определялись через физические характеристики; в качестве последних выбираются диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость с учетом их влияния на скорость распространения света.

Для выполнения поставленной задачи прежде всего пересмотрены некоторые положения классического векторного анализа. По определению, основными геометрическими элементами пространства являются: точка, линейный сегмент, поверхностный сегмент и объемный сегмент. Сегментам придается ориентация с помощью стрелки, контура и спирали и сопоставляются «дифференциалы» вектора, псевдовектора и псевдоскаляра соответственно. Уточняются известные дифференциальные операторы. Например, дивергенция рассматривается как псевдоскалярный оператор, действующий на псевдовектор; то, что «физики старых времен» называли дивергенцией, автор именует «кодивергенцией» и т. д.

С помощью видоизмененных операторов записываются уравнения Максвелла электромагнитного поля для материальных сред. Руководствуясь структурой этих уравнений, автор определяет компоненты метрического тензора в виде

$$g^{00} = \varepsilon_0^{-1}, \quad g^{ik} = -\delta_{ik}\mu_0, \quad g^{0i} = 0 \ (i, k = 1, 2, 3),$$

где ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемость. Таким образом, в изотропной среде пространство остается плоским. Я. И. Пугачев

9235. Окончательная геометрико-сферическая теория относительности, понимаемая как геометрия расслоенных пучков. Такасу (Die endgültige kugelgeometrische Relativitätstheorie, welche als eine Faserbündelgeometrie aufgefasst ist. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1956, 4, № 2, 119—145 (нем.)

Критика теории тяготения и единой теории поля Эйнштейна и изложение принципов новой, «геометрически-сферической» общей теории относительности, которую автор считает «окончательной» и «истинной». Идея «геометрическо-сферической» теории относительности состоит в том, что если электрон в точке (x, y, z) испускает в единицу времени энергию c, то

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dl^2$$

есть касательное расстояние между ориентированными сферами фронтов энергии с центрами (x, y, z) и $(x + dx, y + dy, z + dz)$ и радиусами $r = ct$ и $r + dr$. Для построения общей теории относительности в многообразии сфер фронтов энергии вводится неголономная геометрия группы Лагерра. Обсуждается ряд экспериментов, согласующихся с теоретическими выводами автора. Б. А. Розенфельд

9236. К методу сингулярностей в общей теории относительности. Фан Ган Хоанг (Sur la méthode des singularités en relativité générale. Phan Tan Hoang), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 1, 61—64 (франц.)

Исследуется проблема движения n тел в общей теории относительности. В основу вывода уравнений движения положены известные тождества Бьянки: по теореме Остроградского—Гаусса они преобразуются в поверхностные интегралы, выражающие собой равенство нулю потока некоторого вспомогательного вектора σ. В свою очередь вектор σ связан с компонентами метрического тензора (в работе используются тензорные плотности).

При решении задачи применяются условия гармоничности и обычный прием разложения искомых величин по степеням малого параметра $\lambda = 1/c$. В первом приближении получены ньютоновские уравнения движения. Я. И. Пугачев

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

9237. Анализ 1950 — геометрия 1880. Менгер (Calculus 1950 — geometry 1880. Menger Karl), Scripta Math., 1957, 22, № 3—4, 203—206 (англ.)

Окончание статьи (РЖМат, 1958, 2408). Пример 3 (сопоставление выражений $\int_0^1 pds$ и $\int_0^1 pdt$, где p — сила, s — путь, t — время) формулируется в терминах теории «состоятельных классов количеств». Вводится понятие «кумуляции (cumulation) флюенты», по отношению к которому операция интегрирования функции является частным случаем. Соответствующие обозначения дают возможность установить формальные правила исчисления. Рассмотрев два частных примера, автор заканчивает статью следующим абзацем: «Эти примеры показывают, как различение переменных и «состоятельных классов количеств» в соединении с введением символа j для тождественной функции приводит, можно сказать, к полной автоматичности как чистого анализа, так и в его приложений к науке. Этот процесс в области анализа является, по-видимому, таким шагом, который параллелен шагу, сделанному Пашем в области геометрии».

М. Я. Выгодский

9238. Системы кривых на плоскости. Скорняков Л. А., Тр. Моск. матем. о-ва, 1957, 6, 135—164

Под кривыми понимаются подмножества точек евклидовой плоскости π, гомеоморфные интервалу (0; 1) или окружности (открытые или закрытые кривые). Регулярными называются кривые, замыкание которых гомеоморфно интервалу, полуинтервалу, отрезку или окружности (множества, сами гомеоморфные отрезку или полуинтервалу, не рассматриваются как кривые). Доказывается, что если множество кривых Σ обладает свойством (A), состоящим в том, что через любые две точки плоскости проходит одна и только одна кривая из Σ, то все кривые множества регулярны. Открытая регулярная кривая, имеющая два конца, называется конечной, не имеющая концов — бесконечной, имеющая один конец — полуконечной или полузамкнутой, в зависимости от того, будет ли ее замыкание гомеоморфно полуинтервалу или окружности.

Производится следующее построение. В плоскости рассматривается множество кривых Σ со свойством (A). Выбирается точка O, через которую проходят только замкнутые и бесконечные кривые из Σ. Строится сфера, касающаяся плоскости в точке O, и через антиподальную точку O' сферы проводится плоскость π', параллельная π. Плоскость π стереографически проектируется на сферу, а сфера — на плоскость π', после чего π' ортогонально проектируется

на π. В результате π гомеоморфно отображается сама на себя, при этом система кривых Σ преобразуется в инверсную систему Σ^*, также обладающую свойством (A). Если система Σ является бесконечной (т. е. состоит только из бесконечных кривых), то инверсная система Σ^* называется центральной (O — центр этой системы), она состоит из бесконечных кривых, проходящих через точку O и полузамкнутых кривых, имеющих конец в O. Доказывается, что система кривых, обладающая свойством (A), не может содержать ни конечных, ни полуконечных, ни замкнутых кривых, из чего выводится основной результат, что такая система является либо бесконечной, либо центральной.

В заключение приводится следующая теорема: Если последовательности точек $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся соответственно к точкам a и b ($b \neq a$), то последовательность бесконечных кривых, проходящих через точки a_n и b_n, сходится к кривой, проходящей через a и b. Аналогичная теорема имеет место и в случае центральных кривых (при условии, что ни a, ни b не совпадают с центром системы). Результаты настоящей статьи без доказательств были опубликованы ранее (РЖМат, 1955, 4692). А. Г. Школьник

9239. Комбинаторная геометрия и комбинаторное построение политопов. Мачинский (De la géométrie combinatoire et de la construction combinatoire des polytopes. Matschinski Matthias), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, 43, № 8, 543—568 (франц.)

Автор занимается комбинаторным построением политопов. Им даны алгоритмы и формулы такого построения для серий классических политопов (для серии тетраэдра, куба и октаэдра). Рассмотрены также особые комбинаторные конструкции: «триэдр», который может быть вложен только в евклидово пространство, размерность которого совпадает с размерностью триэдра; несамопересекающиеся, имеющие одно ребро полиэдры, расположенные в многомерном пространстве; замкнутые полиэдры, имеющие повсюду отрицательную кривизну. Э. Г. Позняк

9240. О классификации полных политопов. Мачинский (Sur la classification des polytopes saturés. Matschinski Matthias), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 26, 2461—2464 (франц.)

Политоп Q принадлежит множеству $\bar{P}_{N,\varkappa}$, если Q имеет N вершин и если минимальная размерность пространства, в котором возможна реализация Q, равна $\varkappa - 1$. При $\varkappa < N$ можно в $\varkappa$-мерном или в пространстве большего числа измерений ввести между N вершинами новые связи (связи первого порядка — ребра, второго порядка — грани и т. д.). В $(\varkappa - 1)$-мерном пространстве это не всегда возможно. Если в $(\varkappa - 1)$-мерном пространстве невозможно ввести новые связи всех порядков, то политоп называется полным. Автор рассматривает подмножества $P_{N,\varkappa}$ множества $\bar{P}_{N,\varkappa}$, состоящие из полных политопов, и устанавливает предложения, которые дают возможность характеризовать политопы класса $P_{N,\varkappa}$ посредством предельных чисел $(K_{N,\varkappa})$ ребер и $(f_{N,\varkappa})$ граней политопа. Приводится таблица классификации. Э. Г. Позняк

9241. Замечания о полных политопах. Мачинский (Remarques sur les polytopes saturés. Matschinski Matthias), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 4, 528—531 (франц.)

В заметке автор устанавливает соответствие между полными политопами $P_{N,\varkappa}$ (реф. 9240) и геометрическими образованиями, обозначаемыми $(L, M_l, \ldots, M_1)$, которые были им изучены ранее (реф. 9242). Устанавливается связь между предельными числами элементов $P_{N,\varkappa}$ и упомянутыми образованиями $(L, M_l, \ldots, M_1)$. Рассматриваются также соотношения, называемые автором целочисленными уравнениями для политопов. Эти уравнения решаются для $P_{N,\varkappa}$. Указываются формулы, определяющие все предельные числа элементов в виде функций предельных чисел линейных связей $K_{N,\varkappa}$ (реф. 9240). Э. Г. Позняк

9242. Обобщенная формула Эйлера и условия ее применения. Внешняя и внутренняя кривизна. Мачинский (Formule d'Euler généralisée et condition de son application. Courbure extérieure et intérieure. Matschinski Matthias), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 21, 1595—1598 (франц.)

Автор рассматривает правильные многогранники в пространстве четырех и большего числа измерений. Для таких многогранников он вводит понятие внутренней кривизны $\delta = \Sigma\Delta\delta$, где $\Delta\delta = 2\pi - l$, l — длина окружности, радиуса 1, описанной вокруг вершины. Далее рассматриваются такие деформации многогранников, при которых внутренняя кривизна не меняется. Используя введенную деформацию, автор устанавливает необходимый признак топологической эквивалентности многогранника сфере — такой многогранник может быть деформирован в дважды покрытую двумерную область. Автор устанавливает еще несколько элементарных результатов, аналогичных указанному, и приводит примеры бесконечных многогранников, используя схемы, установленные им в предыдущей статье (РЖМат, 1957, 4357). Э. Г. Позняк

9243. Тангенциальные свойства алгебраических многообразий. Уоллес (Tangency properties of algebraic varieties. Wallace Andrew H.), Proc. London Math. Soc., 1957, 7, № 28, 549-567 (англ.)

Если V — r-мерное аффинное алгебраическое многообразие над полем k, V' — дуальное ему многообразие (м.) (РЖМат, 1957, 5158), x и v — их производящие точки, $T(x)$ и $T(v)$ — касательные примы к ним в x и v и $C(x)$, $C(v)$ — места касания $T(x)$ с V и $T(v)$ с V', то термин «имеет место классический случай дуальности» означает, что V дуально к V', а $C(x)$, $C(v)$ — линейные пространства, дуально соответствующие друг другу. Устанавливаются условия, при которых имеет место классический случай. Пусть V — приналь (к этому случаю сводятся остальные) в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве с уравнение $F(X_1, \ldots, X_{n+1}) = 0$, x — ее простая точка и $X_i = x_i + \lambda_i t$ — производящая касательная к V в x. Тогда $F(x_1 + \lambda_1 t, \ldots, x_{n+1} + \lambda_{n+1} t) = \sum_{i \geqslant 2} F_i t^i$, где F_i — однородный полином от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ степени i. Уравнение $F_2 = 0$ задает конус в $T(x)$ с вершиной x. Характеристическим линейным многообразием $\chi(x)$ в x автор называет: а) $T(x)$, если $F_2 \equiv 0$, б) подмногообразие $T(x)$, определенное уравнениями $\partial F_2 / \partial \lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, если $F_2 \not\equiv 0$ (если характеристика $k = 2$, $\chi(x)$ может не лежать на $F_2 = 0$). Классический случай имеет место тогда и только тогда, когда $\chi(x)$ содержится в V. Касательное линейное м. к $C(x)$ в x содержится в $\chi(x)$ и совпадает с ним тогда и только тогда, когда имеет место классический случай. Далее, если $\dim \chi(x) = n - s$ ($s \neq 0$) и g — естественное отображение V на V', а L — производящее линейное м. размерности $n - s + 1$ в пространстве вложения V', то касательное линейное м. к $g^{-1}(L)$ в y есть $\chi(y)$ (т. е. $g^{-1}(L)$ является интегральным м. характеристических линейных м. для V). В. В. Морозов

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

9244. Простое доказательство теоремы Барбье и одного из ее обобщений. Абрамович С. В.,

Научн. тр. Новочерк. политехн. ин-та, 1958, 67 (81), 87—90

Пусть огибающая однопараметрического семейства прямых

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - f(\alpha) = 0,$$

где $f(\alpha)$ — дифференцируемая положительная функция на отрезке $[0,2\pi]$ и периодическая с периодом 2π вне этого отрезка, будет овалом, т. е. замкнутой кривой. Для овалов постоянной ширины функция $f(\alpha)$ удовлетворяет условию

$$f(\alpha) + f(\alpha+\pi) = h.$$

Обобщением овалов постоянной ширины являются овалы, сумма расстояний от любой внутренней точки которых до сторон произвольным образом описанного равноугольного n-угольника есть величина постоянная $=h$. Функция $f(\alpha)$ для этих овалов удовлетворяет условию

$$f(\alpha) + f\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right) + f\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right) + \ldots + f\left(\alpha+\frac{2\pi(n-1)}{n}\right) = h.$$

Для длины L таких овалов имеет место равенство

$$L = \frac{2\pi h}{n}. \qquad (1)$$

Равенство (1) является обобщением известной теоремы для овалов постоянной ширины. Пользуясь аппаратом рядов Фурье, автор, помимо доказательства соотношения (1) изучает еще некоторые другие свойства овалов постоянной ширины и их обобщений.

А. Л. Вернер

9245. Об основной задаче для выпуклых тел вращения. Бири (Über das Hauptproblem bei konvexen Rotationskörper Bieri H.), Experientia, 1955, 11, № 4, 167—168 (нем., рез. англ.)

Пусть V — объем, F — поверхность, M — интеграл средней кривизны выпуклого тела. Посредством соотношений $x = 4\pi F/M^2$, $y = 48\pi^2 V/M^3$ выпуклые тела могут быть отображены на некоторое множество эвклидовой плоскости. Основная задача — исследование границы этого множества. Автор рассматривает выпуклые тела вращения, в качестве переменных величин выбирает, например, расстояние l между полюсами и радиус r окружности экватора или какие-либо две другие величины, связанные с выпуклым телом вращения, и разыскивает при фиксированных значениях переменных l, r выпуклые тела с экстремальными значениями V, F, M. В указанном случае и в случае постоянного l и постоянной длины L дуги меридиана автор получает новые соотношения для выпуклых тел вращения.

Э. Г. Позняк

9246. О трехточечной выпуклости. Валентайн (A three point convexity property. Valentine F. A.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 2, 1227—1235 (англ.)

Множество S в E_n обладает свойством трехточечной выпуклости P_3, если для любых трех точек x, y, z множества S по крайней мере один из трех сегментов xy, yz, xz, принадлежит S. Устанавливается, что в E_n среди замкнутых и связных множеств свойством P_3 обладают только выпуклые множества и множества, имеющие звездообразную структуру относительно каждой точки S, не обладающей свойством локальной выпуклости. Если замкнутое и связное множество $S \subset F_2$ обладает свойством P_3, то S представляет собой объединение трех или меньшего числа замкнутых выпуклых множеств, имеющих непустое пересечение. Число три не может быть уменьшено.

Э. Г. Позняк

9247. Функция симметричности выпуклого тела. Стейн (The symmetry function in a convex body. Stein S.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 1, 145—148 (англ.)

Пусть K_n — n-мерное выпуклое тело n-мерного евклидова пространства объема V_n, $S(P)$ — пересечение K_n и тела, симметричного K_n относительно данной точки P, $m(P)$ — объем $S(P)$ и $f(P) = m(P)\,V_n^{-1}$. В работе исследуется функция $f(P)$, в частности доказывается ее выпуклость ($f(\lambda P + (1-\lambda)Q) \geqslant \lambda f(P) + (1-\lambda) f(Q)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$). Работа примыкает к исследованию А. С. Безиковича, оценившего максимум $f(P)$ для $n=2$; автор отмечает, что в книге И. М. Яглома и В. Г. Болтянского (Выпуклые фигуры, М.—Л., 1951) соответствующий результат назван теоремой Ковнера, однако более ранняя и полная работа С. С. Ковнера (Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Основы вариационного исчисления, т. I, ч. II, М.—Л., 1935, дополнение 1) ему явно незнакома.

И. М. Яглом

См. также: 8484, 8519 К, 8694, 8699, 8929

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

9248. Исследование одного способа повышения точности метода сеток при решении уравнения Пуассона. Волков Е. А., Вычислит. математика, сб. 1, 1957, 62—80

Исследуется способ последовательных уточнений конечноразностного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = \varphi$, $u|_\Gamma = f$ в области G с криволинейной границей Γ, суть которого состоит в следующем.

Строится разностный оператор $D^{(n)}$, который представляет разность между дифференциальным оператором Лапласа Δ и простейшим на квадратной сетке разностным оператором Δ_h с точностью до величины порядка h^{2n} (h — шаг сетки), и решается затем методом последовательных приближений разностное уравнение

$$\Delta_h u_{ij}^{(k+1)} = h^2\varphi_{ij} + D^{(n)}u_{ij}^{(k)}, \quad \Delta^{-(2n-2)}u_{ij}^{(k+1)} = 0,$$

$$u|_\Gamma^{(k+1)} = f. \qquad (1)$$

Здесь $\Delta^{-(2n-2)}$ — оператор сноса граничной функции в узлы сеточного контура, представляющий собой некоторую интерполяционную формулу, построенную на основании формулы Лагранжа, и имеющий остаточный член порядка h^{2n-2}. Эта интерполяционная формула может иметь, вообще говоря, сколь угодно высокий порядок относительно h остаточного члена и удовлетворяет достаточным условиям применимости метода итераций для решения разностного уравнения.

Установлены две леммы: о единственности решения разностного уравнения и об оценке ошибки решения

возникающей от замены оператора Δ разностным оператором.

Доказаны две теоремы, относящиеся к методу уточнений. Теорема 1 устанавливает, что решение $u^{(1)}$ разностного уравнения

$$\Delta_h u_{ij}^{(1)} = h^2 \varphi_{ij}, \quad \Delta^{-(2n-2)} u_{ij}^{(1)} = 0, \quad u|_\Gamma^{(1)} = f \qquad (2)$$

представляется в виде

$$u_{ij}^{(1)} = u_{ij} + \sum_{s=1}^{n-2} h^{2s} \left(W_s^{(1)}\right)_{ij} + O\left(h^{2n-2}\right),$$

где u — точное решение задачи, $W_k^{(1)}$ — некоторые не зависящие от h, достаточно гладкие в области G функции. При этом требуется достаточная гладкость границы области Γ и функций φ и f.

Теорема 2 утверждает, что если при условиях теоремы 1 имеется k-е приближение $u^{(k)}$ к точному решению u, которое выражается через u в виде

$$u_{ij}^{(k)} = u_{ij} + \sum_{s=k}^{n-2} h^{2s} \left(W_s^{(k)}\right)_{ij} + O\left(h^{2n-2k}\right), \qquad (3)$$

то решение $u^{(k+1)}$ уравнения (1) является $(k+1)$-м приближением к u, выражающимся через u в виде (3), с заменой k на $k+1$. $W_s^{(k)}$ — некоторые, не зависящие от h, достаточно гладкие в G функции.

На основании теоремы 2 отмечается, что: а) k-е приближение $u^{(k)}$ $\left(k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]; \ n \text{ фиксировано}\right)$ сходится к точному решению u со скоростью h^{2k} и при достаточно малых h лучше (равномерно по узлам) приближает u, чем $(k-1)$-е приближение; б) k-е приближение можно численно дифференцировать; при этом порядок погрешности при вычислении r-й производной от u не превосходит $\max\{h^{2k}, h^{2n-2k-r}\}$.

Отмечается, что в случае совпадения Γ с сеточным контуром уравнение (2) упрощается, так как исчезает оператор $\Delta^{-(2n-2)}$, но для таких областей теоремы 1 и 2 не доказаны.

В заключение рассмотрено несколько числовых примеров.

Д. Ф. Давиленко

9249. Об оценке погрешности при нахождении собственных функций методом конечных разностей. Саульев В. К., Вычислит. математика, Сб. 1, 1957, 87—115

Излагается теоретическое обоснование метода конечных разностей. Рассматривается краевая задача

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \lambda u = 0 \quad \text{в области } Q$$

$$\left(\sum a_{ij}\zeta_i\zeta_j \geqslant \nu \sum \zeta_i^2; \ \nu > 0\right); \quad u|_\Gamma = 0. \qquad (1)$$

Данная область Q заменяется решеткой $\bar{Q}_h$ с шагом h и числом узлов N_h, а задача (1) — алгебраической задачей

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(a_{ij}u_{\bar{x}_j}^{(h)}\right)_{\bar{x}_i} + \left(a_{ij}u_{\bar{x}_j}^{(h)}\right)_{x_i}\right] + \lambda^{(h)}u^{(h)} = 0,$$

$$u^{(h)}|_{\Gamma_h} = 0,$$

где Γ_h обозначает границу сеточной области Q_h.

Обозначая через λ_k и $\lambda_k^{(h)}$ k-е дифференциальное и разностное собственные значения, а через u_k и $u_k^{(h)}$ — k-ю дифференциальную и разностную собственные функции, автор доказывает следующие утверждения:

1. Имеют место неравенства $\lambda_p^{(h)} < C_1 p^{\frac{2}{n}}$ для $p \geqslant p_0(n)$, $\lambda_p^{(h)} > C_2 p^{\frac{2}{n}}$ для всех индексов p, где C_i — известные положительные постоянные не зависящие ни от p, ни от h;

$$p_0 = \frac{1}{n!}\left[\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)\dots\left(\frac{n(n+1)}{2} - (n-1)\right)\right] + 1.$$

2. Имеют место неравенства $\max\limits_{A \in Q_h} |u_p^{(h)}(A)| < C_3 p^{\frac{2}{n}}$ для $n < 4$ и $p \geqslant p_0$, $\max\limits_{A \in Q_h} |u_p(A)| < C_4 \sqrt{p \ln \frac{1}{n}}$ для $n = 4$ и $p \geqslant 211$, $\max\limits_{A \in Q_h} |u_p^{(h)}(A)| < C_5 p^{\frac{2}{n}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-4}{2}}$ для $n > 4$ и $p \geqslant p_0$, где $u_p^{(h)}$ — нормированная p-я собственная функция; C_j — известные постоянные, не зависящие ни от p, ни от h.

3. В двумерном случае имеет место для всех индексов p оценка

$$\max\left|u_p^{(h)}\right| \leqslant C_6 \left(\lambda_p^{(h)}\right)^{\frac{2}{4+\tau}},$$

где τ — произвольное число, удовлетворяющее условию

$$0 \leqslant \tau \leqslant \frac{\ln\frac{3}{2}}{\ln \max\left|u_p^{(h)}\right|}, \quad \text{если } \max\left|u_p^{(h)}\right| > 1;$$

$$\tau = 0, \quad \text{если } \max\left|u_p^{(h)}\right| \leqslant 1.$$

4. Если коэффициенты a_i и граница Γ области Q, проходящая через узлы сетки при любом h, таковы, что существуют собственные значения λ_m и непрерывные в Q вместе с производными до 8-го порядка собственные функции u_m $(m = 1, 2, \dots)$ задачи

$$Lu + \lambda u = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \lambda u = 0$$

в Q, $a_i > 0$, $u|_\Gamma = 0$, то разностные собственные функции $u_p^{(h)}$ для любого фиксированного p $(p = 1, 2, \dots, N_h)$ в случае, если λ_p, соответствующее u_p, является простым собственным значением, равномерно на всей решетке Q_h сходятся к u_p вместе с $C_7 h^2$. Если же λ_p имеет кратность k, то u_p есть равномерный на Q_h предел некоторой линейной комбинации разностных собственных функций $u_{pi}^{(h)}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$, отвечающих разностным собственным значениям, аппроксимирующим собственное значение λ_p.

Устанавливаются оценки для

$$\left|u_p - u_p^{(h)}\right| \text{ и } \left|u_p - \sum_{i=1}^{k} c_{pi}^{(h)} u_{pi}^{(h)}\right| \quad (p = 1, 2, \dots),$$

К. В. Задирака

9250. О составлении уравнений в конечных разностях при приближенном решении уравнения Лапласа. Бахвалов Н. С., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 6, 1146—1148

Излагается новый способ приближенного решения задачи Дирихле

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u|_\Gamma = \varphi, \tag{1}$$

при котором для вычисления решения с точностью до ε требуется (при достаточно малых ε) значительно меньше арифметических действий, чем в известных ранее разностных методах. Если граница Γ и заданная на ней функция φ имеют производные порядка l, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем λ, то для задания φ с точностью до ε надо задать $H_\varepsilon = \text{const} \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}}$ чисел, где $l = l + \lambda$. В этом случае для решения задачи (1) по способу, изложенному в статье, достаточно $\text{const} \cdot H_\varepsilon^{1+\frac{\gamma'}{3}}$ арифметических действий, где γ'-любое число $> \gamma$. Для решения той же задачи методом последовательных верхних релаксаций (РЖМат, 1955, 1953; 1956, 2468) нужно $\text{const} \cdot H_\varepsilon^3$ действий, а методом альтернирующих направлений (РЖМат, 1957, 4377, 6689) — $\text{const} \cdot H_\varepsilon^2 \ln^2 H_\varepsilon$ действий.

Метод основан на использовании гладкости решения задачи Дирихле внутри области путем специального выбора сетки: по мере удаления от границы внутрь области сетка становится все более редкой. Для аппроксимации уравнения (1) применяются разностные формулы, имеющие точность Δ^6, где Δ — шаг сетки.

Автор указывает, что если существуют аналогичные формулы (с положительными коэффициентами) сколь угодно высокого порядка точности, число действий для решения задачи Дирихле с точностью до ε может быть снижено до $H_\varepsilon^{1+\beta}$, где $\beta > 0$ — любое.

А. Ф. Филиппов

9251. К вопросу о численном интегрировании параболических уравнений. Саульев В. К., Докл. АН СССР, 1957, 117, № 1, 36—39

В первой половине заметки предлагается разностное уравнение

$$u_{i,\,k+1} = u(i\Delta x,\ (k+1)\Delta t) = \frac{\alpha^m}{2(\omega+\alpha)^m} \times$$

$$\times (u_{i-m,\,k+1} + u_{i+m,\,k+1}) + \frac{\alpha^{m-1}(1-\alpha)}{2(\omega+\alpha)^m} \times$$

$$\times (u_{i-m,\,k} + u_{i+m,\,k}) - \frac{\alpha^{m-2}(\omega-\alpha)}{2(\omega+\alpha)^m} \times$$

$$\times (u_{i-m+1,\,k} + u_{i+m-1,\,k}) + \frac{\omega^2}{2(\omega+\alpha)^2} \sum_{\gamma=1}^{m-2} \frac{\alpha^{\gamma-1}}{(\omega+\alpha)^\gamma} \times$$

$$\times (u_{i-\gamma,\,k} + u_{i+\gamma,\,k}) + \frac{\delta\alpha + (\omega+\alpha)^2 - 2(\omega+\alpha)}{(\omega+\alpha)^2} u_{i,\,k} +$$

$$+ \frac{1}{2(\omega+\alpha)} (u_{i-1,\,k} + u_{i+1,\,k}), \tag{1}$$

(где $\omega = \Delta x^2/\Delta t$; $\delta = 0$ при $m = 1$ и $\delta = 1$ при $m > 1$; $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$), аппроксимирующее уравнение $\partial^2 u/\partial x^2 = \partial u/\partial t$ с точностью до порядка $O(\Delta x^2)$. Используя (1), построена явная схема численного решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности с более слабым ограничением устойчивости.

Во второй половине заметки рассмотрена другая явная разностная схема решения той же задачи: за $u_{i,\,k+1}$ принимается арифметическое среднее значения, просчитанного слева направо по формуле

$$u_{i,\,k+1} = \frac{1}{\omega+\alpha} [\alpha u_{i-1,\,k+1} + (1-\alpha) u_{i-1,\,k} +$$

$$+ u_{i+1,\,k} - (2-\omega-\alpha) u_{i,\,k}],$$

и значения, просчитанного справа налево по аналогичной формуле (поставить $i \pm 1$ вместо $i \mp 1$). Эта схема устойчива при условии, что $\omega = \Delta x^2/\Delta t \geqslant 2(1-\alpha)$.

В заключение приведены числовые примеры для сравнения с часто встречающимися явной и неявной разностными схемами.

Юань Чжао-дин

9252. Граничные задачи для некоторых нелинейных уравнений параболического типа. Зеракия П. К., Тбилисис математикис институтис шромеби. Сакартвелос ССР мецниереба академиа, Тр. Тбилисск. матем. ин-та. АН ГрузССР, 1957, 24, 195—221

§ 1 посвящен доказательству дифференциальных неравенств Чаплыгина для уравнения $L[u] = \partial u/\partial t + p(x,\ t)u$ с начальными и граничными условиями, которые обычно берутся для таких уравнений. Здесь

$$L(u) \equiv \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,\ t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Предполагается, что $u(x,\ t)$ — регулярное решение данного уравнения.

Далее доказывается единственность и существование регулярного решения нелинейного уравнения $\Delta u - \partial u/\partial t = f(x,\ t,\ u)$ (с обычными начальными и граничными условиями) путем построения равномерно сходящихся последовательностей верхних и нижних функций на основе неравенств Чаплыгина.

В § 2 метод Чаплыгина применяется для нахождения приближенного решения уравнения $\partial^2 u/\partial x^2 - \partial u/\partial t = f(x,\ t,\ u,\ \partial u/\partial t)$. Здесь на функцию $f(x,\ t,\ u,\ p)$, $p = \partial u/\partial t$ накладываются следующие условия: f, f'_x, f'_u, f'_p непрерывны и $f''_{px} - 2f'_u < 0$. Наконец, в § 3 рассматривается нелинейное бипараболическое уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,\ y,\ u)$$

с условиями

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)\Big|_{y=0} = \psi(x), \quad a < x < b,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные непрерывные в интервале $(a,\ b)$; $f(x,\ y,\ u)$ удовлетворяет условию Липшица по x и u. Эта задача эквивалентна нелинейному интегральному уравнению, которое автор решает методом последовательных приближений.

Я. И. Алихашкин

9253. Об устойчивости приближенных решений параболического и гиперболического дифференциальных уравнений. Коваль П. И., Укр. матем. ж., 1957, 9, № 3, 271—280 (рез. франц.)

Исследуется устойчивость решения разностного уравнения, аппроксимирующего смешанную задачу (первую краевую задачу) для уравнений

$$u_t = au_{xx} + bu_x + cu, \tag{1}$$

$$u_{tt} = au_{xx} + bu_x + cu, \tag{2}$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения зависят от t, x и стремятся к конечным пределам при $t \to \infty$ и любом фиксированном x; $a(x,\ \infty) > 0$. Приведены достаточные условия для асимптотической устойчивости, т. е. для того, чтобы любое решение

разностного уравнения с нулевыми граничными условиями стремилось к нулю при $t \to \infty$. Рассматриваются как простейшие разностные уравнения, аппроксимирующие (1) и (2), так и уравнения, в которых приближенное выражение для u_t или u_{tt} через значения u в $n+1$ точке сетки выводится из интерполяционной формулы Лагранжа. Показано, что при использовании формулы Лагранжа для уравнения (1) всегда будет неустойчивость (при $n>1$), а для уравнения (2) при $n>2$ устойчивость будет только в том случае, когда $n=4$, а значения u_{tt} при $t=(s+3)\,l$, где l — шаг сетки по t, выражаются через значения u при $t=sl$, $(s+1)\,l$, ..., $(s+4)\,l$; рассматриваются только явные разностные схемы.

Примечания референта 1. Существуют другие способы более точной аппроксимации производной u_t, при которых разностное уравнение получается устойчивым (Рябенький В. С., Докл. АН СССР, 1952, 86, 6). 2. В формулах на стр. 272 после $\min \lambda_i$ надо знак $\geqslant$, а после $\max \lambda_i$ надо знак $\leqslant$ (вместо знака $=$). А. Ф Филиппов

9254. **Влияние формулировки краевых условий на быстроту сходимости при решении дифференциальных уравнений в частных производных методом сеток. Витасек** (Vliv formulace okrajových podmínek na rychlost konvergence při řešeni parciálních diferenciálních rovnic metodou sítí. Vitásek Emil), Aplikace mat., 1957, 2, № 3, 163—183 (чешск.; рез. русск., нем.)

При решении методом сеток задачи $u_t = u_{xx}$, $u(0, x) = \varphi(x)$, $u_x(t, 0) = \psi(t)$, $u_x(t, a) = \chi(t)$ ошибка будет порядка h, если $u_x(t, 0)$ заменить через $[u(t, h) - u(t, 0)]/h$. В статье указывается, как нужно составлять краевые условия для разностного уравнения, чтобы повысить точность до h^2 (в случае 2-й и 3-й краевых задач для уравнений

$$u_t = u_{xx},\ u_t = u_{xx} + u_{yy},\ u_{xx} + u_{yy} = 0$$

в области $0<x<a$, $0<y<b$).

Автор считает, что замена краевого условия $u_x(t, 0) = 0$ на

$$[3u(t, 0) - 4u(t, h) + u(t, 2h)]/2h = 0, \qquad (1)$$

имеющая точность h^2, неудобна, так как при краевом условии (1) решение разностного уравнения теплопроводности, положительное при $t=0$, может стать отрицательным при $t>0$.

Примечание референта. Последнее возражение автора не является существенным, так как в этом случае решение разностного уравнения является устойчивым относительно ошибок округления и сходится (со скоростью h^2 при $h \to 0$) к решению дифференциального уравнения, а отрицательные значения решения могут появляться только в граничных точках области и имеют величину порядка h^2, т. е. такую же, как ошибка во всех точках сетки. А. Ф. Филиппов

9255. **Аналог метода приближенного интегрирования академика С. А. Чаплыгина для эллиптического уравнения. Скоробогатько В. Я.,** Доповіді та повідомлення. Львівськ. ун-т, 1957, вып. 7. ч. 3, 273—277

Дано доказательство следующей теоремы, относящейся к первой краевой задаче для эллиптического уравнения

$$Lu = \sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = 0, \qquad (1)$$

где $a_{k,l}$ непрерывно дифференцируемы, b_j — непрерывны: Если в конечной области D с границей S типа Ляпунова выполняются условия $Lu<0$, $u|_S = 0$, $u \in C_2$ (C_2 — класс дважды непрерывно дифференцируемых в D функций с непрерывными первыми производными в $\bar{D}$) и в этой области выполняется неравенство

$$\begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n}A_1 \\ a_{n1}, \ldots, a_{nn}A_n \\ A_1, \ldots, A_nR \end{vmatrix} \geqslant 0, \text{ где } A_l = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_k} - b_l + B_l,$$

$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial x_i} - C,$$

то в области D функция $u \geqslant 0$. Указанная теорема обобщает известную теорему Чаплыгина о дифференциальных неравенствах для уравнения в частных производных.

Пользуясь доказанной теоремой, автор строит монотонно убывающую последовательность верхних и монотонно возрастающую последовательность нижних приближений к решению первой краевой задачи для уравнения $\Delta u + c(x_1, x_2, \ldots x_n)\,u = 0$.

Формулируется достаточное условие сходимости процесса и дается оценка быстроты сходимости. К. В. Задирака

9256. **К решению плоской задачи теории упругости методом конечных разностей. Иванов** (До розв'язання плоскої задачі теорії пружності методом скінченних різниць. Іванов С. І.), Прикл. механіка, 1957, 3, № 3, 339—344 (укр., рез. русск.)

Предлагается метод уточнения решения плоской задачи теории упругости, полученного в числах влияния разностным методом при простейших конечноразностных соотношениях. При этом используются имеющиеся коэффициенты влияния, и решение уточняется путем последовательных приближений к решению системы уравнений, полученных на основе некоторых более полных конечноразностных соотношений.

Метод иллюстрируется примерами. Отмечается, что идея уточнения, примененная к бигармонической задаче, может быть применена и к задаче гармонической. Д. Ф. Давиденко

9257. **О решении уравнений Шрёдингера и Клейна— Гордона на цифровых вычислительных машинах. Хармут** (On the solution of the Schroedinger and the Klein—Gordon equations by digital computers. Harmuth Henning F.), J. Math. and Phys., 1957, 36, № 3, 269—278 (англ.)

Рассматриваются явные разностные аналоги первой краевой задачи для уравнения Шрёдингера

$$-ih\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{h^2}{2m_0}\nabla^2\psi - V(r, t)\,\psi \qquad (1)$$

и уравнения Клейна—Гордона

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{i}{hc^2}\left(2V\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \frac{1}{h^2c^2}\left(V^2 - m_0^2c^4\right)\psi = 0, \qquad (2)$$

где $i=\sqrt{-1}$; h, m_0, c — постоянные. При этом все производные первого и второго порядка заменяются симметричными разностными отношениями.

Для одномерного случая, когда V — постоянная, доказывается, что разностный аналог уравнению (1) устойчив, если

$$\left[2\frac{h}{m_0}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(1+\frac{m_0\Delta x^2}{2h^2}V\right)\right]^2 \leqslant 1,$$

а разностный аналог уравнению (2) устойчив, если

$$1+\frac{1}{2}(\Delta t/h)^2\left(V^2-m_0^2c^4\right) \leqslant [1+(\Delta t V/h)^2]^{1/2}$$

и

$$\Delta x^2 \geqslant 2c^2\Delta t^2\left\{[1+(V\Delta t/h)^2]^{1/2}+1+\frac{1}{2}(V\Delta t/h)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(m_0c^2\Delta t/h)^2\right\}^{-1}$$

(последнее неравенство в работе записано неверно).

Приведена схема счета на цифровых вычислительных машинах. Юань Чжао-дин

9258. О точности решения конечно-разностного уравнения, аппроксимирующего уравнения Пуассона, на электрических сетках. Маруашвили Т. И., Тбилисис математикис институтис шромеби. Сакартвелос ССР мецниереба академиа, Тр. Тбилисск. матем. ин-та. АН ГрузССР, 1957, 24, 163—177 (груз., рез. русск.)

Если дана квадратная сетка из омических сопротивлений r и к ее узлам поданы токи I_{ij}, пропорциональные f_{ij}, то напряжения в узлах U_{ij} с точностью до постоянного множителя удовлетворяют конечноразностному аналогу уравнения Пуассона

$$\tilde{\Delta}Z_{ij}=h^2f_{ij}. \qquad (1)$$

Токи подаются либо через омические сопротивления $R\,(R\gg r)$, либо через конденсаторы C. Соответственно этому $I_{ij}\cong v_{ij}/R$ или $I_{ij}\cong Cv_{ij}\omega\cdot\cos\omega t$. Здесь v_{ij} и $v_{ij}\sin\omega t$ — напряжения, подаваемые на свободные концы сопротивлений (или конденсаторов) и пропорциональные f_{ij}. Переходной процесс в сетке описывается уравнением

$$rc\frac{dZ_{ij}}{dt}-\tilde{\Delta}Z_{ij}=h^2f_{ij}\cos\omega t.$$

Решение этого уравнения суть

$$Z_i=h^2\sum_{p=1}^{s}\sum_{q=1}^{s}\frac{\lambda_pb_{ip}b_{qp}}{\lambda_p^2+(rc\omega)^2}f_q\cos\omega t\cdot$$

$$+rc\omega h^2\sum_{p=1}^{s}\sum_{q=1}^{s}\frac{b_{ip}b_{qp}}{\lambda_p^2+(rc\omega)^2}f_q\sin\omega t-$$

$$-h^2\sum_{p=1}^{s}\sum_{q=1}^{s}\frac{\lambda_pb_{ij}b_{qp}}{\lambda_p^2+(rc\omega)^2}f_qe^{-\frac{\lambda_pt}{rc}}. \qquad (2)$$

При достаточно малом $rc\omega$ переходной процесс быстро устанавливается и в решении (2) исчезает последняя двойная сумма. При данном числе узловых точек величину $rc\omega$ можно подобрать настолько малой, что коэффициент при $\sin\omega t$ станет меньше любого наперед заданного положительного числа, а коэффициент при $\cos\omega t$ станет с достаточной степенью представлять точное решение уравнения (1)

$$z_p=h^2\sum\sum\frac{b_{ip}b_{qp}}{\lambda_p}f_q.$$

Доказывается, что параметры r, c и ω необходимо подбирать в зависимости от числа узловых точек, так как при неизменных r, c и ω и бесконечном уменьшении шага h решение (2), получаемое на сетке, удаляется от решения уравнения Пуассона и стремится к нулю. При этом погрешность от случайных ошибок, связанных с неточным воспроизведением f_{ij}, не возрастает. Это видно из вероятностной оценки $D^2[\xi_{ij}]\leqslant\frac{1}{4}h^2\sigma^2\pi$, где σ — дисперсия случайной ошибки. Г. К. Кузьминок

9259. Новый способ приближенного вычисления собственных чисел задачи Штурма—Лиувилля. Дикий Л. А., Докл. АН СССР, 1957, 116, № 1, 12—14

Для приближенного вычисления собственных значений задач Шгурма—Лиувилля

$$-u''+p(x)u=\lambda u;\ u(0)=u(\pi)=0$$

автор заменяет функцию $p(x)$ отрезком ее ряда Фурье по косинусам $p(x)\approx\sum_{n=0}^{N}a_n\cos nx$, причем полагает $a_0=0$, что равносильно уменьшению всех собственных чисел на число $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(t)\,dt$. Для такого вида функции $p(x)$ автором ранее (РЖМат, 1956, 2996) были найдены коэффициенты асимптотического разложения $\lambda_n\sim n^2+c_0+\frac{c_2}{n^2}+\frac{c_4}{n^4}+\ldots$ и доказаны тождества:

$$\sum(\lambda n-n^2)=\frac{p(0)+p(\pi)}{4},$$

$$\sum(\lambda_n-n^4-2c_2)=c_2-\frac{p^2(0)+p^2(\pi)}{5}+$$

$$+\frac{p''(0)+p''(\pi)}{8}\text{ и т. д.}$$

Сходимость слева стоящих рядов недостаточно быстрая, ибо их члены величины $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Для улучшения их сходимости автор использует известные равенства $\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $\sum\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$ и т. д. Используя весьма ограниченное число этих рядов, автор весьма точно определяет первые собственные значения. В качестве примера приведено уравнение Матье. Я. М. Каждан

9260. О применении метода асимптотического интегрирования к решению одного уравнения теории оболочек. Зимин В. И., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н. 1957, № 4, 97—103 (рез. узб.)

Излагается метод приближенного интегрирования линейного дифференциального уравнения

$$Z^{VI}+A_1Z^V=B_1Z^{IV}+C_1Z'''+(D_2+b^4D_1)Z''+$$

$$+(E_2+b^4E_1)Z'+(F_2+b^4F_1)Z=0, \qquad (1)$$

к которому приводит задача о малых колебаниях оболочек вращения.

Сначала автор составляет специальное уравнение

$$y^{VI}+Ay^V+By^{IV}+Cy'''+b^4(Dy''+Ey'+Fy)=0, \qquad (2)$$

общий интеграл которого имеет вид

$$y = C_1 \cos m + C_2 \sin m + C_3 \operatorname{ch} m + C_4 \operatorname{sh} m + C_5 m + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные, а $m = b \int \sqrt[4]{-D}\, d\alpha$. Затем уравнение (1) специальной подстановкой преобразуется к уравнению, коэффициенты которого достаточно мало отличаются от соответствующих коэффициентов уравнения (2), и находится с относительной погрешностью порядка b^{-1} общий интеграл уравнения (1). К. В. Задирака

9261. О численном интегрировании уравнения устойчивости. Кастаньетто (Sur l'intégration numérique de l'équation de stabilité. Castagnetto Louis), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 2, 255—257 (франц.),

Для решения уравнения с постоянными коэффициентами $d^2\delta/dt^2 = p_a - p_n \sin\delta$ при начальных условиях $\delta_0 \neq 0$, $\delta'_0 = 0$ применяется известный метод численного интегрирования Адамса—Штермера. Начало таблицы составляется при помощи разложения искомой функции δ в ряд Тейлора. Приводится формула с учетом разностей пятого порядка. Г. И. Бирюк

9262. О вычислении собственных значений интегрального уравнения при помощи следов повторных ядер. Мысовских И. П., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 1, 45—48

Обозначая следы повторных ядер через $k_j = \int_a^b K_j(s, s)\, ds$ $(j = 1, 2, \ldots,)$, где $K(s, t)$ — вещественное, симметрическое непрерывное и положительное ядро в квадрате $a \leqslant s, t \leqslant b$, автор находит верхнюю для $m \geqslant 3$ и нижнюю для $m \geqslant 4$ оценки для наименьшего собственного значения λ_1 ядра $K(s, t)$: $\sqrt[m]{\frac{p_1}{k_m}} < \lambda_1 < \frac{k_{m-1}}{k_m}$, где p_1 — неизвестная кратность λ_1, определяемая из приближенного равенства $\frac{1}{p_1} = S'_m\left(\frac{k_{m-1}}{k_m}\right)$, ($S_m(\lambda)$ — известный полином).

Случай $m = 2$, не укладывающийся в указанную схему, рассматривается отдельно и также находятся верхняя и нижняя оценки для первого собственного значения. Для ядра

$$K(s, t) = \begin{cases} 10s(1-t) & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ 10t(1-s) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

даются оценки $0{,}9869596 < \lambda_1 < 0{,}9869647$ (точное значение $\lambda_1 = 10^{-1}\pi^2 = 0{,}9869604\ldots$). К. В. Задирака

9263. К приближенному решению некоторых интегро-дифференциальных уравнений. Кривошеин Л. Е., Уч. зап. Физ.-матем. фак. Кирг. ун-та, 1957, вып. 4, ч. 2, 39—68

В § 1 рассматривается вопрос о приближенном решении интегро-дифференциального уравнения вида:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, P[y]\, dt,$$

где $P[y(t)] = \sum_{i=0}^{m} b_i(t) \cdot y^{(m-i)}(t)$, $y^{(m-i)}$ — производная $(m-i)$-го порядка. Положив $P[y(x)] = u(x)$, $P[f(x)] = F(x)$, $P[K(x, t)] = M(x, t)$, автор получает (после применения оператора P) из исходного уравнения следующее уравнение:

$$u(x) = F(x) + \lambda \int_a^b M(x, t)\, u(t)\, dt.$$

Если это «разрешающее» уравнение решено, то искомая функция найдется без труда. Автор указывает на известные методы для решения как этого (разрешающего) уравнения, так и первоначального; одновременно по каждому методу даются оценки (методы С. А. Чаплыгина, Ю. Д. Соколова и др.).

В § 2 приближенно решается задача Коши:

$$L[y] = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\, P[y]\, dt,$$

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)},\ i = 0, 1, \ldots, n-1,\ x_0 \in [a, b],$$

где $L[y(x)] = y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x)$ (обозначение для $P[y]$ прежнее). Автор показывает, как можно получить разными способами разрешающую систему уравнений, вполне аналогичных разрешающему уравнению, упомянутому в § 1, что и позволяет решить задачу теми же методами, которые указаны в первом параграфе. Дан один пример, иллюстрирующий применение методов Нистрема, Чаплыгина и Ю. Д. Соколова. Библ. 23 назв.

Я. И. Алихашкин

9264. К ограниченности характеристических чисел произвольной матрицы. Хейнрих (Zur Eingrenzung der charakteristischen Zahlen einer beliebigen Matrix. Heinrich H.), Technik, 1958, **13**, № 2, 82—86 (нем.)

Используя норму $R_0^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$, след s и порядок n произвольной матрицы $\|a_{ij}\|$, автор получает ряд результатов о распределении ее характеристических чисел. В частности, показано, что: 1) все характеристические числа λ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ матрицы находятся внутри круга радиуса $\sqrt{\frac{n-1}{n}}\, R$ с центром в точке s/n, где $R^2 = R_0^2 - |s|^2/n$; 2) для любого $m < n$ в полуоткрытом кольце $\left(\frac{R}{\sqrt{m+1}},\ \sqrt{\frac{n-1}{n}}\, R\right]$ (с центром в точке s/n) имеется самое большое m характеристических чисел данной матрицы кратности не выше m.

Результат обобщается на случай бесконечных матриц со сходящейся нормой. Имеется один иллюстративный пример. Н. Я. Ляшенко

9265. К вопросу о методе релаксации. Марков (До питання про метод релаксації. Марков О. О.), Наук. зап. Херсоньск. держ. пед. ін-т, 1956, вип. 7, 45—48 (укр.)

Автор приводит два замечания относительно метода релаксации, применяемого для решения линейных систем. В частности, рассматривается предложенный Гаскеллом (Gaskell R. E., Quart. Appl. Math., 1943, 1) способ ускорения сходимости процесса при решении системы $c_i(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - B_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, состоящий в замене при переходе от m-го приближения $x^{(m)}$ к $(m+1)$-му $x^{(m+1)}$ той неизвестной x_k, для которой $\left|\frac{c_k(x^{(m)})}{a_{kk}}\right| = \max_i \left|\frac{c_i(x^{(m)})}{a_{ii}}\right|$, на величину $x_k^{(m)} - \frac{c_k(x^{(m)})}{a_{kk}}$.

Автором доказано, что этот метод оправдывает себя в случае $n = 2$, и показано на примере, что уже при $n = 3$ метод может быть полезным лишь при нахождении последнего приближения Г. И. Бирюк

9266. Сравнение метода последовательной верхней релаксации с полуитеративными методами, использующими многочлены Чебышева. Варга (A comparison of the successive overrelaxation method and

semi-iterative methods using Chebyshev polynomials. Varga Richard S.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1957, 5, № 2, 39—46 (англ.)

Сравнивается скорость сходимости в среднем метода последовательной релаксации $\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{L}_{\omega r} [\mathbf{u}_m] + \mathbf{g}$ (РЖМат, 1955, 1953) и полуитеративного метода, который сформулирован так: Для решения системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Au} = \mathbf{k}$ из векторов $\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_n$, получаемых из соотношений $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{Mu}_i + \mathbf{k}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, строится вектор $\mathbf{t}_n = \sum_{j=1}^{n} \nu_j(n)\, \mathbf{u}_j$, ($\nu_j$ — действительные числа), который принимается за приближенное решение системы. Этот процесс называется полуитеративным методом относительно матрицы M.

Дано другое доказательство теоремы Янга: Метод последовательной верхней релаксации сходится в среднем по крайней мере в 2 раза быстрее, чем полуитеративный метод относительно метода Якоби (т. е. $\mathbf{M} = \mathbf{B}$: $b_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$ $(i \neq j)$ и $b_{ii} = 0$).

Доказана также теорема: Метод последовательной верхней релаксации сходится в среднем по крайней мере быстрее, чем полуитеративный метод относительно метода Зеделя (т. е. $\mathbf{M} = \mathbf{L}_{\sigma, 1}$). В обеих теоремах предполагается, что A удовлетворяет некоторым условиям.

Наконец, доказано, что если только предполагать, что собственные значения λ_k метода последовательной верхней релаксации лежат в круге: $|\lambda_k| \leqslant \rho < 1$ и $\omega > 1$, то наискорейший полуитеративный метод относительно метода последовательной верхней релаксации есть простое повторение n раз метода последовательной верхней релаксации. Юань Чжао-дин

9267. Метод нахождения вещественных корней кубических уравнений при помощи логарифмической линейки. Пеннизи (A method for finding the real roots of cubic equations by using the slide rule. Pennisi Louis L.), Math. Mag., 1958, 31, № 4, 211—214 (англ.)

9268. Пробная классификация методов и библиография для решения систем линейных уравнений. Форсайт (Tentative classification of methods and bibliography on solving systems of linear equations. Forsythe George E.), Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1953, № 29, 1—28 (англ.)

9269. По поводу доказательства невозможности построения квадратурной формулы с равными коэффициентами и числом узлов, большим девяти. Крылов В. И., Тр. Ин-та физ. и матем. АН БССР, 1957, вып. 2, 249—254

Академиком С. Н. Бернштейном было доказано, что квадратурная формула Чебышева

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx \cong \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

с действительными узлами, точная для многочленов степени n, не существует при $n > 9$. Доказательство этой теоремы основано на сравнении коэффициентов квадратурной формулы Чебышева с коэффициентом A_m квадратурной формулы Гаусса, соответствующим наибольшему узлу ξ_m. Если $n = 2m - 1$, то $A_m > \frac{2}{n}$. Для использования этого неравенства при доказательстве необходимо иметь хорошую оценку коэффициента A_m. Эта оценка была получена С. Н. Бернштейном на основе его работ по общим проблемам теории ортогональных многочленов.

Автор дает оценку коэффициента A_m, исходя из простых свойств многочленов Лежандра, корни которых являются узлами квадратурной формулы Гаусса на отрезке $[-1, +1]$.

Известно, что $A_m = \frac{2}{(1 - \zeta_{mn}^2) P_m'(\xi_m)}$. Для наибольшего корня многочлена Лежандра $P_m(x)$ степени m, исходя из дифференциального уравнения для $P_m(x)$ в работе доказано неравенство: $1 - \xi_m < \frac{3}{m(m+1)}$, а для $P_m'(\xi_m)$ следующее неравенство

$$P_m'(\xi_m) > \frac{2}{3(1 - \xi_m)} \left[1 - \frac{\Gamma(m+4)}{288\, \Gamma(m-2)} (1 - \xi_m)^3\right].$$

Эти неравенства дают для A_m оценку $A_m < \frac{8.517}{m(m+1)}$. Просто полученная оценка для A_m делает доказательство теоремы Бернштейна более простым и наглядным.

А. Н. Иванова

9270. О механических квадратурах. Фавар (Sur les quadratures mécaniques. Favard J.), Enseign. math., 1957, 3, № 4, 263—275 (франц.)

Строится равенство вида

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{k} m_i f(\xi_i) + c_1 [f'(1) - f'(0)] + \ldots + c_{n-2} [f^{(n-2)}(1) - f^{(n-2)}(0)] + \int_0^1 f^{(n)}(t)\, k_n(t)\, dt \quad \left(\sum m_i = 1, \quad \sum m_i \xi_i = 1/2\right), \qquad (1)$$

аналогичное формуле Эйлера—Маклорена и позволяющее увеличивать точность приближенной квадратуры. Для формул трапеций и касательных равенство (1) приводит к известным формулам Эйлера. Кратко рассмотрены приближенные квадратуры Симпсона и Гаусса. Указывается на возможность обобщения равенства (1) путем введения в него некоторого вспомогательного многочлена, что позволяет получить ряд новых квадратурных формул.

Говорится также о возможности другого метода увеличения точности квадратуры, сущность которого состоит в следующем: если взять интегральное представление остатка $R(f) = \int_0^1 f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{k} m_i f(\xi_i) = \int_0^1 f''(t)\, k_2(t)\, dt$, то для выделения «главной части» $R(f)$ достаточно к интегралу $\int_0^1 f'' k_2 dt$ применить какую-либо (например, (1)) формулу механических квадратур. Условия, при которых является выгодным применение рассматриваемых квадратурных формул, не выясняются.

В. И. Крылов

9271. Общие формулы механической квадратуры типа Гаусса. Чакалов (Formules générales de quadrature mécanique du type de Gauss. Tchakaloff L.), Colloq. math., 1957, 5, № 1, 69—73 (франц.)

Сокращенное изложение ранее опубликованной работы автора (РЖМат, 1956, 1255).

А. Х. Турецкий

9272. Обобщенная формула Симпсона. Кобаяси Сигэхиро, Кагаку, 1958, 28, № 1, 35—36 (японск.)

9273. Применение трилинейного соответствия к некоторым вопросам номографии. Голубева К. И., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-т, 1957, 57, 207—230

Рассматривается теория трилинейного соответствия и его связь с номографированием уравнений третьего номографического порядка

$$Af_1f_2f_3 + B_1f_2f_3 + B_2f_1f_3 + B_3f_1f_2 + C_1f_1 + C_2f_2 + C_3f_3 + D = 0,$$

где f_1, f_2, f_3 — функции аргументов x_1, x_2, x_3 соответственно; A, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, D_3, C — постоянные числа. Г. С. Хованский

9274. **О некоторых вопросах исследования нестационарных процессов графо-аналитическим методом. Нечаев Г. К.,** Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1957, вып. 16, 151—156

Сравниваются численные и графо-аналитический методы приближенного определения параметров A, B, b зависимости вида

$$y = A \mp B \cdot e^{-b \cdot \tau},$$

аппроксимирующей функцию, эмпирически заданную на некотором отрезке изменения аргумента τ графиком или таблицей. А. Б. Штыкан

9275. **О графической неточности и целесообразности выбора длины шага при графическом интегрировании методом Мейснера—Людвига. Гаучи** (Über die zeichnerischen Ungenauigkeiten und die zweckmässige Bemessung der Schrittlänge beim graphischen Integrationsverfaheren von Meissner—Ludwig. Gautschi Walter), Verhandl. naturforsh. Ges. Basel, 1954, 65, № 1, 49—66 (нем.)

ТАБЛИЦЫ

9276. **Таблицы некоторых отношений дробных функций Бесселя. Гейслер** (Tabellen für einige Quotienten halbzahliger Besselfunktionen. Geissler Dietmar), Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, 1956—1957, 6, № 1, 79—88 (нем.)

Протабулированы с шестью значащими цифрами функции

$$\beta I_{-\frac{1}{2}}(\beta)/I_{\frac{1}{2}}(\beta), \quad I_{\frac{3}{2}}(\beta)/\beta I_{\frac{1}{2}}(\beta)$$

и $I_{\frac{5}{2}}(\beta)/\beta I_{\frac{3}{2}}(\beta)$ для $\beta = 0{,}00\ (0{,}01)\ 17{,}3$. В. К. Саульев

9277. **Таблица квадратов косекансов. Рейнолдс** (Table of squares of cosecants. Reynolds George E. Cambridge, Mass., Electronics Res. Direct. Air Force Cambridge, 1954, iv, 89 pp.), (англ.)

Восьмизначная таблица $\operatorname{cosec}^2 x$ для $x = 0^0\ (0{,}01)\ 90^0$. Fox L.

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 671.

9278. **Таблица для решения уравнения Кеплера с помощью арифмометра. Баженов Г. М.,** Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1957, 91, Тр. Астрон. обсерв., 12, 255—257

Дается таблица значений вспомогательной функции $f(x) = \theta \sec \theta - \operatorname{tg} \theta$, где $\theta = E - M$, для решения уравнения Кеплера $E - e\sin E = M$. Решение уравнения Кеплера сводится к нахождению θ последовательными приближениями из вспомогательного уравнения

$$x = \operatorname{tg}\theta = \frac{e\sin M - f(x)}{1 - e\cos M}$$

(видоизмененный метод Титьена). С. С. Токмалаев[a]

9279. **К вопросу о вычислении динамических характеристик избирательных систем. Фещенко С. Ф., Рапопорт И. М., Гаткин Н. Г.,** Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 21, 34—40

Излагается методика табулирования интеграла $I(u) = \exp(-eu)\int_{u_0}^{u} \exp(cv + jv^2)\,dv$. В. К. Саульев

9280. **Таблицы интегральной показательной функции. Бекеши, Тот** (Táblázat az exponenciális-integrál függvényre. Békéssy András, Tóth Károly), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, 1, №1-2, 273—294 (венг.; рез. русск., нем.)

Приведена восьмизначная таблица значений функции

$$y(x) = xe^{-x}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\varepsilon}\frac{e^t}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{x}\frac{e^t}{t}\,dt\right)$$

(вместе с первыми разностями) для $x = 15(0{,}01)30$. В. К. Саульев

9281. **Таблицы интеграла Мичелла. Вейнблюм** (A systematic evaluation of Michell's integral. Weinblum Georg P. (Rept. David W. Taylor Model Basin, № 886). Washington, 1955, vi. 59 pp.) (англ.)

Этот интеграл встречается в теории волнового сопротивления корабля, разработанной Мичеллом (Philos. Mag. 1898, (5), 45, 106—123). Таблицы интеграла, вычисленные на табуляторе в Национальном бюро стандартов, облегчили вычисление сопротивления корабля некоторой формы и для определенной скорости. J. Todd

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 4, 415

9282 К. **Таблицы интерполяционных коэффициентов Эверетта. Дейкстра, Вейнгарден** (Table of Everett's interpolation coefficients. Dijkstra E. W., Wijngaarden A. van. The Hague, Excelsior's Photo-Offset, 1955, 214 pp.) (англ.)

Таблицы содержат значения интерполяционных коэффициентов Эверетта с семью десятичными знаками для p=0(0,0001)1. Шаг выбран столь малым для того, чтобы по возможности вообще избежать интерполирования при пользовании таблицами. Поэтому в таблицы вспомогательный материал не включен. Таблицы изданы фотоофсетным способом. М. К. Керимов

9283 К. **Шестизначные таблицы тригонометрических функций с аргументом, выраженным в часовой мере, содержащие натуральные значения шести тригонометрических функций через 1^s от 0 до 12^h, и значения котангенсов и косекансов через 0^s, 1 от 0^h 00^m до 0^h 12^m. Ангелов С. А.** М., Гостехиздат, 1957, 214 стр., илл., 22 р. 60 к.

В первой части книги содержатся натуральные значения котангенсов и косекансов малых углов от 0^h 00^m до 0^h 12^m через 0^s, 1. Во второй части протабулированы sin, cos, tg, ctg, cosec и sec для углов от 0^h0^m до 12^h0^m через 1^s. Поправки на десятые доли секунды выбираются из специальных табличек пропорциональных частей. Все функции даны с шестью значащими цифрами. Имеется вспомогательная таблица перевода часов и минут в доли суток и минут в доли часа. В. К. Саульев

9284 К. **Таблицы логарифмов. Гарсия-Рока** (Tablas de logaritmos. GarciaRoca Ricardo. Valencia, Ed. Bello, 1957, 20 p., 15, 00 ptas), Bibliogr. hisp., 1957, 16, № 9, 213 (исп.)

См. также: 8925, 8926, 8935, 9126

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

9285. **Автоматическая программирующая программа для машины ЭЛИОТТ-401. Йетс, Липтон** (An automatic programming routine for the Elliott 401. Yates F., Lipton S.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, 4, № 2, 151—156 (англ.)

ЭЛИОТТ-401 — двухадресная система с 32-разрядными числами и командами длительностью по 100 *мксек*. 10 старших разрядов команды, так называемый адрес A_2, определяют адрес следующей команды; 10 младших разрядов, так называемый адрес A_1, определяют адрес

ячейки запоминающего устройства, где находится число либо — в случае условного перехода — одна из выбирасмых команд. Адрес исполняемой команды обозначается через A_0. Средние 12 разрядов являются оперативными и подразделяются на 4 группы по 3 разряда каждая: источник, функция, назначение и контроль.

Основное запоминающее устройство машины — на магнитном диске с 23 дорожками, с номерами дорожек от 0 до 6 и от 7/0 до 7/15; каждая дорожка несет по 128 чисел. Приказы выбираются непосредственно с диска. Управление дорожками №№ 7/0—7/15 является программным и осуществляется с помощью реле. Переключение дорожек №№ 0—6 является электронным. Запись на дорожку № 0 запрещена: она используется для программы деления и программы ввода. В машине имеется 5 регистров; R_1 — аккумулятор; R_2 — рабочий регистр с двойным количеством разрядов: R_3, R_4, R_5 — регистры, используемые как оперативное запоминающее устройство и для модификации приказов. При умножении сомножители помещаются в регистры R_2 и R_3.

Указывается, что использование принципа автоматического программирования на машине ЭЛИОТТ дает значительный выигрыш во времени, но что при этом необходимо соблюдать ряд дополнительных условий. Предлагается автоматическая программирующая программа, которая обрабатывает программу, составленную обычным способом, с учетом оптимального расположения команд и чисел в ней. Автоматическая программирующая программа обладает рядом особенностей, которые вообще значительно упрощают задачу программировщика. Для программирующей программы рабочая программа составляется в условных адресах. Адрес A_2 вообще не указывается: достаточно расположить команды в той последовательности, в какой они должны выполняться. Команды, имеющие определенные адреса (выход к подпрограмме, начальный адрес, величина сдвига в команде сдвига и т. п.), должны иметь соответствующий признак.

В работе программирующей программы различаются пять стадий: ввод, стадия А, стадия В, стадия С и вывод. При вводе условная программа с соответствующими признаками приказов вводится в машину по специальной программе. На стадии А каждый приказ проверяется и записываются налагаемые на него условия. На стадии В налагаемые условия проверяются на совместимость. На стадии С условным адресам присваиваются рабочие адреса в соответствии: с налагаемыми условиями; условиями оптимальных адресов и свободными ячейками запоминающего устройства. При выводе печатаются данные регистра занятых ячеек и собственно программа в стандартной форме. Вывод программы можно повторять дважды во избежание ошибок печати.

Программирующая программа для машины ЭЛИОТТ в настоящее время существует в двух вариантах. Одна работает с программами, требующими до 371 ячейки памяти, другая — до 1023. Программирующая программа получается сложной и занимает до 1800 ячеек памяти, включая оперативные ячейки и константы, и содержит до 245 команд условных переходов. Программы, составленные программирующей программой, по сравнению с программой, составленной последовательным способом, где $A_2=A_0+1$, дают выигрыш во времени от 5 до 10 раз.

Программы, составленные на машине, детально изучались и проверялись, сравнивались с программами, составленными для тех же задач опытными программировщиками с учетом оптимального распределения. Во всех случаях оказывалось, что либо эти программы были одинаково хороши, либо машинная программа оказывалась значительно лучшей. Подчеркивается, что составление программ на машине значительно снижает машинное время отладки и совершенно исключает такие ошибки, как описки и т. п.

З. Д. Доброхотова

9286. **Стандартизованные методы программирования и универсальное кодирование.** Горн (Standardized programming methods and universal coding. Gorn Saul), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, 4, № 3, 254—273 (англ.)

Подробно описывается стандартизованный метод программирования задач для универсальной цифровой вычислительной машины, дающий возможность автоматического выполнения большинства операций программирования. Одновременно рассматривается метод построения соответствующих кодов. Методы были разработаны и с успехом применялись в высшей технической школе Мура (США). Библ. 8 назв.

А. В. Шилейко

9287. **Использование разложений чисел по отрицательному основанию в арифметическом устройстве цифровой вычислительной машины.** Павляк, Вакулич (Use of expansions with a negative basis in the arithmometer of a digital computer. Pawlak Z., Wakulicz A.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 3, 233—236, XIX (англ.; рез. русск.)

Отмечается, что во всех действующих вычислительных машинах имеет место ряд принципиальных и технических усложнений вследствие необходимости выполнять арифметические операции над числами двух знаков. Предлагается метод построения арифметического блока вычислительных машин путем использования систем счисления с отрицательным основанием. Формулируются теоремы: 1) каждое действительное число может быть представлено в виде разложения по степеням целого основания $g<-1$; 2) если число может быть представлено конечным разложением (рядом), то это разложение является единственным; 3) разложение действительных чисел по целому основанию $g<-1$ является единственным, за исключением чисел вида

$$\alpha = E\frac{g^k}{(-g+1)} + C\cdot g^{k+1},$$

где $E=\pm 1$, а C и k — любые целые числа (такие числа α имеют два отличных друг от друга бесконечных разложения). Рассматриваются алгорифмы основных арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления в системе счисления с основанием -2). Отмечается, что при этом алгорифм умножения проще, а алгорифмы других операций, по-видимому, не сложнее, чем используемые обычно. Подчеркивается, что упрощение логической схемы вычислительных машин, использующих систему счисления с основанием -2, поведет к уменьшению вероятности ошибок и к облегчению контроля за правильностью работы.

З. Л. Доброхотова

9288. **Характеристики вычислительных машин, необходимые для дальнейшего развития систем автоматического ведения решения задач.** Свифт (Machine features for a more automatic monitoring system on digital computers. Swift Charles J.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, 4, № 2, 172—173 (англ.)

В настоящее время для экономии дорогостоящего машинного времени используется или разрабатывается ряд систем для автоматического ведения работы цифровых вычислительных машин. В своем настоящем виде эти системы не свободны от возможности появления ошибок, свойственных также и оператору, которые могут привести или к разрушению информации

в машине, или к тому, что машина будет продолжать работать после выполнения необходимого объема вычислений.

Автор не видит пути для введения единого определения необходимого объема вычислений, но считает, что следующие особенности вычислительной машины позволят строить систему автоматического ведения, не требующую вмешательства оператора: 1) наличие секции памяти, отведенной специально для автоматического ведения (вероятно это должна быть магнитная лента или несколько лент); 2) наличие блокировки обращения к этой секции, включаемой по специальной команде; 3) возможность выключения блокировки по специальной команде, передающей управление в некоторую часть L_1 этой секции; 4) возможность выключения блокировки и передачи управления в другую часть L_2 секции в случае, когда имеет место команда обращения к секции автоматического ведения, или имеет место команда останова, или заданное время решения истекло; 5) наличие датчика времени.

А. В. Шилейко

9289. **«Лепрехаун» — автоматическая цифровая вычислительная машина; габариты телевизионного приемника** («Leprechaun». An automatic digital computer. The size of a television set). Computers and Automat., 1957, 6, № 7, 10—11 (англ.)

Описывается новая универсальная малогабаритная вычислительная машина «Лепрехаун» на полупроводниковых триодах. Основные логические и счетные цепи машины построены на основе «прямой транзисторной логики», особенностью которой является сочетание логических и усилительных (формирующих) функций в одних и тех же элементах. «Лепрехаун» работает в параллельном коде с 17-значными двоичными числами (включая знак). По схеме построения машина асинхронна: каждое ее устройство (арифметическое, запоминающее, устройства управления и т. д.) работает по своей частоте, а связь между устройствами осуществляется в разрывы между тактами. Машина обладает быстродействующим запоминающим устройством на ферритовых сердечниках емкостью в 1024 18-разрядных чисел, построенным по обычной схеме совпадающих токов. 18-й разряд используется для контроля за ходом программ. Полный цикл обращения к запоминающему устройству составляет 20 *мксек*.

Кроме обычных для универсальных вычислительных машин арифметических и логических действий, «Лепрехаун» может выполнять ряд действий, связанных с ее специфическим военным назначением. В частности, предусмотрена операция безусловного перехода, облегчающая включение в программу меняющихся подпрограмм малой длительности. Система команд в машине — одноадресная, что упрощает программирование и эксплуатацию машины малоквалифицированным персоналом. Машина успешно используется как модель для имитации и решения различных военных задач, главным образом авиационных.

Конструктивно машина выполнена в виде одного шкафа, лицевая панель которой служит пультом управления. Программа и исходные данные вводятся с помощью перфорированной ленты. Изменения в программу, а также ряд констант могут вноситься штекерными переключениями на панели управления. Малогабаритный источник питания, вмонтированный в тот же шкаф, выполнен на полупроводниковых элементах. Схемы стабилизации обеспечивают постоянство номиналов в пределах 1% при статическом изменении нагрузки от 0 до 1,8 *а* (для основного коллекторного источника) и 3% при импульсной нагрузке 1,6 *а*. Общее потребление мощности составляет 160 *вт*. Из этой мощности 20 *вт* рассеивается в логической части машины, 48 *вт* в запоминающем устройстве, 82 *вт* — в цепях питания и стабилизации и 10 *вт* — в цепях индикации. При этом непосредственно в транзисторах логической части машины рассеивается только 2,5 *вт*.

«Лепрехаун» содержит около 9000 электрических элементов (не считая магнитных сердечников), в том числе около 5000 кристаллических триодов. Бо́льшую часть триодов составляют обычные германиевые триоды плоскостного типа с предельной частотой 7 *мгц*. Только в цепях, где важны строгие временные соотношения, используются в незначительном количестве поверхностнобарьерные триоды. В запоминающем устройстве используется также несколько десятков мощных плоскостных транзисторов. А. А. Крупский

9290. **Транзисторная логика для вычислительных схем** (Transistor logic for computer circuits), Control Engng, 1957, 4, № 8, 34 (англ.)

Сообщение о выпуске телефонными лабораториями «Белл» новой малогабаритной цифровой вычислительной машины «Лепрехаун» (Leprechaun) на полупро

К реф. 9289, 9290, 9291

водниковых триодах. Машины (см. фото) содержат 9000 элементов, из них около 5000 транзисторов; габариты не превышают габаритов обычного консольного телевизора. Машина — параллельная (17 двоичных разрядов), универсальная; имеется оперативное запоминающее устройство на ферритовых сердечниках емкостью 1024 чисел со временем выборки 20 *мксек* (см. также реф. 9289). Разработка машины выполнена по контракту с ВВС США. А. А. Крупский

9291. **Малая быстродействующая вычислительная машина.** — (Small high speed computer), Electr. Engng, 1957, 76, № 8, 664 (англ.)

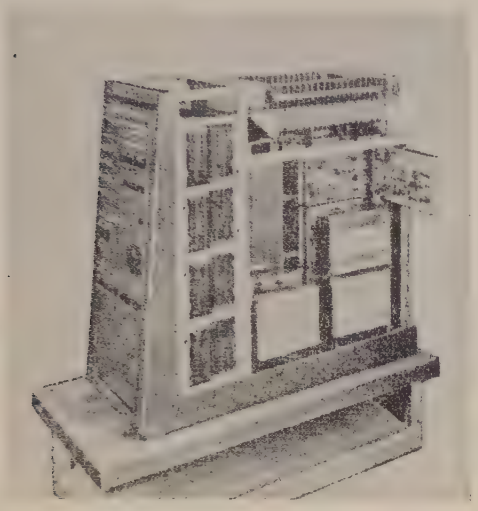
Приведено фото машины «Лепрехаун» (реф. 9290).

9292. **Вычислительная машина «Традик-Лепрехаун». Гитенс** (The Tradic Leprechaun computer. Githens J. A.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1957, № T-92, 29—33. Discuss. 33 (англ.)

Описывается вычислительная машина «Традик-Лепрехаун» (Tradic Leprechaun), построенная компанией «Белл» (Bell Telephone Lab.) на плоскостных полупроводниковых триодах. Машина построена по заказу ВВС США и предназначена для управления в натураль-

ном масштабе времени. На этой машине продемонстрирована возможность широкого применения транзисторных схем с непосредственной связью, включающих большое число триодов, и возможность построения запоминающего устройства на магнитных сердечниках, работающего на принципе совпадения токов, с управлением от полупроводниковых триодов. Машина служит также для испытания новых типов полупроводниковых триодов и испытания новых логических структур вычислительных машин.

«Лепрехаун» является специализированной машиной лишь в том отношении, что длина чисел, с которыми он работает, определена из условий применения машины; в остальном он полностью удовлетворяет требованиям, предъявляемым к универсальным машинам. Это без-



К реф. 9292

ламповая одноадресная машина, с хранимой программой, работающая с 17-разрядными числами и выполняющая 28 арифметических и логических операций. Имеется операция безусловного перехода, позволяющая упростить включение в основную программу коротких подпрограмм. Имеется операция изменения адреса, при которой во все команды, где пять наименьших цифр являются нулями, вместо этих пяти цифр подставляется содержание 5-разрядного регистра изменения адреса. Оперативное запоминающее устройство имеет емкость 1024 числа, описание его дано в статье Янкера (РЖМат, 1958, 793). Рабочий цикл запоминающего устройства равен 20 *мксек*, время сложения составляет 18 *мксек*, время умножения около 370 *мксек*. Логические цепи машины выполнены как схемы с непосредственной связью. В этих схемах применяются всего два типа компонентов: транзисторы и сопротивления и лишь один номинал питающего напряжения (2 *в*); в них имеется лишь две основные конфигурации включения триодов: параллельное и последовательное. Более сложные схемы являются соединением некоторого числа простейших. Транзисторы и сопротивления группируются в отдельные платы, соединенные между собой скручиванием концов без применения пайки. Соединения между элементами можно легко менять, создавая новые логические переходы.

Применяются германиевые плоскостные триоды с *p-n-p* переходом, с частотой отсечки 7 *мгц* и сопротивления номинала 510 *ом*.

Машина имеет фотоэлектрический ввод, вывод осуществляется с помощью телетайпа, однако возможен ввод и вывод на бумажную ленту. Общая потребляемая мощность около 160 *вт*, размеры машины сравнимы с размерами комнатного телевизора.

Приведен боковой вид машины со снятым кожухом (см. фото). О. В. Бачин

9293. **«Электронный мозг» размером с телевизор** (Electronic brain the size of TV set), J. Franklin Inst., 1957, 264, № 2, 162—164 (англ.)

Сообщается, что фирма «Белл» (Bell Telephone Laboratories) по контракту с ВВС США разработала новую электронную цифровую вычислительную машину «Лепрехаун» (Leprechaun). «Лепрехаун» является безламповой одноадресной машиной параллельного действия с фиксированной программой. В машине применены специально разработанные элементы на полупроводниковых приборах и ферритах, конструкция которых обеспечивает предельную простоту сборки машины, экспериментирования и возможность автоматизации производства. Приводятся некоторые сведения о машине. Е. М. Баскаков

9294. **Самолетная вычислительная система GP** (An airborne GP computer), Control Engng, 1957, 4, № 9, 29 (англ.)

Фирма «Филко» (Philco) сообщает о самолетной вычислительной машине С-1100, входящей в систему GP и предназначенной для решения задач навигации, стрельбы и расчета горючего. Конструктивно машина выполнена в виде 6 отдельных блоков, которые занимают объем 0,0283 $м^3$ и весят около 64 *кг*. Все схемы выполнены на транзисторах. Машина С-1100 имеет два запоминающих устройства: одно на магнитных тороидах, другое — на магнитном барабане для запоминания программы. Цикл повторения программы 33 *мсек*. Работая с 19-разрядными двоичными числами, машина выполняет сложение и вычитание за 25 *мксек*, умножение, деление и извлечение квадратного корня за 75 *мксек*, выборку числа или его абсолютной величины за 25 *мксек*. А. Н. Чуйкин

9295. **Автопилот с легкой цифровой вычислительной машиной. К л а с с** (Light digital computer auto-navigates. K l a s s P h i l i p J.), Aviat. Week., 1957, 66, № 23, 79, 83 (англ.)

Приводятся данные автопилота, разрабатываемого фирмой «Либраскоп» (Librascope) по заданию авиационного исследовательского центра «Райт» (Wright). Макет устройства, состоящий из цифровой вычислительной машины и небольшой аналоговой машины, весит 14,5 *кг* и занимает объем 17 $дм^3$. Цифровая вычислительная машина весит 8,2 *кг*, потребляет 100 *вт* и содержит 250 кремниевых триодов и 1000 кремниевых диодов. Она представляет собой универсальную последовательную машину, работающую со словами длиной в 25 разрядов. В качестве запоминающего устройства в ней используется магнитный барабан емкостью 2048 слов, вращающийся со скоростью 6000 об/мин. Используются аналого-цифровые преобразователи. Общая точность работы цифровой части устройства, включая точность чувствительных элементов, лучше чем 0,1%.

В состав устройства входит разрабатываемый той же фирмой миниатюрный астрономический блок, который может осуществлять автоматическое сложение за положением одной из 57 наиболее ярких звезд и планет. Блок будет весить около 2,3 *кг*. Пилот будет вручную устанавливать номер данной звезды, после чего вычислительная машина выдаст в астрономический блок приближенное значение ее азимута. Окончательное нахождение звезды будет выполняться астрономическим блоком путем обзора соответствующего участка неба. Выбор навигационных звезд должен исключать возможность нахождения рядом двух звезд

одного порядка величины. Высказывается мнение, что при отсутствии видимости звезд можно будет осуществлять навигацию с помощью введения поправок на дрейф гироприборов. Эти поправки будут вычисляться вычислительной машиной по астрономическим данным, полученным при старте.

Миниатюрная аналоговая вычислительная машина конструктивно будет входить в состав индикатора. Ее задачей является счисление пути. Имеется в виду, что ее данные будут использоваться в тех случаях, когда система периодической проверки цифровой вычислительной машины обнаружит ошибку.

Автопилот демонстрировался на национальной конференции по аэронавигационной электронике. Предполагается его использование в коммерческой авиации. А. В. Шилейко

9296. **Цифровая вычислительная машина на основе магнитных цепей. Бамбраф** (A digital computer based on magnetic circuits. Bambrough B.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1957, **B194**, Suppl. № 7, 485—490. Discuss. 523—525 (англ.)

Описываются основные элементы и схемы на магнитных сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса, использованные в цифровой вычислительной машине ДЕККА-CI (Decca C1) фирмы «Декка Радар» (Decca Radar, Ltd).

Машина Декка-CI последовательного действия, работает с 10-разрядными десятичными числами в двоично-десятичном коде. Во всех логических и арифметических цепях применены сердечники (с прямоугольной петлей) типа FX 1508, которые имеют следующие параметры: внешний диаметр 2 *мм*, поперечное сечение 0,22 *мм*^{2}, индукция насыщения 1500 *гс*. В основу всех схем машины положена ячейка трехтактного магнитного регистра сдвига, где в каждую из трех тактовых обмоток подаётся в трехтактном числе два импульса: сдвигающий и запирающий.

К клапанирующим диодам такого регистра предъявляются весьма высокие требования по прямому (порядка 10 *ом*) и обратному (порядка 1000 *ом*) сопротивлению. Высокочастотные слоистые кремниевые или германиевые диоды, удовлетворяющие этим требованиям, пока еще настолько дороги и дефицитны, что от применения их в машине (где необходимо около 3 тыс. таких диодов) отказались. Были использованы селеновые и меднозакисные диоды, обратное сопротивление которых (комплексное, с учетом паразитной емкости) в рабочих условиях составляет 150 *ом*.

На основе ячейки регистра были разработаны 3 основные схемы: 1) усилитель на 4 сердечниках, имеющий 1 вход и 2 выхода, причем каждый выход имеет ту же мощность, что и вход; 2) инвертор на 6 сердечниках, имеющий также 1 вход и 2 выхода, но с тем отличием, что на одном из выходов информация выдается в обратном коде; 3) динамический триггер на 7 сердечниках, с отдельными установками «0» и «1».

Описываются логические узлы, построенные на этих основных схемах: узел антисовпадений на двух инверторах, узел эквивалентности на 4 инверторах, узел образования дополнительного кода на 5 инверторах и триггере и т. д. Исследования состава машины показали, что количества усилителей, инверторов и триггеров в ней относятся как 4 : 4 : 1 соответственно. Исходя из этого, было разработано 3 типа стандартных блоков: 1) 1 усилитель + 1 инвертор + 1 триггер; 2) 2 усилителя + 1 инвертор; 3) 1 усилитель + 2 инвертора. Блоки изготавливаются на стандартных платах методом печатного монтажа с печатным же 24-контактным разъемом. На одной стороне платы располагается весь монтаж, на другой — диоды и сердечники в закрытых капсулах, залитые специальной смолой. Указывается, что сжатие при заливке не влияет на свойства феррита; наблюдались только случаи обрыва выводов, что легко контролировать.

Вся арифметическая и логическая часть машины собрана на 12 стандартных стойках, каждая из которых вмещает до 20 стандартных блоков.

Блок импульсного питания машины ДЕККА-CI содержит 60 мощных ламп. Нагрузка (цепи сдвига, запрета и т. д.) включена через трансформаторы в анодах. Ведутся работы по сокращению числа ламп в блоке питания. Благодаря тому, что не все узлы машины работают одновременно, оказывается возможным применить матричный дешифратор с ламповым управлением, соответственно секционировав обмотки сдвига различных рядов сердечников. Ведутся также работы по сокращению числа диодов в машине путем использования сопротивлений со смещением и нелинейных свойств сердечников. Предусмотрен также переход ряда узлов на 4-тактную работу, что устранит необходимость в диодах.

В качестве запоминающего устройства в машине ДЕККА-CI применен магнитный барабан. Запись ведется по 63 дорожкам, скорость вращения 6000 об/мин. Благодаря тому, что основная частота машины составляет 92 *кгц* (цикл длится 10,8 *мсек*), а считывание и запись на барабан ведутся с частотой 276 *кгц*, одновременно с дорожки считываются 3 числа, разряды которых перемежаются. Разделение чисел производится на специальном регистре. Выборка дорожки осуществляется магнитным матричным дешифратором обычного типа.

Ввод данных в машину — с перфоленты через фототранзисторы. Одна из дорожек на перфоленте служит для стробирования. Вывод — на быстродействующее цифропечатающее устройство. Приведены основные схемы, характеристики сердечников и фото печатного монтажа стандартной платы машины ДЕККА-CI.

В дискуссии по статье описаны простая схема счетчика на ферротранзисторных ячейках и принцип работы однотактного магнитного усилителя (вернее, схемы «И», обладающей усилительными свойствами). Исследуются вопросы частотных ограничений при работе с ферритовыми, ферродиодными и ферротранзисторными элементами. Библ. 7 назв. А. А. Крупский

9297. **Надежность опытной модели системы СЕЙДЖ** (The reliability of a Sage System prototype), Computers and Automat., 1957, 6, № 9, 28 (англ.)

Сообщается об испытаниях надежности системы централизации противовоздушной обороны СЙДЖ (США) на опытной модели, состоявшей из опытной цифровой вычислительной машины XD-1 и опытной системы противовоздушной обороны. За 5 месяцев испытаний средняя надежность машины XD-1 составила 87,8% при ежедневной 17-часовой работе.

9298. **Новая система обработки данных — «Датаматик-1000». Смит** (A new large-scale data-handling system, DATAmatic 1000. Smith J. Ernest), Proc. East. Joint Computer Conf., 1957, № T-92, 22—28. Discuss. 28 (англ.)

«Датаматик-1000» представляет собой специально разработанную электронную систему обработки данных большой емкости. Система способна передавать информацию с магнитной ленты в свое центральное устройство и обратно со скоростью 60 000 десятичных разрядов в 1 сек.

Коды системы содержат по 52 основных и 4 контрольных двоичных разряда; один код соответствует одной инструкции или числу, имеющему от 8 буквенно-числовых знаков до 12 десятичных разрядов. Одна буква представляется 6 двоичными разрядами, один числовой десятичный разряд представляется 4 двоичными разрядами. Инструкции — трехадресные. Центральное устройство системы имеет арифметический узел

последовательного типа с частотой работы 2,2 *мгц*, устройство управления, основное быстродействующее запоминающее устройство на ферритовых сердечниках емкостью 2000 кодов и временем выборки 14 *мксек* и вспомогательное, или буферное, запоминающее устройство. Система производит 4300 сложений или вычитаний или 5500 операций сравнения в 1 сек.

Вспомогательное запоминающее устройство выполнено на магнитной ленте шириной 77 *мм* и длиной 900 *м* с повышенной износоустойчивостью. Общая емкость этого устройства составляет 50 000 зон или 3 100 000 кодов на катушку, что равносильно 37 млн. десятичных разрядов. Скорость движения ленты 2,60 *м/сек*.

В системе «Датаматик-1000» используется 33 инструкции, которые обеспечивают выполнение как стандартных вычислительных операций, так и специальных операций сортировки, объединения и поиска записанной информации. Информация вводится в систему с перфокарт путем передачи ее на ленту со скоростью 900 карт в 1 мин. Карты проходят через два считывающих механизма с целью проверки правильности ввода. Информация выводится с ленты на печатающее устройство, которое печатает 120 столбцов со скоростью 900 строк в 1 мин. Вывод может осуществляться также через быстродействующий перфоратор карт. Электрические схемы системы «Датаматик-1000» выполнены на субблоках с печатным монтажом. Стоимость системы 1,6 млн. долларов. Г. Х. Новик

9299. Национальное бюро стандартов (National Bureau of Standards), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 3, 217—218 (Digital Computer Newsletter, 1955, 7, № 3) (англ.)

Математико-технический комитет Национального бюро стандартов США (The Mathematical Technical Committee, National Bureau of Standards) опубликовал требования, которым должна удовлетворять будущая вычислительная машина Национального бюро стандартов. Будущая машина должна работать в 50—500 раз быстрее, чем существующая машина СЕАК, должна быть полностью параллельной и в ней должны применяться модифицированные элементы вычислительных машин СЕАК и ДИСЕАК, причем частота тактовых импульсов должна оставаться равной 1 *мгц*. Операции будут производиться над 53-разрядными двоичными числами в системе с фиксированной и плавающей запятой. Сложение двух таких чисел должно производиться в арифметическом узле за 1 *мксек*. Арифметический узел, работающий на таких скоростях, потребует такого же быстродействующего запоминающего устройства. Для оперативного хранения информации будет применено диодно-емкостное запоминающее устройство, разработанное Холтом (A. W. Holt) и имеющее время выборки 1 *мксек*. Ферритовое запоминающее устройство будет применено в качестве буферного. Машина будет управляться 3-адресными инструкциями. Полное время сложения при этом будет равно при фиксированной запятой 8 *мксек* и при плавающей запятой 16 *мксек*, а время умножения будет равно соответственно 29 и 25 *мксек*. Машина сможет производить накопление суммы со скоростью 2 *мксек* на код. Машина должна иметь автономные магистрали ввода и вывода информации, способные работать одновременно с ходом вычислений. В. Д. Князев

9300. Новый электронный «мозг» (New electronic «brain»), Process Control and Automat., 1957, 4, № 9, 341 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой «Ферранти» универсальной вычислительной машины «Меркурий», которая будет использоваться для решения задач, связанных с управлением и перехватом управляемых снарядов, исследованиями в области ядерной техники и т. д. Машина работает с плавающей запятой. Скорость машины в 50 раз выше, чем у аналогичных машин, разработанных в Западной Европе. Запоминающее устройство машины использует магнитные сердечники и имеет общий объем 7,3 *дм*^{3}. Стоимость машины — 100 тыс. фунтов стерлингов, включая установку и первоначальное обслуживание. На конец 1957 г. запланирован выпуск одной машины каждые шесть недель. А. В. Шилейко

9301. Вычислительная машина «ИБМ-608» (IBM-608), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 3, 214 (Digital Computer Newsletter, 1955, 7, № 3) (англ.)

Сообщается о выпуске фирмой ИБМ вычислительной машины «ИБМ-608», работающей полностью на транзисторах. В машине применены печатные схемы и миниатюрные детали, что позволило сократить ее размеры вдвое; потребление электроэнергии сокращено на 90%. Всего машина содержит 3000 транзисторов. Скорость работы достигает 4500 сложений в 1 сек. (в 2,5 раза быстрее, чем в машине ИБМ-607), умножение двух 9-значных десятичных чисел может производиться за 11 *мсек* и деление — за 13 *мсек*. Ввод и вывод данных — на перфокартах (до 155 карт в 1 мин.). Программа задается на коммутационной панели, на которой может быть набрано до 80 инструкций. Имеется устройство, при помощи которого можно визуально проверить всю записанную информацию. В. Д. Князев

9302. Вычислительная машина «Берроуз Е-101» (The Burroughs E-101), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 3, 212—213 (Digital Computer Newsletter, 1955, 7, № 3) (англ.)

Вычислительная машина «Берроус Е-101» представляет собой промежуточный тип между настольными машинами и большими универсальными и обладает свойствами последних и простотой и легкостью управления. Ввод данных осуществляется либо с 11-колонковой клавишной панели от бухгалтерской машины «Берроус», либо с трансмиттера, работающего от лент с 5, 6, 7 или 8 дорожками. Для вывода информации применяется печатающее устройство, позволяющее располагать в определенном заданном порядке данные на листе шириной 450 *мм*. Печать производится со скоростью 24 знака в 1 сек. Программа вычислений задается на съемной штепсельной панели. Машина работает с 12-значными десятичными числами. Запоминающее устройство использует магнитный барабан емкостью в 100 кодов. В машине имеется два счетчика адресов с программируемым пределом счета. Может быть осуществлен условный и безусловный переход к следующей инструкции. Машина позволяет производить 20 сложений или вычитаний в 1 сек. и 4 умножения или деления в 1 сек. Потребление электроэнергии равно 2,5 *квт*. В. Д. Князев

9303. Вычислительная машина НАРЕК (NAREC), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 3, 216—217 (Digital Computer Newsletter, 1955, 7, № 3) (англ.)

Для вычислительной машины НАРЕК (Военно-морская исследовательская лаборатория — Naval Research Laboratory) сконструировано новое электростатическое запоминающее устройство емкостью 1024 кода на стандартных 3-дюймовых электронно-лучевых трубках типа 3RPI. Для запоминания цифр каждого из 45 разрядов числа заняты три такие трубки, объединенные на одном шасси. Эта конструкция уменьшает эксплуатационные расходы на смену трубок и увеличивает надежность работы, так как при выходе из строя одной трубки информация не будет потеряна. Период обращения делится на 2 этапа: первые 10 *мксек* — активный период, следующие 10 *мксек* — регенерация. Испытания показали, что машина с этим запоминающим устройством может выполнять свыше 9000 одноадресных операций в 1 сек. В. Д. Князев

9304. Вычислительная машина УНИВАК II (UNIVAC II), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 3, 218—220 (Digital Computer Newsletter, 1955, 7, № 3) (англ.)

Фирма «Ремингтон Рэнд» объявила о выпуске вычислительной машины УНИВАК II, которая работает с вдвое большими скоростями и имеет вдвое большую емкость запоминающего устройства. Машина имеет ферритовое запоминающее устройство емкостью 2000 кодов, причем емкость может быть доведена до 10 тыс. кодов. Система инструкций такая же, как в машине УНИВАК I, но может осуществляться перенос от 1 до 10 чисел от одной инструкции. Передача чисел в регистры производится за 120 *мксек*, сложение — за 200 *мксек*. Блок магнитных лент использует металлическую ленту, на 500 *м* которой может быть записано до 3 млн цифр. Таких блоков к машине может быть присоединено до 10. Плотность записи на ленте составляет 8 *имп/мм*, скорость протяжки ленты равна 2,5 *м/сек*, время разгона и останова 16 *мсек*. Блоки по 60 кодов располагаются друг от друга на расстоянии 25 *мм* и могут быть прочитаны каждый за 45—50 *мсек*. На 500 *м* ленты записывается 4000 блоков. В. Д. Князев

9305. Вычислительные машины Национальной физической лаборатории (National Physical Laboratory, Control mechanisms and Electronics Division), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 3, 223 (Digital Computer Newsletter, 1955, 7, № 3) (англ.)

В Национальной физической лаборатории (Англия) разрабатывается быстродействующая вычислительная машина АКЕ-2 (ACE-2) с запоминающим устройством на ртутных линиях задержки. Машина будет иметь возможность работать в системе с плавающей запятой и быстро преобразовывать информацию из десятичной системы счисления в двоичную и обратно. Управление будет осуществляться при помощи 4-адресных инструкций (4-й адрес — адрес следующей инструкции).

Также конструируется вычислительная машина ТАКТ (TACT) с облегченным программированием. В. Д. Князев

9306. Вычислительные машины G1 и G2 Геттингенского университета (G1 and G2 (Goettingen, Germany), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 3, 222—223 (Digital Computer Newsletter, 1955, 7, № 3) (англ.)

Приводятся технические данные цифровых вычислительных машин Геттингенского университета (ФРГ) G1 и G2. Указывается, что вычислительная машина G1 работает в течение двух лет ежедневно по 21 часу, причем полезное время составляет 85%. В. Д. Князев

9307. Вычислительная машина ФИНАК (FINAC (Instituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, Rome), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 3, 222 (Digital Computer Newsletter, 1955, 7, № 3) (англ.)

Сообщается об установке в Римском институте прикладных вычислений вычислительной машины МАРК I фирмы «Ферранти». Официально эта машина именуется ФИНАК. В. Д. Князев

9308. Вычислительная машина фирмы «Либраскоп» (Librascope computer), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 3, 215—216 (Digital Computer Newsletter, 1955, 7, № 3) (англ.)

См. РЖМат, 1956, 2503, 8405.

9309. Последовательные цифровые сумматоры для переменного основания системы счисления. Таунсенд (Serial digital adders for a variable radix of notation. Townsend R.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 120—124, Discuss., 124 (англ.)

В вычислительных машинах, предназначенных для коммерческих расчетов в Англии, необходимо либо иметь специальные блоки преобразования десятичных чисел и денежных единиц в двоичную систему, либо оперировать непосредственно с десятичными числами и денежными единицами. Рассматриваются сумматоры, которые могли бы работать с числами, представленными в произвольной системе счисления, в том числе в неоднородной; указания о применяемой при данном суммировании системе счисления содержатся в программе решения задачи. Такие сумматоры автор называет «программируемыми».

Цифры любой системы счисления изображаются четверками двоичных разрядов (при этом основание систем счисления должно быть либо меньше 16, либо раскладываться на множители, каждый из которых меньше 16. — *Реф.*). В сумматор одновременно с двумя четверками двоичных разрядов A и B (от двух слагаемых), поступает четверка двоичных разрядов специального числа («переполнителя»); в ней содержится величина $16 - r$; где r — модуль, по которому должен вестись счет в данной четверке разрядов.

Если $A + B < r \pmod{16}$ и $A + B < 16$, то в аккумулятор выдается величина $A + B$, а перенос в следующую четверку разрядов отсутствует. Если $A + B > r \pmod{16}$ или $A + B \geq 16$, то в аккумулятор выдается величина $A + B + 16 - r \pmod{16}$ и переносится единица в младший разряд следующей четверки. Когда переполнитель равен 0, сумматор работает в обычной двоичной системе. Рассматриваются четыре возможных варианта построения программируемого сумматора.

Умножение можно было бы выполнить методом удвоений и делений пополам. При этом деление пополам достигается сдвигом кода числа на 1 двоичный разряд вправо и вычитанием половины переполнителя в тех четверках, где это необходимо. Для выполнения вычитания применение программирующих сумматоров затруднительно. Если основание системы счисления r четно, то удобнее применять код с излишком $16 - r/2$ (подобно тому, как для десятичной системы счисления применяется код с излишком 3).

В дискуссии Ван-Вейнгарден (Van Wijngaarden) предлагает систему представления чисел в остатках от деления на ряд взаимнопростых чисел; указывается, что сложение, вычитание и умножение в этой системе выполняются как поразрядные операции. М. А. Карцев

9310. Метод ускоренного двоичного деления в цифровых вычислительных машинах. Клямко Э. И., Монахов Г. Д., Приборостроение, 1957, № 2, 9—11

Предлагаются методы сокращения средней длительности выполнения операции деления в двоичной системе. Методы применимы к параллельным арифметическим устройствам, работающим с нормализованными числами и построенными так, что деление выполняется путем сдвигов частного (очередного остатка) влево и добавления или вычитания делителя в зависимости от знака очередного остатка.

Первый метод (как указывается в статье, был предложен А. П. Цыганкиным и др.) основывается на том, что при получении достаточно малого по абсолютной величине положительного или отрицательного остатка несколько следующих цифр частного и соответствующий остаток могут быть получены одним сложением и вычитанием. В частности, показано, что если в старших разрядах очередного положительного остатка содержится K нулей, то по меньшей мере $K-1$ следующих шагов деления дают в частное цифры 0; записав в частное эту группу цифр сразу, соответствующий остаток получают путем сдвига предыдущего остатка влево на K разрядов и вычитания делителя. Аналогично, если K старших разрядов отрицательного остатка содержит (в дополнительном коде) единицы, то в частное можно сразу записать группу из $K-1$ единиц,

а последующий остаток можно получить, сдвинув предыдущий остаток на K разрядов влево и добавить делитель. Подсчитано, что применением этого метода можно сэкономить в среднем до 33% тактов сложения или вычитания, необходимых в процессе выполнения деления.

Далее предлагается создать схему, которая по нескольким старшим разрядам остатка и делителя обнаруживала бы случаи, когда очередной остаток по абсолютной величине близок к делителю. Если из достаточно близкого к делителю положительного остатка вычесть делитель, то получится малая отрицательная величина. Показано, что если эта величина содержит (в дополнительном коде) K единиц в старших разрядах, то в частное можно сразу вписать $K-1$ единиц, а соответствующий остаток получается сдвигом этой величины на K разрядов влево и сложением с делителем. Правило для случая отрицательного остатка, близкого к делителю и по абсолютной величине, формулируется аналогично. Комбинация этого метода с предыдущим позволяет получить экономию в среднем количества тактов сложения или вычитания до 40%.

Наличие устройств, выполняющих в 1 такт сдвиг на любое число разрядов, позволило бы получить такую же экономию в среднем количестве тактов сдвига. М. А. Карцев

9311. Новый запоминающий элемент «твистор», пригодный для запоминающих устройств большой емкости. Бобек (A new storage element suitable large-sized memory arrays — the twistor. Bobeck Andrew H.), Bell. System Techn. J., 1957, 36, № 6, 1319—1340 (англ.)

Приводится описание нового магнитного запоминающего элемента «твистора». Принцип действия этого элемента основан на двух явлениях. Одно из них (эффект Видемана) заключается в том, что если стержень ферромагнитного материала поместить в магнитном поле, направленном по его оси, и пропустить по нему ток, то стержень скручивается. Второе явление наблюдалось недавно и заключается в том, что на концах никелевой проволоки в моменты изменения состояния намагниченности вдоль ее оси появлялось значительное напряжение. Амплитуду и полярность этого напряжения можно изменять, перемещая проволоку. Объяснение этого явления, подтвержденное экспериментально, базируется на том, что из-за остаточных напряжений в никелевой проволоке магнитный поток распространяется по винтообразному пути.

Рассматривается три варианта схемы элемента «твистора» (от анг. twist — скручивание). В варианте А элемент представляет собой отрезок механически скрученной никелевой проволоки, на которую надета обмотка. Два импульса тока пропускаются одновременно по проволоке и по обмотке, создавая спиральное магнитное поле, изменяющее магнитное состояние участка проволоки. Действия каждого из импульсов в отдельности недостаточно для изменения магнитного состояния. В варианте В имеются две обмотки, аналогичные двум обмоткам, используемым в запоминающих элементах на ферритовых торах. Изменение магнитного состояния проволоки достигается совместным действием двух импульсов тока, пропускаемых по этим обмоткам. При изменении магнитного состояния проволоки на ее концах возникает импульс напряжения, интерпретируемый как сигнал чтения. В варианте С имеется одна обмотка и отсутствует механическое скручивание проволоки. Полярности импульсов записи, пропускаемых одновременно по обмотке и по проволоке, выбираются таким образом, чтобы при записи «1» магнитный поток следовал в направлении правоходовой винтовой линии, а при записи «0» — левоходовой. Вдоль проволоки может быть расположено несколько ячеек памяти, плотность расположения которых зависит от диаметра и материала проволоки. На никелевой проволоке имеется возможность располагать до 4 ячеек на 1 *см*. Роль обмоток могут играть отрезки медной проволоки, перекрещивающиеся с никелевой.

В статье приводится теоретический анализ работы твисторов для случаев однородной и биметаллической (немагнитная основа и магнитное покрытие) проволоки. Анализ показывает, что в случае биметаллической проволоки можно достичь большего быстродействия. Данные экспериментального исследования показывают, что длительность изменения магнитного состояния твисторов изменяется от 0.2 *мксек* для проволоки диаметром 0,025 *мм* из молибденового пермаллоя марки 4-79 до 20 *мксек* для проволоки диаметром 0,125 *мм* из перминвара. Амплитуды импульсов записи имели порядок 2,3 ампервитка в обмотке и 130 *ма* в проволоке. Амплитуда импульса чтения имела порядок 6,0 ампервитков. Представляется возможным получение длительности цикла запоминающего устройства в 10 *мксек*.

Библ. 7 назв. А. В. Шилейко

9312. Конструкция и работа запоминающей системы параллельного типа на электронолучевых трубках. Эдуардс (The design and operation of a parallel-type cathode-ray-tube storage system. Edwards D. B. G.), Proc. Instn Electr. Engrs., 1956, B103, Suppl. № 2, 319—326. Discuss. 327—330 (англ.)

Статья представляет собой технический доклад, рассматривающий вопросы, связанные с конструированием и работой регенеративного запоминающего устройства на электронолучевых трубках, емкостью на 1024 десятизначных двоичных кода со временем выборки 10 *мксек*. В лабораторных условиях устройство работало с частотой 500 *кгц*, но в практическом использовании для увеличения надежности принята частота 100 *кгц*. Эта система применяется вместе с последовательной вычислительной машиной Манчестерского университета МАРК-II, работающей с тактирующими импульсами частотой 1 *мггц*.

Разбираются причины образования помех (смещение луча и «засев»). В параллельном запоминающем устройстве, в котором на экране одной трубки расположено n запоминающих элементов, число обращений к одному из элементов без регенерации соседнего в худшем случае равно n, т. е. числу обращений к запоминающему устройству между двумя регенерациями одного и того же элемента. Допустимое же число обращений к одному и тому же элементу обычно значительно меньше. В запоминающих устройствах последовательного типа полный код прочитывается с одной трубки; соответственно уменьшается возможное число обращений к одному элементу между двумя регенерациями соседнего элемента. Так, в машине Манчестерского университета МАРК-I, при длине кода в 20 цифр и n—1280, число возможных обращений к элементу между двумя регенерациями соседнего элемента равно 64. Таким образом, помехи от «засева» велики лишь в параллельных запоминающих устройствах. Для уменьшения помех предлагается: 1) конструировать машину так, чтобы максимальное допустимое число обращений к одному элементу превышало бы возможное число обращений к элементу между двумя регенерациями соседнего элемента; 2) уменьшить время открытия луча до минимума, необходимого для надежной работы вычислительной машины; 3) тщательно конструировать отклоняющие схемы и стабилизировать источники питания, чтобы избежать помех от неточного направления луча на запоминающий элемент; 4) экранировать трубку от внешних магнитных и электростатических полей; 5) точно размещать растр на экране, с тем чтобы

максимально использовать поверхность экрана; 6) увеличить отношение времени регенерации к рабочему времени; 7) увеличить расстояние между соседними запоминающими элементами. Последние две меры можно применять лишь в крайних случаях, так как они ведут к снижению скорости работы машины и уменьшению емкости запоминающего устройства.

В описываемом запоминающем устройстве используются электроннолучевые трубки типа VCK-266 с 6-дюймовым экраном, имеющие острую фокусировку, которая дает при рабочем напряжении ускоряющего анода 1 *кв* пятно на экране диаметром менее 0,5 *мм*. Между отклоняющими пластинами и считывающей пластиной введен экран, защищающий вход усилителя чтения от наводок со стороны отклоняющих пластин. В одном блоке монтируются две трубки, защищенные от внешних полей экраном из муметалла и стальным кожухом. Весь монтаж и выводы делаются на стороне, противоположной экрану трубки. Вблизи от экрана располагается усилитель чтения и ручки регулировки яркости, фокусировки и равномерности фокусировки.

Широкополосный усилитель чтения на 6 лампах имеет коэффициент усиления порядка 3000 и дает задержку входного импульса на 2 *мксек*. Выход усилителя подается на стробирующую схему, сигнал с которой выходит, если прочитывается «1».

Адресная система состоит из задерживающих элементов, создающих замкнутую 20-микросекундную линию задержки. В цепь этой линии включен сумматор, через который осуществляется ввод адреса в систему выборки. В линии циркулируют все время два адреса. Один из адресов используется для выбора необходимого адреса для чтения или записи, а другой — для выбора адреса регенерируемого элемента. В определенное время адрес появляется на части линии задержки, которая имеет 10 отводов для считывания через 1 *мксек*. Точки считывания стробируются одновременно, и адрес параллельно запоминается на емкостных схемах. Емкостные запоминающие схемы управляют отклонением луча в трубке. Каждая такая схема имеет 2 лампы, дающие противоположные по фазе и калиброванные по амплитуде импульсы, подаваемые для суммирования на звезду сопротивлений с соотношением лучей 1 : 2 : : 4 : 8 : 16. Средняя точка звезды подается на сетку катодного повторителя, а с него напряжение снимается на отклоняющие пластины.

Если машина не обращается к запоминающему устройству, то частота регенерации удваивается, так как регенерация происходит и по адресу, который остался в линии задержки при последнем обращении к запоминающему устройству. В случае регенерации все адреса при каждом проходе через сумматор увеличиваются на единицу. Этим же приемом увеличения адреса на единицу можно пользоваться и при выборке чисел по последовательным адресам, что ускоряет работу. Чтобы уменьшить опасность от частых обращений к двум соседним адресам, последовательные адреса размещаются на некотором расстоянии друг от друга (через 16 элементов по строке и через 16 строк по кадру). Нормальные отклоняющие напряжения, формирующие растр 8×8 *см*, установлены равными 144 *в* и 66 *в* соответственно для *X* и *Y* пластин.

Указывается на то, что был разработан прибор для проверки трубок на допустимое число обращений к одному элементу. Для большинства трубок это число равно 400 и лишь для немногих превышает 1024.

Запоминающее устройство имеет контрольную трубку, на которой можно просматривать информацию, записанную на различных участках устройства. Всего на экране контрольной трубки помещается 120 десятизначных двоичных кодов. При помощи 3 переключателей можно выбирать тот или иной из 8 участков запоминающего устройства и просматривать информацию. «1» и «0» различаются по яркости свечения, так как период облучения для «0» составляет 0,1 *мксек*, а для «1» период облучения составляет 0,5 *мксек*.

В. Д. Князев

9313. Новые компоненты фирмы «Электродата» (New Electrodata Corporation Components), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 3, 226 (Digital Computer Newsletter, 1955, 7, № 3) (англ.)

Фирмой «Электродата» (Electrodata Corp.) для вычислительной машины «Дататрон» (Datatron.) созданы блок магнитных лент и перфокартный преобразователь. Блок магнитных лент вмещает 400 000 десятизначных десятичных кодов. Это устройство может вести поиск нужного блока в двух направлениях, читать или записывать информацию со скоростью 28 500 кодов в 1 мин. и заполняет магнитный барабан емкостью 4000 кодов за 8,5 сек. Перфокартный преобразователь представляет собой устройство, которое может считывать информацию с перфокарт и перфорировать ее на картах или печатать на листе, причем вычисления на это время не приостанавливаются. Скорость считывания составляет 200 карт в 1 мин., перфорации — 100 карт в 1 мин., печати — 150 строк в 1 мин.

В. Д. Князев

9314. Компоненты на магнитных сердечниках для применений в цифровом управлении. Мейерхофф (Magnetic core components for digital control applications. Meyerhoff Albert J.), Automat. Control, 1957, 4, № 4, 15—19 (англ.)

Отмечается, что в последние годы привлекают к себе внимание магнитные сердечники с прямоугольной петлей гистерезиса для использования в цифровых системах. Эти сердечники подразделяются на металлические ленточные сердечники и ферриты. Те и другие имеют тороидальную форму, обеспечивающую высокую проницаемость образцов и прямоугольность петель гистерезиса. Время переключения обоих типов сердечников имеет порядок микросекунд. Существенное отличие между ними — в том, что ферритовые сердечники дешевле, имеют малые размеры и меньшее время перемагничивания; с другой стороны, ленточные сердечники требуют меньшей энергии для перемагничивания и меньше подвержены влиянию температуры. Поэтому логические схемы цифровых систем целесообразно строить на ленточных сердечниках, а запоминающие устройства — на ферритовых сердечниках, хотя некоторые весьма быстродействующие логические схемы могут потребовать применения ферритов, а небольшие запоминающие устройства могут быть выполнены на металлических сердечниках.

Металлические ленточные сердечники подразделяются по толщине ленты на тонкие и ультратонкие. Толщина ленты имеет важное значение, поскольку вихревые токи препятствуют изменению потока.

Лента толщиной 0,003 *мм* и шириной 3 *мм* дает изменение потока порядка 15 *нвб*; это изменение, совершаемое в 1 *мксек*, произведет 0,015 *в* на виток. Импульсные испытания сердечников производятся обычно путем последовательной подачи на сердечники двух равных по величине и противоположных по полярности импульсов и измерения формы выходного напряжения, интеграл от которого по времени пропорционален потоку. Обычно производятся измерения максимального и остаточного потоков, по которым производится вычисление коэффициента прямоугольности петли.

Регистры сдвига, выполненные на ленточных магнитных сердечниках, требуют энергию только в момент сдвига информации и обладают высокой надежностью; схемы их весьма просты. Основным недостатком таких регистров является ограничение частоты величиной 200 *кгц*. Однодиодные петли, используемые в разрядах

этих регистров, имеют практически частоту работы 100 *кгц* (два сдвига за 10 *мксек*), и параметры их некритичны. Г. Х. Новик

9315. Система памяти большой емкости на магнитных барабанах. Уэлш, Портер (A large-capacity drum-file memory system. Welsh H. F., Porter V. J.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1957, № T-92, 136—138. Discuss. 138—139 (англ.)

Приводится описание системы памяти на магнитных барабанах, сконструированной для машины УНИВАК-ЛАРК и занимающей по скорости выборки данных промежуточное положение между быстродействующей памятью машины на магнитных сердечниках и медленной памятью на магнитных лентах («Унисервo-1»). Скорость выборки данных с магнитного барабана в 50 раз превышает скорости выборки с магнитных лент. Емкость одного барабана равна 250 тыс. 12-значных десятичных чисел. Диаметр барабана 60 *см*, высота 60 *см*. Скорость вращения 860 об/мин. Запись и считывание осуществляется с помощью одного «летающего» блока, содержащего 6 считывающих головок. Весь блок может перемещаться вдоль оси барабана. Термин «летающий» означает, что блок поддерживается над поверхностью барабана благодаря струе воздуха, увлекаемой этой поверхностью при вращении. Если скорость вращения барабана отклоняется от установленной, блок с головками автоматически удаляется или приближается к поверхности. Применение «летающего» блока обеспечивает минимальный зазор между головками и поверхностью барабана (около 0,01 *мм*), что позволяет достичь большой плотности записи, снизить требования к обработке и устраняет проблему температурной компенсации. Использование только одного блока исключает сложную систему переключений считывающих головок.

На магнитном барабане имеется 100 шестидорожечных кольцевых полос, на каждой записывается последовательно 2500 чисел. Каждая полоса делится на 25 секторов по 100 чисел. Считывание и запись могут начаться в любой из 25 точек начала секторов. Цифры числа записываются последовательно, а двоичное выражение цифры — параллельно, на 4 дорожках полосы. Плотность записи — около 160 знаков на 1 *см*. Одна дорожка полосы служит для синхронизации и одна — для проверки. Кроме 100 полос, несущих информацию, на краю барабана имеется еще две дорожки: одна из них используется для синхронизации частоты записи, а другая — для сигналов выбора сектора.

Для увеличения плотности записи дорожки одной полосы расположены между дорожками другой, так что для перехода с 1-й дорожки на 2-ю блок считывающих головок должен передвинуться на 1 шаг, а для перехода с 2-й на 3-ю на 11 шагов. При таком способе записи достигается плотность 11 дорожек на 1 *см*. Переход на соседнюю полосу занимает 50 *мсек*, на соседнюю пару полос — 70 *мсек*. Максимальное время выборки 2,6 сек. Необходимая для машины УНИВАК-ЛАРК скорость передачи данных в промежуточной памяти (360 000 десятичных знаков в 1 сек.) достигается при одновременной, взаимно чередующейся работе четырех барабанов. Всего в первой машине УНИВАК-ЛАРК предусматривается 12 барабанов. Отмечается целесообразность использования описанной системы памяти в машинах для обработки коммерческих данных. З. Д. Доброхотова

9316. Многоадресное устройство переноса на магнитной ленте. Комсток, III (Multiple-address magnetic-tape transport. Comstock George E., III), Instrum. and Automat., 1957, **30**, № 9, 1725—1728 (англ.)

Описывается запоминающее устройство, содержащее 10 отдельных лент по 150 *м* каждая. Ленты хранятся без катушек в специальных двухкамерных кассетах. Время разгона и остановки лент порядка 3÷5 *мсек* достигнуто благодаря уменьшению момента инерции вследствие отсутствия катушек и их приводов. Каждая из 10 кассет имеет свой лентопротяжный механизм, перематывающий ленту из одной камеры в другую. Механизм состоит из двух непрерывно вращающихся приводных валиков и двух прижимных роликов, управляемых электромагнитами. Скорость протяжки ленты 2,5 *м/сек*. Все кассеты крепятся в общем корпусе с помощью штифта. Кассеты можно по отдельности выдвигать из корпуса для перезарядки лент, чистки и регулировки. Через кассеты проходит главный приводной вал, связанный с лентопротяжными механизмами кассет приводными ремнями. В устройстве имеется блок с 14 головками записи — воспроизведения. С его помощью на каждой ленте может быть записано 14 дорожек с плотностью записи порядка 8 *имп/мм*. Емкость каждой ленты — 16,8 млн. двоичных знаков. Для записи применяется метод «без возвращения к нулю» (по которому серии единиц и нулей записываются без промежутков; появление импульса при считывании происходит при переходе от нуля к единице и наоборот). Оба конца каждой ленты имеют прозрачные участки. При прохождении этого участка через блок головок срабатывают специальные фотореле и лента останавливается. В устройстве принят ряд мер против накопления электростатических зарядов, вызывающих прилипание ленты: кассеты имеют конструкцию, обеспечивающую наименьшую площадь соприкосновения с лентой, лента покрывается тонкой проводящей пленкой, кроме того, имеется источник бета-излучения, ионизирующий воздух, что способствует стеканию зарядов. Запись сигналов на ленту синхронизируется импульсами, воспроизводимыми со специальных маркерных дорожек. Таких дорожек имеется 4 — по две с каждой стороны ленты. Принят ряд мер защиты головки, воспроизводящей маркерные импульсы от наводок. Время нарастания импульса в маркерном канале 1÷2 *мксек*, время нарастания в основных каналах 4÷6 *мксек*. В тех случаях, когда на определенные места ленты записываются целые группы сигналов, используется специальный сигнал (признак группы), который предотвращает смещение группы из-за изменения времени разгона и торможения. Все устройство может использоваться для сортировки цифровой информации или в качестве запоминающего устройства с произвольной выборкой. При первом использовании информация, подлежащая сортировке (по номерам), сперва записывается группами в произвольном порядке на исходной ленте. Перед каждой группой записывается ее номер. Затем все группы вместе с номерами переписываются в описываемое запоминающее устройство, причем в первую кассету направляются все группы с номерами, оканчивающимися на «1». Затем вся информация с кассет вновь переписывается на исходную ленту, а с нее — снова в запоминающее устройство, на этот раз уже в соответствии со вторым разрядом номеров групп и т. д. После проведения стольких циклов, сколько разрядов имеется в номере группы, информация оказывается расположенной на исходной ленте в порядке номеров групп. Скорость такой сортировки может составлять 40 групп в сек. Описан и другой способ сортировки, который выгодно применять в случаях, когда общее число групп значительно меньше, чем число возможных комбинаций символов, используемых в качестве признаков для сортировки. При использовании описываемой системы в качестве запоминающего устройства со статистическим временем обращения последнее сильно снижается

благодаря использованию 10 отдельных лент. Среднее время обращения у данного устройства 20 сек., а устройство с одной лентой такой же общей длины (1500 *м*) имело бы время обращения равное нескольким минутам. Время обращения может быть уменьшено, если удвоить число дорожек на каждой ленте и записывать группы информации дважды в одинаковой последовательности таким образом, чтобы группа, первая в одном комплекте дорожек, являлась средней в другом комплекте. Применение этого метода дает среднее время обращения, равное 7 сек. В. А. Брик

9317. Запоминающее устройство фирмы «ИБМ» на магнитных дисках (IBM — «Magnetic Disc» memory), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 3, 225 (Digital Computer Newsletter, 1955, 7, № 3) (англ.)

Объявление фирмы ИБМ о разработке магнитного запоминающего устройства ИМБ-305 емкостью 5 млн. цифр с произвольной выборкой. Новое запоминающее устройство состоит из группы магнитных дисков, смонтированных на вертикальном валу и несколько разнесенных друг от друга. Рядом с набором дисков расположен рычаг с читающими и пишущими головками, который под действием системы управления перемещается к выбранному диску и считывает информацию по выбранному адресу. В. Д. Князев

9318. Аппаратура для запоминающего устройства на магнитной ленте шириной 77 *мм*. Лоранс, Уилкинс, Пендлтон (Apparatus for magnetic storage on three-inch wide tapes. Lawrance R. B., Wilkins R. E., Pendleton R. A.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1957, № T-92, 84—89. Discuss. 89—90 (англ.)

Рассматривается запоминающее устройство на магнитной ленте машины Датаматик-1000 (DATAmatic-1000). Используется магнитная лента шириной 77,6 *мм*, на которой размещается 31 канал для хранения информации и 5 каналов, на которых заранее написаны постоянные магнитные метки. Лента замкнута в петлю и может передвигаться в любом направлении со скоростью 2,54 *м/сек*. Плотность расположения двоичных знаков вдоль канала составляет 12,6 и 25,2 знака на 1 *мм*. Интервал времени между магнитными точками в 30 *мксек* означает, что хранится «0», а интервал в 60 *мксек* означает «1». Каждое слово (48 двоичных разрядов +4 контрольных разряда) располагается последовательно в одном из 31 каналов. Передача информации с ленты во входной буферный регистр или на выходной преобразователь производится асинхронно, так что не требуется синхронизация между каналами по разрядам.

Вдоль канала слова располагаются в блоках, на общей длине ленты в 80 *м* размещается 50 000 блоков слов, причем из 25 000 блоков информация считывается при движении ленты вперед, а из 25 000 — при движении ленты назад.

Так как рабочее пространство считывания, помимо собственно пространства считывания, включает еще пространство для пуска — остановки, то блоки первой группы располагаются в шахматном порядке между блоками второй группы, так что при движении ленты вперед, пространство, занимаемое блоками первой половины, является пространством, несущим информацию, а пространство, занимаемое блоками второй группы, служит для пуска-остановки. При движении ленты назад роли групп меняются.

Для считывания и записи информации используются одни и те же головки, которые расположены в одном комплекте. Применяется лента толщиной 80 *мк* (толщина оксидного слоя 12 *мк*). Особенностью ленты является нанесение поверх оксидной пленки изоляционного слоя из того же материала, что и лента (Mylar). Этот слой толщиной в 12 *мк* имеет очень гладкую поверхность, что позволяет плотно прижимать ленту к головке, не опасаясь усиленного износа головки.

Движение ленты производится при помощи двух ведущих барабанов, вращающихся в разные стороны; сцепление ленты с барабанами пневматическое. Пуск ленты производится за 6 *мсек*, остановка — за 4 *мсек*. О. В. Бачин

9319. Чтение магнитной записи посредством изменения магнитного сопротивления. Килберн, Гофман, Вулстенхолм (Reading of magnetic records by reluctance variation. Kilburn T., Hoffman G. R., Wolstenholme P.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **B103**, Suppl. № 2, 333—336. Discuss. 354—356 (англ.)

Описывается метод построения считывающей головки, в которой необходимая скорость изменения магнитного потока достигается модулированием магнитного сопротивления головки, вследствие чего амплитуда сигнала не зависит от скорости магнитного покрытия проходящего под головкой, благодаря этому головка удобна для использования во входном и выходном оборудовании вычислительных машин.

Магнитная головка составлена из двух пермаллоевых листочков. Эти листочки расходятся напротив зазора, образуя тороид, на который намотана модулирующая обмотка. Считывающая обмотка располагается по обе стороны около зазора. Подавая переменный ток в модулирующую головку так, чтобы насыщать тороидальный магнитопровод, мы на определенном участке получим переменное магнитное сопротивление. Когда намагниченный участок ленты проходит под зазор головки, то наводимый в головке поток встречает переменное магнитное сопротивление, а следовательно, в считывающей обмотке будет появляться сигнал.

Магнитный материал головки и ее физическая форма выбраны таким образом, чтобы обеспечить протекание максимума потока от намагниченного участка через головку. Для головки применен пермаллой «*С*», толщиной 25 *мк*. Поскольку влияние внешних полей на считываемый сигнал значительно, то следует принять меры для его устранения. Отмечается, что с повышением частоты модуляции повышается скорость изменения наводимого потока, а следовательно, увеличивается и сигнал со считывающей обмотки. Приводятся данные считывающей головки: зазор 0,25 *мм*, ширина 1,5 *мм*, внешний диаметр 1,25 *мм*, число витков считывающей обмотки (22), число витков модулирующей обмотки (55). Считываемый сигнал с головки достигал 100 *мкв* на виток считывающей обмотки при частоте 47,5 *кгц*. В. Д. Князев

9320. Характеристики и применения устройства «Датафил». Шоу, Стоун (Characteristics and applications of the Datafile. Shaw Dean H., Stone Milton M.), J. Mach. Account., 1957, 8, № 10, 67—72 (англ.)

Приводятся данные запоминающего устройства на магнитных лентах типа «Datafile» фирмы «Electrodata». В устройстве используются 50 лент длиной 76 *м* каждая и шириной 19,1 *мм*. На каждой ленте размещаются две полосы по 6 дорожек, из которых 4 используются для записи десятичных разрядов, одна для записи контрольных сигналов и одна — для записи маркеров групп. Информация записывается на ленты группами по 20 слов, каждое из которых имеет 10 десятичных разрядов и знак. Каждая группа снабжена адресом, записываемым на ленты предварительно в специальном устройстве. Одна группа занимает 70 *мм* длины ленты. На каждой полосе записывается 1 тыс. групп, что дает общую емкость устройства в 20 млн. десятичных разрядов.

Используется метод записи «без возвращения к нулю». Ленты перемещаются со скоростью 1,52 *м/сек*, что дает

возможность производить запись и воспроизведение информации со скоростью 6 тыс. разрядов в 1 сек. Ленты хранятся без кассет в свободных камерах между перфорированными перегородками, уменьшающими электростатические заряды. Натяжение лент в зоне головок регулируется с помощью вакуумного регулятора. Этот же регулятор используется для индикации концов лент, на которых имеются перфорации, открывающие вакуумную систему. Среднее время обращения равно 16,3 сек. Рассматривается несколько примеров использования устройства.

А. В. Шилейко

9321. Функциональное описание работы системы обработки данных NCR-304 для торгово-промышленных применений. Шиовиц, Черин, Мендельсон (Functional description of the NCR 304 data-processing system for business applications. Shiowitz M., Cherin A. A., Mendelson M. J.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1957, № T-92, 34—38. Discuss. 38—39 (англ.)

Дается описание электронной системы обработки данных NCR-304, имеющей небольшие размеры и пригодной для широкого круга коммерческих работ. Приводится блок-схема важнейших узлов. Очень подробно рассказывается о системе адресации и о структуре команд.

В. М. Долкарт

9322. Электрографическое печатающее устройство фирмы «Берроуз» для артиллерийских вычислительных машин. Эпстейн, Кинтнер (The Burroughs electrographic printerplotter for ordnance computing. Epstein H., Kintner P.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1957, № T-92, 73—80. Discuss. 80 (англ.)

Печатающее устройство БЭПОК (ВЕРОС, Burroughs Electrographic Printer-Plotter for Ordnance Computing) предназначено для печати выходных данных цифровой вычислительной машины в виде кривых или строк буквенно-цифровой информации на движущейся бумажной ленте шириной 275 *мм*. Печать производится отдельными точками диаметром 0,25÷0,3 *мм* при плотности 2 точки на 1 *мм*. Каждая буква или цифра использует прямоугольник размером 5×7 точек или 2×3 *мм*.

Печать производится на специальную бумагу, покрытую с одной стороны слоем бесцветной пластмассы, обладающим высоким электрическим сопротивлением. В том месте, где должна быть точка, поверхности бумаги сообщается электрический заряд. Затем на бумагу распыляется чернильный порошок, который задерживается только в заряженных местах. Полученный таким образом рисунок фиксируется в результате термообработки. При необходимости стереть и повторить запись термообработка не производится.

Печатающая головка имеет 30 печатающих иголок (разрядников) и укреплена на колесе, перемещающем ее поперек бумажной ленты. За одно движение поперек ленты на бумаге может быть напечатан рисунок, занимающий 30 элементов (точек) в длину и 500 в ширину. Колесо вращается со скоростью 10 об/сек. За время каждого оборота в течение 20 *мсек* производится печать и в течение 80 *мсек* — передвижение бумажной ленты на один шаг и накопление материала для следующей печати. Таким образом, кривые могут печататься со скоростью 300 точек каждой кривой в 1 сек. и с точностью 0,2%.

Устройство рассчитано на работу непосредственно от оперативной памяти вычислительной машины. Последняя должна обладать способностью выдавать материал по 30 параллельным каналам в количестве 500 30-разрядных слов за 20 *мсек*. Кодирование материала осуществляется с помощью самой вычислительной машины. Такой способ признается рациональным, несмотря на ряд присущих ему недостатков, в частности, большую затрату машинного времени.

Вторая часть статьи посвящена программированию при работе с печатающим устройством БЭПОК.

А. В. Шилейко

9323. Цифровое печатающее устройство ускоряет выдачу данных. Геттингс (Digital printer boosts readout time. Gettings H. W.), Electronics, 1957, **30**, № 6, 182—185 (англ.)

Обычные механические или электромеханические печатающие устройства обеспечивают скорость вывода данных из цифровых вычислительных машин до 500 строк в 1 мин., что значительно ниже скоростей работы самой машины. Использование электронных схем позволило разработать систему, которая может печатать 10 800 строк в 1 мин. или 180 строк в 1 сек. Каждая строка содержит 12 цифр. Разработанная конструкция может печатать до 102 цифр в строке и скорость печати может быть увеличена еще больше. Данная конструкция была применена в цифровой машине ИРА-1103 (ERA 1103) и может быть использована в любой машине. Информация из 36-разрядного выходного регистра машины подается на входные клапаны выводного устройства. Каждой цифре строки соответствует свой блок, имеющий 6 клапанов, информация с которых подается на 6-разрядный регистр; 12 уровней последнего подаются на матрицу 6×12 и далее на клапаны цифры, а отсюда на цепи записи и пишущие перья. Работа каждого элемента синхронизируется центральным генератором.

Г. Х. Новик

9324. Вопросы проектирования и возможности использования транзисторов. Вальтер (Design and function of transistors. Walter Leo), Canad. Pulp and Paper Ind., 1957, **10**, № 10, 42, 44 (англ.)

Проводится сравнение электронной лампы и транзистора и подчеркиваются преимущества транзистора. Показано, что полупроводниковые приборы нашли широкое применение во всех областях техники. В качестве примера использования транзисторов приводится малогабаритная самолетная вычислительная машина «Лепрехаун» («Leprechaun»).

А. Н. Чуйкин

9325. Замена аналоговых вычислительных машин (Replacing analogue computers), Engineering, 1957, 184, № 4786, 698 (англ.)

Британский государственный авиазавод (Royal Aircraft Establishment) приступил к разработке цифрового дифференциального анализатора для решения задач, требующих точности большей, чем могут обеспечить аналоговые вычислительные машины. Собрана демонстрационная модель цифрового дифференциального анализатора, содержащая всего только 3 интегратора, регистры которых выполнены на реле. Выходные сигналы интеграторов могут принимать значения +1 или —1. Соединения между интеграторами осуществляются с помощью переключателей.

А. В. Шилейко

9326. Текущие справки о фирмах, поставляющих в продажу вычислительные устройства. Ходжес (Varying prospects for business machine companies. Hodges W. A.), Mag. Wall. Str. and Business Analyst, 1957, **100**, № 1, 26—27, 44 (англ.)

Краткая справка о крупнейших американских фирмах, изготовляющих современные вычислительные устройства. Промышленный выпуск вычислительных устройств в США начался примерно с 1948 г. и с каждым годом непрерывно увеличивается. Вначале широкое применение в технике получили вычислительные устройства моделирующего типа, как устройства, позволяющие производить небольшое количество типов вычислительных операций с достаточной для практики степенью точности. Однако в дальнейшем возрастала потребность в универсальных вычислительных

устройствах, позволяющих выполнять разнообразные вычисления. Устройствами, удовлетворяющими этим требованиям, оказались цифровые вычислительные устройства, выпуск которых скоро начнет возрастать гораздо быстрее, чем выпуск устройств моделирующего типа.

Крупнейшими американскими фирмами, поставляющими в продажу вычислительные устройства, в настоящее время являются: IBM (IBM), «Сперри-Рэнд» (Sperry-Rand Corp.), «Берроуз» (Burrough Corp.), «Ундервуд» (Underwood Corp.), «Националь» (National Cash Register), «Ройял—Макби» (Royal McBee) и др.

Приводится биржевая таблица, характеризующая стоимость акций этих фирм и их дивиденды за 1954—1956 гг. В. С. Бородин

9327. Кто занят в области вычислительных машин в 1956—1957 гг. (Who's who in the computer field, 1956—1957), Computers and Automat., 1957, 6, № 8, 20—22, 30 (англ.)

Приводятся статистические данные о специалистах в области математических машин в США, составленные на основании списка (Computers and Automation, 1957, № 2), содержащего 12 100 фамилий специалистов и некоторые данные о них. Даны таблицы, которые показывают, в каких организациях работают специалисты в области математических машин, сколько из них интересуются проектированием машин, конструированием машин, электроникой, их возраст, сколько из них женщин. Отмечается, что большая часть специалистов занята в авиационной промышленности, в научно-исследовательских организациях, в коммерческих и страховых предприятиях. Работники, интересующиеся одновременно проектированием и конструированием математических машин и вопросами электроники, составляют 46,5% от общего числа специалистов. Свыше 90% специалистов, работающих в области математических машин, имеют возраст меньше 48 лет; 5,3% от общего числа работающих составляют женщины. А. Н. Чуйкин

9328. Принципы построения и свойства электронной модели с периодизацией решения. Ден (Schaltungsprinzipien und Eigenschaften eines repetierenden elektronischen Analogrechners. Dhen Walter), Elektrotechn. Z., 1957, A78, № 14, 490—494 (нем.)

Описывается электронная модель, предназначенная для решения инженерных задач. Модель содержит двенадцать суммирующих интеграторов, четыре сумматора, четыре блока умножения и четыре функциональных преобразователя. Время вычислений составляет 1/50 сек. Решение периодизировано, повторяется 25 раз в 1 сек. и получается на экране осциллографа в виде неподвижной кривой. И. Ю. Ивличев

9329. Моделирование. Сарджонт (Analogue computation. Sargeaunt M. J.), Mach. Lloyd. Overseas Ed., 1957, 29, № 9, 70—71, 73—75 (англ.); 72, 74 (исп.)

Производится сравнение цифровых вычислительных машин и моделирующих устройств. Отмечая возможность решения задач на цифровых машинах с большой точностью, автор подчеркивает их высокую стоимость и указывает на ряд преимуществ моделирующих устройств, в том числе наглядность, сохранение физического смысла, возможность решения в натуральном масштабе времени. Решение в убыстренном масштабе времени дает возможность сравнительно просто использовать модели и для целей выбора наивыгоднейших или оптимальных параметров исследуемых систем методом последовательного приближения, используя индикатор для оценки переходного процесса. Рассматриваются модели типа дифференциальных анализаторов и модели серийного типа (анализаторы цепей). Приводятся известные схемы использования решающих усилителей с *RC*-цепочками для получения различных линейных временных зависимостей. Указывается на целесообразность сочетания моделирующих устройств с элементами цифровой вычислительной техники, в частности для задач экономического характера. Б. Ш. Беркович

9330. Новые устройства для аналоговых вычислительных машин. Гаррис (New techniques for analog computation. Harris Horton E.), Instrum. and Automat., 1957, 30, № 5, 894—899 (англ.)

Сообщение о разработке ряда устройств для автоматизации некоторых операций управления и контроля в вычислительных машинах непрерывного действия, в частности в машине «REAC-400».

Блок «проверки задачи» осуществляет автоматическую проверку набора задачи, установки потенциометров и функциональных элементов и работоспособности элементов машины. В режиме «статической проверки» при нажатии кнопки выходы всех операционных усилителей отсоединяются от нагрузок и на их место подключаются контрольные потенциометры с установленными на них реальными или фиктивными «начальными условиями». В то же самое время все усилители включаются по схеме сумматоров, т. е. с сопротивлением в цепи обратной связи. В результате на машине решается с использованием проверяемого набора некоторая система алгебраических уравнений, по которой можно судить о правильности набора и исправности элементов.

В режиме «динамической проверки» при нажатии кнопки восстанавливается нормальная схема всех интегрирующих усилителей и в течение точно заданного промежутка времени интегрируются некоторые входные сигналы. Таким образом проверяется установка постоянных времени. Устройство «проверка масштабов времени» удваивает величину всех емкостей в цепях обратной связи и производит запись получаемого при этом решении с половинной скоростью движения ленты. Совпадение этой записи с кривой обычного решения свидетельствует о том, что все элементы работают на линейных участках своих характеристик. Устройство «проверки напряжений» состоит из электронного коммутатора и набора индикаторных лампочек, гаснущих при превышении напряжения в данной точке заданного значения (от 2 до 50 *в*). Если некоторые лампочки продолжают гореть до конца решения, то масштаб напряжений, действующих в этих точках для увеличения точности, должен быть исправлен.

Устройство для проверки набора печатает на ленте обозначения всех точек наборной доски, соединенных с каждой данной точкой. При этом автоматически подсчитывается сумма чисел, кодирующих обозначения, которая в случае правильной схемы должна совпасть с контрольной. Лента, в частности, может быть использована для последующих наборов этой же задачи. Устройство управления машиной обеспечивает автоматическое выполнение набранных на клавиатуре или пробитых на перфоленте команд. Эти команды предусматривают ряд контрольных операций, а также установку потенциометров, функциональных элементов и т. п. Специальный блок осуществляет автоматический набор функций на диодных функциональных элементах. Описывается также несколько приспособлений, уменьшающих время подготовительных операций. В заключение приводится пример последовательности действий при решении задачи. А. В. Шилейко

9331. Математические машины и их применение. Соколов Т. Н.. В сб.: Приборостроение. М.—Л., Машгиз, 1957, 75—88

Излагается обзорный доклад на межвузовской конференции (июнь 1956 г.) по основным направлениям

современных быстродействующих вычислительных машин и их применению в науке и технике. Материал доклада основан на работах, выполненных в институтах и заводах г. Ленинграда. Подробно описывается работа лаборатории математических машин ЛПИ по моделирующим устройствам. Приводится блок-схема и описание синтезирующей нелинейной моделирующей установки, работающей совместно с реальным объектом. Рассматриваются принцип действия, основные устройства и логические ячейки цифровых машин. Говорится о применении этих машин для непосредственного управления технологическими процессами. Особое внимание уделено вопросам выработки оптимальных законов управления самой цифровой машиной под влиянием внешних факторов. Такие самонастраивающиеся системы будут иметь огромное значение не только в управлении технологическими процессами, но и в решении многих проблем медицины и биологии.

Г. К. Кузьминок

9332. **Применение моделирующих устройств для управления ядерным реактором. Уокер** (The place of analogue computers in reactor control. Walker J.), J. Electron. and Control., 1957, **3**, № 1, 125—136 (англ.)

Моделирующие устройства, предназначенные для обслуживания реакторов, делятся на проектные, операционные и тренировочные. Проектные моделирующие установки служат для выполнения сложных конструктивных расчетов и для изучения динамики реактора. Определение геометрии сердечника, регулятора и других критических конструктивных размеров реактора требует решения медленно сходящихся уравнений, например уравнения диффузий нейтронов. Эта трудоемкая работа быстро и экономически выгодно выполняется моделирующей установкой. При изучении динамики реактора решаются две основные задачи: определение переходного процесса реактора при управлении данным регулятором для оптимизации сервомеханизма и изучение поведения реактора при переходных температурных режимах.

Основным в описываемых установках является блок «динамики нейтрона», в котором напряжение входа пропорционально реактивности, а напряжение выхода пропорционально потоку нейтронов или энергии реактора. Блок построен на базе усилителя с большим коэффициентом усиления, работающим в режиме интегратора, с цепью в обратной связи, воспроизводящей задержки нейтронов.

Кроме блоков «динамики нейтрона», такая установка содержит до ста решающих элементов: сумматоров, интеграторов, знакоинверторов, множительных устройств, блоков коэффициентов и блоков задержки.

Операционные моделирующие установки используются для скоростной оценки параметров процесса, необходимых для управления реактором. Например, моделирующая установка для вычисления ксенона, получая необходимые данные от работающего реактора, предсказывает оператору возможность частого повторного включения и выключения реактора. Установка работает в временном масштабе 1 : 3600.

Модели-тренажеры служат для обучения обслуживающего персонала управлению реактором. Установка имеет пульт, аналогичный пульту управления реактора. Основной блок установки — «динамика нейтрона» — позволяет воспроизводить реактор, питаемый различными расщепляющими материалами.

Приводятся решения динамических задач запуска реактора, блок-схемы и фотографии моделирующих установок.

И. В. Тихонов

9333. **Электронные нелинейные блоки. Перец** (Opérateurs électroniques non-linéaires. Peretz Richard), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 125—129 (франц.; рез. англ.)

Классификация и некоторые схемы нелинейных блоков машин-аналогов.

9334. **Некоторые физические характеристики графитизированной бумаги, используемой в реоэлектрической аналогии. Жермен** (Quelques caractéristiques physiques du papier graphité utilisé dans l'analogie rhéoélectrique. Germain P.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 327—332. Discuss., 332 (франц.; рез. англ.)

Характеристики бумаги «Теледельтос».

9335. **Элементы аналоговой вычислительной машины. Рейн** (Components of the analog computer. Rain Don), Purdue Engr, 1957, **53**, № 2, 26, 27, 62, 64, 78 (англ.)

Рассматривается построение основных элементов аналоговых вычислительных машин на базе операционных усилителей.

А. В. Шилейко

9336. **Электронная вычислительная машина для векторной электрокардиографии. Де-Кот, Хорват** (An electronic computer for vector electrocardiography. DeCote Robert, Horvath William J.), IRE Trans. Med. Electronics, 1957, 8, July, 31—37 (англ.)

Описывается электронное вычислительное устройство, предназначенное для вычисления электрического вектора сердца при электрокардиографии, который определяется функцией вида

$$D = \int_{t_1}^{t_2} \left[E_x^2(t) + E_y^2(t) + E_z^2(t) \right] dt ,$$

где E_x, E_y и E_z — три ортогональных компоненты электрического вектора сердца. Устройство включает в себя три канала для преобразования входных сигналов $E_x(t)$, $E_y(t)$ и $E_z(t)$, сумматор и интегратор. В каналах непрерывные входные сигналы усиливаются, преобразуются в импульсные и возводятся в квадрат. Усиление сигнала производится трехкаскадным дифференциальным усилителем с коэффициентом усиления 20 000, который падает на 3 *дб* при частотах 0,15 и 750 *гц*. Уровень шумов, отнесенный ко входу, составляет 15 *мкв* по всей полосе пропускания. Дрейф в течение 1 мин. имеет ту же величину.

Преобразование непрерывного сигнала в импульсный выполняется с помощью импульсного генератора и кольцевого модулятора. Импульсный генератор выдает положительные и отрицательные импульсы с амплитудой 85 *в*, длительностью 12 *мксек* и частотой 1 *кгц*. Блок возведения импульсов в квадрат работает по методу кусочно-линейной аппроксимации с помощью диодов сопротивлений и конденсаторов и обеспечивает воспроизведение параболы шестью прямыми отрезками с точностью в 3%. Сумматор трех сигналов выполнен на трехусилительных лампах с одной анодной нагрузкой. Интегрирование выполняется с помощью цепи R—C, снабженной диодными ключами для зарядки и разрядки конденсаторов и усилительной лампой для снятия результата. Приводится подробная электрическая схема устройства. Габариты устройства без блока питания 550×450×300 *мм*.

П. В. Тихонов

9337. **Современные тенденции в области вычислений на аналоговых машинах. Мерфи** (Modern trends in analog computation. Murphy Bernard B.), IVA. 1957, 28, № 8, 336—350 (англ.)

Описывается принцип действия электронных аналоговых вычислительных машин с операционными усилителями и обсуждаются основные тенденции их развития. В настоящее время основные работы ведутся

в области улучшения конструкции элементов и повышения их надежности и в области увеличения удобства эксплуатации. К последнему можно отнести централизованную кнопочную установку элементов, автоматическую печать результатов, расширение возможностей наблюдения за работой элементов, получение возможности сохранения набора потенциометров путем использования съемных блоков, усовершенствование конструкции наборных досок и введение различных контрольных операций. Отмечается также тенденция к созданию целиком электронных элементов высокой точности и, в частности, различных электронных блоков умножения и функциональных блоков.

В области применения аналоговых машин отмечается увеличение их объема, увеличение удельного веса нелинейного оборудования и увеличение потребностей в работе в истинном масштабе времени. Большое количество задач из области автоматического управления процессами приводит к необходимости решать дифференциальные уравнения в частных производных обычно конечными разностными методами. В ряде областей отмечаются тенденции к разработке специализированных аналоговых машин.

Существует класс задач, для которых рациональным оказывается использование аналоговых машин совместно с цифровыми. При этом возможны следующие варианты: использование одной машины для контроля результатов другой; быстрый обзор задачи на аналоговой машине с целью получения начальных условий, обеспечивающих наиболее эффективное решение этой же задачи на цифровой машине; решение части задачи на аналоговой машине и полное решение на цифровой машине или наоборот; совместная параллельная, последовательная или параллельно-последовательная работа цифровой и аналоговой машин с применением аналого-цифровых преобразователей. В последнем случае обе машины работают одновременно и между ними производится обмен информацией. Типовым примером такой работы может служить изучение траектории ракет дальнего действия. Здесь величины, относящиеся к самой ракете, как например вращение, скорость, вес и т. д., представляются в аналоговой форме. Работа ракеты рассчитывается на аналоговой машине, а данные о направлении полета преобразуются в цифровую форму и элементы траектории вычисляются с помощью цифровой машины. Данные, получаемые в цифровой машине, могут вводиться в аналоговую машину в качестве поправок.

В числе возможных будущих направлений развития вычислительных аналоговых машин отмечается непрерывное увеличение аналоговых установок, разработка полностью электронных машин возможно с использованием для ряда элементов цифровой техники и дальнейшее развитие совместного использования аналоговых и цифровых машин.

Во второй части статьи рассматриваются методы решения на аналоговых машинах задач, связанных с вычислением многочленов, вычислением матриц и анализом шумов (случайных функций).

А. В. Шилейко

9338. **Аналоговые вычислительные машины. Бут** (Analogue computers. Booth A. D.), Research, 1957, **10**, № 12, 466—471 (англ.)

На примерах рассматривается построение физических моделей различных систем. Показана возможность применения моделирующих установок для контроля за работой станков. Описывается принцип работы электронного дифференциального анализатора, использующего операционные усилители. Рассматриваются вопросы о целесообразности применения машин непрерывного действия и машин дискретного действия для решения различных задач. А. Н. Чуйкин

9339. **Исследование области применения электронно-лампового интегратора типа ЭЛИ. Окунева К. Б.,** Сб. научн. тр. кафедр матем., механ., химии. Ленингр. ин-т точной механ. и оптики, 1957, вып. 24, 3—44

Интегратор типа ЭЛИ предназначен для решения системы линейных дифференциальных уравнений, линейных дифференциальных уравнений высшего порядка и алгебраических уравнений. В работе проводится исследование области применения интегратора типа ЭЛИ-14. Решение дифференциальных уравнений на этом интеграторе возможно, если их общий порядок не превышает шести. Коэффициенты дифференциальных уравнений, правые части и начальные условия задаются с точностью 0,1 в пределах — 1÷1. Процесс изменения во времени протекает от $t=0$ до $t=30$. Значение переменных ограничено условием $|x_i(t)|\leqslant 10$, и интегратор не может описывать процессов, имеющих неограниченные или быстро возрастающие функции, так как происходит срез в некоторой области решения. Введение временного масштаба $\tau=Nt$ позволяет наблюдать решение в интервале $0\leqslant t\leqslant\frac{30}{N}$. Однако этот интервал может оказаться малым при больших значениях аргумента. Интегратор дает устойчивое решение, однако в некоторых случаях с помощью масштабного множителя $e^{\lambda t}$ и при надлежащем выборе величины λ удается получить и неустойчивое решение. Правильность решения, полученного интегратором, можно проверить на экране осциллографа изменением масштаба измерения, небольшой вариацией коэффициентов дифференциального уравнения и начальных условий. При этом на экране должна быть неподвижная устойчивая кривая, почти не меняющая форму. В случае, когда эти условия не выполнены, имеют место нелинейные искажения. Возможность перехода в область среза и получение нелинейных искажений делает нецелесообразным применение интегратора в случае неустойчивых решений. Решение на интеграторе затруднительно также в случае наличия в решении характеристических корней разного порядка малости. В этом случае систему дифференциальных уравнений надо разбивать на отдельные системы так, чтобы в пределах одного решения были корни одного порядка малости. Решение системы алгебраических уравнений на интеграторе можно получить как асимптотическое приближение решения системы дифференциальных уравнений. Здесь встречаются те же трудности, что и при решении дифференциальных уравнений. Решение неустойчиво в случае малых по абсолютной величине корней и требует дополнительного преобразования исходных уравнений. Решение не удается получить в случае бесчисленного множества решений. В ряде случаев решение может быть только качественным.

Из изложенного видно, что интегратор типа ЭЛИ решает весьма узкий класс задач. Решение этих задач требует длительных и трудоемких исследований. Решение имеет весьма низкую точность (1—2 значащие цифры). Делается вывод, что данный интегратор является несовершенным прибором. И. Ю. Ивличев

9340. **Аналоговая вычислительная машина в качестве системы управления. Рассел, Мак-Грегор, Бернс** (The analog computer as a process controller. Russell D. W., McGregor W. K., Burns L. F.), Control. Engng, 1957, **4**, № 9, 160—165 (англ.)

Обсуждается ряд вопросов, связанных с использованием аналоговых вычислительных машин в составе систем автоматического управления. Отмечаются два возможных варианта работы машины: в натуральном масштабе времени и в двух масштабах времени. Во

втором варианте регулируемый процесс и система управления моделируются с помощью машины так, чтобы скорость протекания процесса была значительно выше реальной. Параметры реального процесса измеряются через определенные промежутки времени и вводятся в машину в качестве начальных условий. Результаты вычислений сравниваются с реальными значениями параметров и используются для регулирования.

Рассматриваются основные этапы разработки системы управления, содержащей аналоговую машину: анализ уравнений системы и набор схем. В качестве примера приводится описание системы управления компрессором аэродинамической трубы для испытания авиационных двигателей. Библ. 2 назв. А. В. Шилейко

9341. Электронные моделирующие устройства. Гарсия-Сантесмасес (Calculadoras electronicas analogicas. Garcia Santesmases J.), Ciencias, 1957, 22, № 4, 675—687 (исп.)

Обзорная статья.

9342. Моделирующие математические машины. Кабеш (Analogové matematické stroje. Kabeš Karel), Slaboproudý obzor, 1956, 17, № 7, 388—393 (чешск.; рез. русск., нем., англ., франц.)

Обзорная статья знакомит с состоянием современной техники моделирующих математических машин. После изложения основных понятий следует описание разных методов производства основных математических операций. Далее изложен принцип решения алгебраических и дифференциальных уравнений и показан синтез моделирующих устройств. В заключение произведена оценка и намечен объем использования моделирующих математических машин в технической практике.

Резюме автора

9343. Электронные моделирующие машины, их устройство и применение. Хенниг (Elektroniske analogregnemaskiners oppbygging og anvendelse. Hennig Tore), Tekn. ukebl., 1958, 105, № 2, 21—28 (норв.)

Статья вводного характера.

9344. Моделирующие вычислительные машины. Миртес (Analogové počitače. Mirtes Bohumil), Slaboproudý obzor, 1957, 18, № 6, 379—383 (чешск.; рез. русск., англ., нем., франц.)

Несколько выбранных результатов исследования и развития моделирующих вычислительных машин в исследовательском институте телекоммуникации в Праге. Центральная установка нуля вычислительных усилителей и концепция малого дифференциального анализатора указывает на стремление получения доброкачественных результатов посредством экономии в проекте системы. Разработанные вычислительные элементы — прецизионные потенциометры, сервомоторы, вибрационные реле — свидетельствуют об успехе самостоятельного решения основных технологических задач.

Резюме автора

9345. Отчет о разработке дармштадтского электронного моделирующего устройства с периодизацией. Ден (Entwicklungsbericht über die repetierende elektronische Analogie-Rechenanlage Darmstadt. Dhen W.), Ber. Internat. Math.-Kolloq., 1955 (1957), Nov., 87—92 (нем.)

9346. Моделирующее устройство для исследований ядерной энергии. Мак-Ласки (An analogue computer for nuclear power studies. MacLusky G. J. R.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1957, B104, № 17, 433—442. Discuss. 447—451 (англ.)

9347. Электронные аналого-счетные машины с низкой скоростью работы. Хаяси, Кондо, Кисима, Кёто дайгаку когаку кэнкюсё ихо, 1956, 9, март, 1—6 (японск.)

9348. Машина для умножения дискретного действия. Инада, Синдо, Оё буцури J. Appl. Phys., Japan, 1957, Apr., Suppl., 30 (японск.)

9349. Последние достижения в технике дифференциальных анализаторов. Мичел (Recent developments in differential analyser techniques. Michel J. G. L.), Bonn. math. Schr., 1957, № 3, 1—12 (англ.)

Первая часть статьи знакомит с содержанием малоизвестного доклада Шеннона на конференции в Принстоне. При решении дифференциального уравнения вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t)$$

очевидным на первый взгляд требованием является наличие $2n$ интеграторов (при $m = n$). Показано, как можно группировкой членов привести данное уравнение к виду, моделирование которого потребует n интеграторов. Другой метод — ввести новое переменное z так, что

$$y = \sum_{j=0}^{m} b_j z^{(j)}.$$

Приводимые блок-диаграммы обоих методов являются дублированием одна другой в смысле, определенном Шенноном.

Среди многочисленной литературы по использованию дифференциальных анализаторов имеется незначительное число работ по их фундаментальной теории. Одна из них принадлежит автору (J. Scient. Instrum., 1948, 25), который в реферируемой статье развивает полученные результаты далее. Для определенного круга задач, где по уравнению $y^{(n)} = f[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}]$ необходимо найти $x = F(y)$ так, чтобы основная функциональная часть анализатора осталось неизменной, оператор сталкивается с проблемой получения $x = \int \frac{dy}{y'}$. Показано, что для анализатора, имеющего в своем составе сервоинтеграторы, эта проблема может быть решена инверсным включением такого интегратора, вследствие чего сокращается количество функциональных блоков. Данный метод может применяться для нахождения оператора $o^{-1}[x]$ и для итерационных вычислений при разрыве обратной связи.

И. К. Волков

9350. Гармоническое аналоговое вычислительное устройство типа Хегга—Лаурента. Франк (A Fourier analogue-computer of the Hägg—Laurent type. Frank V.), J. Scient. Instrum., 1957, 34, № 5, 210—211 (англ.)

Описываются конструктивные особенности последних образцов электромеханического аналогового устройства, построенного в Дании для гармонического анализа и синтеза по методу Хегга—Лаурента (Hägg G., Laurent T., J. Sci. Instrum., 1946, 23, 155). Использовано 7 вращательных искателей с соответствующей схемой, обеспечивающей точное воспроизведение всех гармоник; амплитудная селекция осуществляется декадными делителями, выполненными на точных сопротивлениях. Указывается, что машина работала в течение шести месяцев без серьезных поломок. Погрешность редко превышала 1÷2 единицы при диапазоне изменения ±200 единиц и 3÷5 единиц при диапазоне ±2000 единиц. Вычисление одномерного гармонического ряда с 41 членом и точностью до 6 знаков требует 10—15 мин. машинного времени.

Б. Ш. Беркович

9351. Новый табулятор «Самастроник» (La nouvelle tabulatrice Samastronic), Rev. mécanogr., 1957, 11, № 122, 355—359 (франц.)

Приводятся данные нового табулятора «Самастроник» (Samastronic), работающего со скоростью 300 циклов в 1 мин. и печатающего за каждый цикл строку из 140 букв или цифр. С помощью различных методов уплотнения емкость стандартной 80-колонной перфокарты при ее использовании в этом табуляторе может быть доведена до 200 колонн. Имеется два читающих устройства, одно из которых читает специальные сигналы управления, а другое — все содержимое карты, причем одна и та же карта может читаться до 4 раз.

Печатающее устройство содержит 140 игл, непрерывно вибрирующих с частотой 305 *гц* в горизонтальной плоскости, перпендикулярной к направлению движения бумаги. Каждая из этих игл может также совершать под действием электромагнитных импульсов быстрые вертикальные движения, прижимая при этом чернильную ленту к бумаге и печатая точку. Из комбинаций таких точек составляется контур буквы или цифры. Моменты времени, в которые должна быть напечатана точка (при условии, что бумага движется непрерывно и с постоянной скоростью, а иглы вибрируют в направлении, перпендикулярном к направлению движения бумаги), определяются с помощью коммутационных дисков, вращающихся со скоростью 5 об/сек. Всего имеется 50 различных дисков (26 букв, 10 цифр и 14 специальных символов). Печатаемые таким способом знаки имеют ширину 2,54 *мм* (строка из 140 знаков имеет длину 355,6 *мм*).

Имеется 7 счетчиков емкостью 10 разрядов плюс знак. Каждый счетчик может выполнять сложение в двоичной, двоично-десятичной и десятичной системах счисления. Предусмотрены средства контроля правильности работы. Имеется также возможность электрически подключать дополнительные счетчики. В состав машины входят два запоминающих устройства, одно из них заполняется вручную. Данные из него могут быть отпечатаны по команде с перфокарты. Другое может хранить количество знаков, равное числу колонн перфокарты. Данные в него автоматически переписываются с перфокарты. Задание последовательности операций и соединений между элементами машины осуществляются с помощью коммутационной доски. А. В. Шилейко

9352. Использование перфоленты в механографических процессах. Де-Дзуани (L'impiego della banda perforata nei procedimenti meccanografici. De Zuani Umberto), Riv. militare, 1957, **13**, № 4, 558—566 (итал.)

Рассматриваются преимущества использования перфолент вместо перфокарт.

9353. Перфорированные ленты. Бене (Bandes perforées. Benay J.), Rev. mécanogr., 1957, **11**, № 123, 409—414 (франц.)

Одна из серии статей о машинах фирмы «Фриден» (Friden). Описывается перфоратор «Фриден» для набивки лент и фактурная машина «Фриден компьютайпер Б» (Friden Computyper «B»), состоящая из электропишущей машинки и специальной вычислительной машины «Фриден» большой емкости; в этой специальной машине используются печатные схемы и германиевые диоды.

9354. Некоторые свойства матриц, отражающих ходы и операции счетных устройств. Акушский И. Я., Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1956, вып. 4, 86—100

Первым этапом разработки формального математического аппарата программирования работы счетных устройств может явиться построение на базе аппарата линейной алгебры основ теории механизации вычислительных процессов с помощью аддитивных машин, т. е. машин, счетные элементы которых выполняют лишь сложение и вычитание. К аддитивным машинам относятся табуляторы, счетные комбайны и различные другие счетные устройства. Настоящая работа является вводной к циклу работ, посвященных систематическому изучению методами теории матриц вопросов оперативного программирования для аддитивных счетных устройств. Из текста статьи

9355. Операционные матрицы разностной схемы. Акушский И. Я., Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1956, вып. 4, 101—111

«Установленные ранее. . . положения и факты, относящиеся к операционным матрицам и связанным с ними операционным циклом, . . . применены к исследованию важной для вычислительной практики задачи — механическому составлению таблицы разностей». (Из текста статьи). См. также реф. 9354

9356. Об условиях разрешимости однородной вычислительной задачи. Акушский И. Я., Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1956, вып. 4, 112—127

9357. Новый гармонический анализатор. Хогбен (A new harmonic integrator. Hogben N.), Quart. Trans. Instn Naval Architects, 1957, **99**, № 2, 171—172 (англ.)

Показывается, что механический интегратор (РЖМат, 1958, 3407), вырабатывающий величину

$$F = \int_{1/2L}^{1/2L} d\frac{[t\,(x)]}{dx} \cdot \sin\left(2n\pi\frac{x}{L} + C\right) dx,$$

может быть непосредственно использован в качестве гармонического анализатора. Приводится схематический чертеж интегратора. А. В. Щилейко

9358. Планиметр-топорик. Барнс (Hatchet or hacksaw blade planimeter. Barnes George), Amer. J. Phys., 1957, **25**, № 1, 25—29 (англ.)

Приводится описание планиметра-топорика и дается теория, на которой основано его действие. Доказывается, что площадь, ограниченная замкнутой кривой, численно равна произведению длины планиметра (расстояние между концами, соприкасающимися с плоскостью кривой) на длину пути, описанного концом планиметра по кривой. При обходе кривой планиметром один его конец перемещается по специально выбранной прямой, а плечо планиметра располагается по касательной к кривой в точке, служащей вторым концом планиметра.

Дается оценка погрешности планиметра. Погрешность может составить от 0,4 до 6%. Е. В. Вандышева

9359. О математических машинах Cla и ЭСКО. Карльссон (Om matematikmaskinerna G1a och ESKO. Carlsson Tage), Arkhimedes, 1957, № 2, 33—41 (шведск.)

9360. Электронные счетные приборы. Гунделах (Elektronische Zählgeräte. Gundelach Volkmar G.), Elektron. Rundschau, 1957, **11**, № 7, 219—220 (нем.)

Кратко описывается скелетное построение и приводятся характеристики некоторых наиболее интересных электронных счетных приборов (например, приборов для определения малых отрезков времени срабатывания и отпускания реле, открытия затвора фотоаппарата и т. д.), представленных на одной из выставок. А. А. Архангельская

9361. Важны ли вычислительные машины? Уотсон-Уотт (Are computers important? Watson-Watt Robert), Proc. East. Joint Computer Conf., 1957, № T-92, 67—68 (англ.)

Приводится полный текст приветственной речи на объединенной восточной конференции по вычислительным машинам. Автор считает, что значение вычислительных машин состоит не в возможностях произ-

водить с большими скоростями арифметические действия, а в возможностях обслуживания больших комплексных систем управления. Г. Х. Новик

9362. **Электронные цифровые вычислительные машины. Морони** (Macchine calcolatrici elettroniche aritmetiche. Moroni Sergio), Antenna, 1956, 28, № 3, 114—118 (итал.)

Популярная статья.

9363. **Начальные сведения о решении задач на электронных вычислительных машинах. Ляпунов А. А., Шестопал Г. А.**, Матем. просвещение, вып. I, 1937, 57—74

9364. **Экспериментальная математика и аналоговый счет. Росман** (Les mathématiques expérimentales et le calcul analogique. Rossmann F.), Automation (France), 1957, № 14, 229—237 (франц.)

Популярная статья о методах электромоделирования.

9365. **Электронные вычислительные машины с программным управлением. Хубер** (Programmgesteuerte elektronische Rechenmaschinen. Technische Grundlagen. Huber A.), Funk-Technik, 1958, 13, № 2, 39—41 (нем.)

Популярная статья.

9366. **Автоматизация перевода с одного языка на другой. Панов Д. Ю., Ляпунов А. А., Мухин И. С.** В сб.: Сессия АН СССР по научн. пробл. автоматиз. произ-ва, 1956. Пленарн. заседания. М., АН СССР, 1957, 181—213, дискусс. 214

Сообщается о работах в области автоматизации перевода, которые ведутся в Математическом институте им. Стеклова и в Институте точной механики и вычислительной техники.

В Математическом институте им. Стеклова разработаны опытные варианты алгорифмов перевода с французского и английского языков на русский.

Словарь, используемый в переводе с французского языка на русский, содержит 1100 слов и разделен на две части: французскую и русскую, включающие французские и русские основы слов и информацию к ним. Рассмотрение соотношений между словами происходит в форме последовательной проверки ряда условий.

Еще не решен вопрос об осуществлении разработанных алгорифмов на электронной машине с большой производительностью. На машине «Стрела» будут поставлены только экспериментальные переводы, задача которых состоит в опробовании разработанных алгорифмов.

В Институте точной механики и вычислительной техники в основу работы по автоматизации перевода положены следующие принципы:

1. Максимально возможное отделение словаря от программы перевода, что дает возможность расширять словарь, не меняя программы.

2. Разделение программы перевода на две независимые части: анализ переводимого предложения на иностранном языке и синтез перевода на русском языке. Это дает возможность использовать одну и ту же программу синтеза русского текста при переводе с любого языка.

3. Помещение слов в словаре в основной форме, что дает возможность составлять программу синтеза русского текста по известным правилам русской грамматики.

4. Помещение в словаре постоянных грамматических характеристик слов.

5. Определение значений многозначных слов по контексту и их грамматических характеристик из анализа грамматического строя предложения.

Отмечается, что программа анализа во многих случаях позволяет определить, какой частью речи является слово, которого нет в словаре, и установить его грамматические характеристики.

Начаты работы по автоматическому переводу на русский язык с немецкого, китайского и японского языков. Предполагается в ближайшем будущем автоматизировать перевод с одного иностранного языка на другой, используя в качестве языка-посредника русский язык.

Решение проблемы автоматического перевода зависит от развития трех областей науки — лингвистики, математики и вычислительной техники. Из опытов, проведенных в СССР и за рубежом, можно сделать вывод о том, что автоматический перевод должен осуществляться на специализированной электронной цифровой машине с программным управлением. Эта машина должна иметь запоминающие устройства большого объема, небольшой набор простых команд, быстродействующие вводные и выводные устройства. Обращается внимание на то, что одной из нерешенных проблем является проблема ввода данных. Отмечается необходимость усиления работы по созданию устройств для автоматического преобразования печатного текста в цифровой код, а в более далекой перспективе — преобразования человеческой речи в цифровой код. В. Л. Евтеев

9367. **Логические структуры языка. Хомский** (Logical structures in language. Chomsky Noam), Amer. Docum., 1957, 8, № 4, 284-291(англ.)

Рассматривается чисто формальное построение грамматики языка как некоторого средства для образования предложений. При этом в основу кладется понятие «лингвистического уровня». Различными лингвистическими уровнями являются фонемы или буквы, морфемы или части слов, слова, структуры фраз и преобразования. Каждый лингвистический уровень дает определенную точку зрения для характеристики предложения в данном языке. Комбинируя эти точки зрения, можно конструировать относительно простую и наглядную грамматику языка (в данном случае английского), если игнорировать все те точки зрения, которые привели бы к сложной грамматике. Таким образом, каждое предложение можно рассматривать как последовательность фонем, последовательность морфем, последовательность слов, последовательность фраз и, наконец, последовательность операций (грамматических преобразований), с помощью которых данное предложение получается из более простых предложений. Приведены различные случаи предложений с двойным смыслом, характерные в основном для английского языка. Высказывается мнение, что различные искусственные языки, изучаемые в теоретической логике для специальных целей, могли бы представлять собой род моста между разговорным и машинным языками. А. В. Шилейко

9368. **Опыты по механическому распознаванию звуков речи. Фрай, Денеш** (Experiments in mechanical speech recognition. Fry D. B., Denes P.), Inform. Theory 3rd London Sympos., 1955, London, 1956, 206—212 (англ.)

Описывается прибор, расчленяющий звучащую речь на отдельные фонемы. Прибор работает по тому же принципу, на котором основано различение звуков в потоке речи человеком: 1) предварительное опознание звука по его «качеству»; 2) привлечение контекста для окончательного опознания звука. Предварительное опознание возможно благодаря тому, что каждая фонема характеризуется определенным спектром звуковой волны. Для окончательного опознавания используется диаграмма частотности двучленных сочетаний фонем.

Производились опыты распознавания с помощью описываемого прибора 15 фонем: *ptkfθsʃmnlriauə*. Фо-

немы *tksʃmnlaiuə* распознаются сравнительно легко; *p* не удается отличить от других фонем, *r* — от *m*, *n*, *l*; *m* часто не отличается от *n*, *k* — от *t*, *f* — от *θ*. Для опытов использовались 500 комбинаций типа *CVC* из 15 перечисленных фонем и дву- и трехсложные английские слова, составленные из 11 хорошо различаемых фонем. Прибор распознавал 60—70% материала правильно. Указываются возможные использования данного прибора в машине, записывающей звучащую речь принятой системой букв и в устройствах связи, «сжимающих» речь. Т. Н. Молошная

9369. Перевод с русского на английский электронным переводчиком. Успешный перевод машиной текста с одного языка на другой. Швейсхеймер (Russian is turned into English by electronic translator. Successful machine to translate text from one language to another. Schweisheimer W.), Australas. Engr, 1957, Sept., 112—113, 115 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 5293, 5295.

9370 К. Некоторые экономические вопросы счетного машиностроения. Обзор состояния счетного машиностроения в капиталистических странах. Вып. I. Лунская Л. Н. (Гл. упр. научно-исслед. и проектн. организаций при Госплане СССР. НИИСЧЕТМАШ). Б. м., ЦБТИ, 1957, 98 стр., илл.

Книга является первым выпуском серии «Обзор состояния счетного машиностроения в капиталистических странах». В книге приводится экономическая характеристика состояния производства вычислительных машин в США, Англии, Германии, Италии, Франции и Швеции по данным промышленных цензов, иностранной периодической литературе и каталогам фирм.

Повышение роли вычислительных машин в автоматизации производственных процессов, в поднятии производительности труда управленческого аппарата привели к усилению темпов роста производства счетных машин. За период с 1947 по 1954 гг. производство счетных машин в США увеличилось на 67%, а пишущих — на 17%. По темпам роста особенно выделяется Западная Германия, счетное машиностроение которой составило 546% по отношению к 1949 г., в то время как по перерабатывающей промышленности производство соответственно составило 231%.

Приведенные таблицы показывают, что по производству счетных машин США далеко опередили все остальные капиталистические страны. На предприятиях счетного машиностроения США в 1954 г. было занято 56,7 тыс. рабочих и служащих. Стоимость отгруженных счетных машин, кассовых аппаратов и частей к ним составила в 1954 г. 500 млн. долларов. По данным цензa, в этом же году в счетном машиностроении США насчитывалось 84 предприятия, с общим числом рабочих и служащих 56,7 тыс. человек. Приводятся развернутые таблицы производства отдельных видов счетных машин.

По своим размерам в США резко выделяются пять фирм: «ИБМ», «Сперри-Рэнд», «Нэшнл Кэш Реджистер», «Берроуз», «Ундервуд», — являющиеся монополистами внутреннего и внешнего рынков. Приводятся таблицы годовых оборотов фирм счетного машиностроения, номенклатура и количество выпущенных электронных машин. Так, на май 1956 г. было выпущено 3100 машин серии 600 и 700 фирмы ИБМ, более 250 различных моделей УНИВАК, более 16 моделей ЭЛЕКОМ и др. Приводятся их стоимость и арендная плата.

Производство счетных машин в Англии увеличилось в 11 раз за последние 10 лет. По данным промышленного цензa 1948 г. в Англии на 102 предприятиях конторского машиностроения (по которому учитывалось счетное машиностроение) занято 16447 рабочих и служащих. По своим размерам выделяются две фирмы: «Бритиш Тэбьюлейтинг Машин К°» и «Пауэрс Самас Акаутинг Машинз». Приводятся данные о выпускаемых электронных цифровых машинах, их стоимость, количество имеющихся заказов и др. Так, в эксплуатации находится 120 машин ЭМП фирмы «Бритиш Тэбьюлейтинг машин» для торгово-промышленного учета, 4 машины ДЭЮКЕ фирмы «Инглиш Электрик» и др. Эксплуатируется 4500 комплектов перфорационных машин САМАС, причем, по данным фирмы, эти машины могли бы эффективно использоваться в 8500 организациях.

Подробные экономические данные приводятся по ФРГ, Франции, Италии.

В книге дается краткий обзор применения электронных машин для учета, статистики и планирования. В США имеется в настоящее время около 8 млн. конторских служащих. Их больше, чем фермеров, и только в полтора раза меньше, чем заводских рабочих. Несмотря на высокие темпы развития производства конторских машин, серийное производство электронных вычислительных машин для учета, статистики и планирования началось лишь с 1955 г. Бюро переписи США разрабатывало материалы переписи 1951 г. на электронной машине УНИВАК, две таких же машины обрабатывали материалы промышленной переписи 1954 г. В области бухгалтерского учета электронные вычислительные машины в настоящее время применяются главным образом для расчетов по зарплате. Так, машина ЛЕО применялась в конторе с 1951 г.; она подсчитывает за 4 часа зарплату для 10 тыс. человек, заменяя труд 37 служащих. На машине ИБМ-702 производятся расчеты с клиентами за электроэнергию предприятием, имеющим 1800 тыс. абонентов. Электронные вычислительные машины применяются также для материального учета как товарного, так и внутризаводского. Пользуясь машиной «Спид Тэлли», торговая фирма «Джон Плейн» сократила количество своих счетных работников материального учета со 150 до 7 человек.

В книге приводятся конкретные данные экономичности применения вычислительных машин и их производительность. Приводятся также подробные данные о затратах фирм счетного машиностроения на научно-исследовательские работы и строительство новых заводов.

На общие теоретические исследования и на их внедрение в практику в США было затрачено в 1955 г. более 5 млрд. долларов, в том числе на работы по электротехнике и электронике 1 млрд долларов. Фирма ИБМ истратила на научно-исследовательские работы и на конструирование новых моделей в 1955 г. 16537 тыс. долларов. Фирма развертывает капитальное строительство заводов и научно-исследовательских лабораторий для автоматических электронных и счетно-перфорационных машин в различных городах страны (приводятся конкретные данные). Приводятся данные о новостройках фирмы ИБМ, их полезной площади, капиталовложениях, количестве персонала. Аналогичные данные приводятся по другим фирмам США, Англии.

Приводятся краткие данные о подготовке кадров. В течение последних лет в печати промышленно развитых капиталистических стран все чаще звучит тревога по поводу недостатка квалифицированных специалистов в области технических наук. Опрос 200 крупнейших американских фирм показал, что половина из них уже в 1954 г. не могла обеспечить себя полностью инженерами и научными работниками. В области вычислительной техники США в 1956 г. было занято 100 тыс. инженеров и техников, а в 1961 г. потребуется около 3 млн. специалистов. Приводятся материалы о курсах по подготовке кадров вычислителей в некоторых американских фирмах счетного

машиностроения. Приводятся данные о количестве персонала, обслуживающего электронные машины.

Электронные вычислительные машины создали новую профессию — инженеров информационной службы, которых потребуется 17 тыс. в течение ближайших десяти лет.

Очень кратко в книге упоминается об организации и работе вычислительных центров. По данным 1956 г., в капиталистических странах имелось 63 вычислительных центра (в том числе университетские и правительственные), из них в США — 54. Отмечается снижение почасовой арендной платы за пользование электронными машинами до 300 долларов.

Книга представляет значительный интерес для работников вычислительной техники. А. В. Вавилова

9371 К. Электронные вычислительные машины. Лебедев С. А. М., АН СССР, 1956, 47 стр., илл., 65 коп.

Показана роль современных быстродействующих электронных вычислительных машин в решении важнейших проблем науки и техники. Дана краткая характеристика советской быстродействующей электронной счетной машины (БЭСМ) и перечислены некоторые задачи, решенные с ее помощью (вычисление орбит движения планет, решение системы из 800 алгебраических уравнений, определение форм контуров крутых неосыпающихся откосов каналов, вычисление интегралов Френеля, перевод текста с английского на русский, решение шахматных задач и т. п.).

Приводится описание принципов работы электронных вычислительных машин и их основных узлов: арифметического устройства, запоминающего устройства, устройства управления, устройств ввода и вывода и т. д. Подробно описывается один полный цикл работы машины на примере выполнения одной трехадресной команды заданной программы. Показываются примеры кодирования чисел и команд; представления чисел в десятичной и двоичной системах счисления; перевода чисел из одной системы счисления в другую; кроме того, показываются системы кодов и деление в связи с этим цифровых машин, на две категории — параллельного и последовательного действия. Дается объяснение фиксированной и «плавающей» запятой. Имеется много принципиальных схем и фотографий основных узлов БЭСМ. В приложении изложены принципы программирования. Г. К. Кузьминок

9372 К. Автоматические цифровые вычислительные машины. Бут, Бут (Automatic digital calculators. Booth Andrew D., Booth Kathleen V. Butterworths Scient. Publ., London, 1953, 231 S.) (англ.)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

9373. Унифицированная обработка данных. Кричли (Integrated data processing. Crichley William A.), Chem. Engng Progr., 1957, 53, № 7, 338—341 (англ.)

Рассматриваются системы унифицированной обработки данных (IDP—Integrated Data Processing) для торгово-промышленных применений. Ее сущность состоит в том, что данные, введенные в систему однажды, сохраняются в ней и могут быть использованы для различных целей в различное время. Система унифицированной обработки данных фирмы «Diamond Alkali» (Кливленд, США) охватывает группу предприятий из 18 заводов, 10 сбытовых контор и центрального управления, расположенных в различных городах США; введение этой системы позволило сократить полный цикл заключения сделки с 60 час. до менее чем 20 час. Отмечаются особенности коммерческих данных: 1) большой объем; 2) неполная достоверность отдельных данных, в связи с чем большее значение приобретает осуществленный в системе контроль первоначальной информации; 3) быстрое «старение» данных, откуда следует важность их быстрого поступления с отдельных предприятий. Запоминание данных в системе осуществляется с помощью перфокарт и вспомогательных перфолент. Коммерческие данные могут также вводиться в систему вручную или при помощи управляющей перфоленты. Для целей статистики и анализа данные могут быть напечатаны выборочно, могут быть представлены в виде кодов различных вычислительных машин, а также непосредственно введены в центральную вычислительную машину, которую предполагается установить в будущем. Скорость передачи данных в системе лежит в пределах от 60 до 200 характеристик в 1 мин. Подчеркиваются достоинства системы: непрерывный характер ее работы и отсутствие необходимости повторного введения текущих данных, что удешевляет и ускоряет процесс обработки данных, а также уменьшает вероятность появления ошибок.

Отмечается взаимосвязь понятий «унифицированная обработка данных» (IDP) и «электронная обработка данных» (EDP). З. Д. Доброхотова

9374. «Дататрон» экономит время для промышленности (Datatron saves time for industry), Copper and Brass Bull., 1957, № 182, 4—5 (англ.)

Электронная цифровая вычислительная система для обработки данных «Дататрон» фирмы «Берроуз» (Burroughs Corp.) может применяться для решения разнообразных задач, относящихся, например, к таким областям, как расчет реактивного двигателя, авиастроение, артиллерия, испытания управляемых снарядов, расчет аэродинамических труб, страховые операции, проектирование и эксплуатация очистительных заводов, изучение разработок природного газа. Квартальный отчет страховой организации, требовавший при выполнении вручную 1800 человеко-час., составляется «Дататроном» за 100 человеко-час. Крупная нефтяная компания за 15 мин. решает на «Дататроне» сложную задачу, которую опытный инженер может решить только за две недели. В. А. Брик

9375. Двойная установка ДЭЮКЕ помогает математическому отделу Британского государственного авиазавода (Twin-DEUCE installation aids R. A. E.'s Mathematical Department), Brit. Communs and Electronics, 1958, 5, № 1, 45 (англ.)

Описывается использование электронных цифровых вычислительных машин математическим отделом Британского государственного авиазавода (Royal Aircraft Establishment). Из-за увеличивающегося объема вычислительной работы отдел установил у себя вторую машину ДЭЮКЕ (РЖМат, 1955, 4740). За один день на одной машине выполняют до 20 различных работ. Среди решаемых задач — аэродинамический расчет крыла, обработка результатов испытаний крыла в аэродинамической трубе, оценка сил и моментов, действующих на вибрирующее крыло, вычисление скорости флаттера, анализ измерений, проводимых при пробных полетах, исследование резонанса вертолета; задачи распространения электромагнитных волн; изучение вооружения и многие другие. Расчет поведения крыла при сверхзвуковой скорости занимает на машине около 30 час. для одного варианта крыла. При обычных методах вычислений с использованием настольных счетных машин анализ 30 вариантов крыла требует примерно 15 человеко-лет работы. На ДЭЮКЕ был проведен расчет стенок сверхзвуковой аэродинамической трубы. В. А. Брик

9376. Три новых установки комплексной обработки данных охватывают диапазон от системы, основанной на копировальных машинах, до вычислительного центра (Three new I. D. P. installations range from system based on duplicating machines to computer center), Office Manag., 1957, 18, № 3, 36 (англ.)

Описаны три системы комплексной обработки данных:

1) Компания—«Бейкер Ойл Тулс» (Baker Oil Tools, Лос-Анжелос) ввела систему обработки данных для учетно-плановых работ. Для регистрации данных используются две картотеки. Одна из них содержит списки стандартных материалов, другая — перечень стандартных операций. Благодаря такой системе регистрации и применению копировальных машин процесс обработки заказа уменьшен с двух дней до 30 мин.

2) Железнодорожная компания «Сауэрн Рейлвей Систем» (Southern Railway System) в Атланте (штат Джорджия, США) недавно начала эксплуатацию электронной цифровой машины ИБМ-705 модель II. Это первый пуск машины данного типа. Машина имеет память на магнитных сердечниках емкостью 40 тыс. двоичных цифр. Скорость ввода и вывода на магнитной ленте 15 тыс. букв. или цифр в 1 сек. Время сложения или вычитания 5-разрядных чисел равно 120 *мксек*. деления — менее 500 *мксек*. Машина будет использована для целей торговой статистики, распределения годового дохода среди акционеров, приготовления сводок и статистических данных, начисления заработной платы с учетом всевозможных удержаний, ведения записей для докладов управлению компании. Разрабатываются планы применения машины для специальных исследований, анализа торговли методом сравнения предсказывания доходов.

3) Упаковочная компания «Калифорния Пэккинг» (California Packing Co.) использует электронную цифровую вычислительную машину ИБМ-650 с памятью на магнитном барабане в целях учета. Машина дает правлению ежеминутную картину разнообразной деятельности фирмы. Она «пишет, читает, принимает решение, выполняет арифметические операции, сортирует, сопоставляет и выдает желаемую информацию».

В заключение сообщается, что компания воздушных линий «Вестерн-Эйр-Лайнс» (Western-Air-Lines) заявила о начале работы совместно с фирмой «Телереджистер» (Teleregister Corp.) над созданием самой обширной электронной системы обработки заказов. Система должна будет выполнять более 90% заказов в 47 городах, где фирма содержит билетные кассы.

В. А. Редько

9377. Некоторые статистические применения электронных вычислительных машин. Липтон (Some statistical applications of electronic computers. Lipton Stephen), Appl. Statist., 1957, 6, № 2, 102—113 (англ.)

Описываются работы по обработке данных, главным образом для исследований по биологии и сельскому хозяйству, выполненные на электронной вычислительной машине ЭЛЛИОТ-401. Даются сведения о составленных для этих задач программах (под программой автор подразумевает полную серию команд вместе с некоторыми константами, используемыми в вычислениях), приводятся примеры и продолжительность вычислений.

В. Е. Евфанов

9378. Сезонная подгонка с помощью электронных вычислительных машин. Шискин, Эйзенпресс (Seasonal adjustments by electronic computer methods. Shiskin Julius, Eisenpress Harry), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, 52, № 280, 415—449 (англ.)

Описываются методы сезонной подгонки временных статистических рядов на электронных вычислительных машинах, применяемые Бюро переписей и Национальным бюро экономических исследований в США.

9379. Как «гигантский мозг» помогает конструированию трубопровода. Брок (How giant brains aid piping design. Brock John E.), Heat., Piping and Air Condit., 1957, 29, № 5, 106—108 (англ.)

При конструировании трубопровода приходится решать уравнения изгиба со многими неизвестными. При решении таких задач считают, что трубопровод состоит только из прямых участков, соединяемых под определенными углами без отводов и колен. Такие задачи можно решать быстро и экономично с помощью вычислительных машин. Перечисляются методы решения таких задач и приводятся названия фирм, поставляющих вычислительные машины.

М. С. Саплин

9380. Вычислительные машины разрушают временной барьер (Computers break the time barrier), Plant Admin., 1957, 17, № 10, 90—92 (англ.)

Сообщается, что в 1957 г. в Канаде имелось более 30 вычислительных машин, а за два года до этого их было только две или три. Перечисляются некоторые типы вычислительных установок (американских) и задачи, в основном из области организации и управления производством, решаемые на канадских предприятиях с помощью этих машин. Среди задач — анализ торговых операций, инвентаризационная работа, расчеты загрузки оборудования, планирование производства, расчет цен, обработка платежных ведомостей и др. Решаются также научные задачи; например, фирма «Avro Aircraft Ltd.» производит аэродинамические расчеты на машине ИБМ-704, а фирма «Orenda Engines Ltd.» исследует на машине ИБМ-650 задачи по газовым турбинам.

В. А. Брик

9381. Необходимо реальное внедрение вычислительных машин в работу. Мак-Краккен (Let's really put the computer to work. Mc Cracken D. D.), Gen. Electr. Rev., 1957, 60, № 4, 13—15 (англ.)

Автор полагает, что в настоящее время использование вычислительных машин значительно отстает от их возможностей. Вычислительные машины используются главным образом при анализе разного рода конструкций, тогда как с помощью вычислительных машин может быть осуществлен не только анализ, но и синтез систем, т. е. выбор наилучшей из возможных комбинаций в зависимости от начальных условий и других факторов. В качестве примера рассматривается сложный реактивный двигатель. Для реактивного двигателя важными являются 12 переменных параметров, требования по которым могут противоречить друг другу. Вычислительная машина должна выбрать оптимальные параметры системы путем циклического повторения заданных вычислений результатов. Эта задача является достаточно сложной, поскольку необходимо просчитать очень большое количество комбинаций; тем не менее она выполнима при наличии быстродействующих машин с памятью большого объема и при наличии должным образом подготовленных программ.

Г. Х. Новик

9382. Нахождение численных решений дифференциальных уравнений гидродинамики с помощью вычислительной машины БЭСК. Хансен (Ermittlung numerischer Lösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen mit Hilfe der BESK. Hansen Walter), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 186—187, 223 (нем.; рез. англ.)

9383. Распределение железнодорожного порожняка (Distribution of empty box cars), Computers and Automat., 1957, 6, № 9, 28 (англ.)

Сообщается об использовании Южно-Тихоокеанской ж. д. в США (Southern Pacific Railroad) машины ИБМ-650 для рационального распределения железно-

дорожного порожняка на линии Портленд—Эль Пасо (8000 миль).

9384. Проверка программ. Гилл (Getting programmes right. Gill S.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 80—82. Discuss. 82—83 (англ.)

Рассматриваются вопросы «диагноза ошибки в программе, когда известно, что такая ошибка существует».

9385. Вычислительные автоматы на службе техники. Штифель (Rechenautomaten in Dienste der Technik. Stiefel Eduard), Veröff. Arbeitsgemeinsch. Forsch. Landes Nordrhein—Westfalen. Naturwiss., 1955, № 45, 29—45. Discuss. 47—65 (нем.)

Обзор технических задач, решенных с помощью релейной автоматической вычислительной машины «Цузе Z_4» в Институте прикладной математики Швейцарской высшей технической школы. Задачи выполняют табулирование функций, решение алгебраических уравнений, линейных дифференциальных уравнений (в особенности, при исследовании устойчивости), нелинейных дифференциальных уравнений, определение колебаний, критических оборотов и частот, решение дифференциальных уравнений в частных производных.

Г. Н. Поваров

9386. Применение автоматического цифрового снятия данных при испытаниях паровых котлов. Бейл, Джонс, Гофман, Хейдж (The application of automatic digital — data — collecting to boiler testing. Bail J. H., Jones C. E., Hoffman H. T. Hage W. T.), Mech. Engng, 1957, 79, № 11, 1016—1021 (англ.)

Фирма «Бэбкок энд Уилкокс» (Babcock and Wilcox) и «Бейли Митер» (Bailey Meter) в 1955 г. провели исследования по изысканию возможности снижения затрат труда и времени на испытания паровых котлов путем автоматизации процессов сбора данных. Частью этой программы исследований явилась автоматическая система ДАТАК (DATAK), которая была установлена на паровом котле в г. Спрингдейл (штат Пенсильвания) и связана телеграфной линией с цифровой вычислительной машиной в Нью-Йорке. Данные измерений направлялись в Нью-Йорк, а результаты их обработки возвращались обратно через 1 час. Первая система ДАТАК принимала сигналы от 149 датчиков (120 термопар, 20 датчиков давления, расходов, тяги и т. п., 9 датчиков для кислородного анализа). Данные от первых 140 датчиков принимались и регистрировались на перфоленте за 100 сек., опрос последних 9 точек занимал 12 мин. Весь цикл опроса длился, таким образом, 13 мин. 40 сек. Данные кислородных проб могут сниматься только через 10 мин. после предыдущего измерения, остальные датчики могут опрашиваться с большей частотой. Основной элемент системы — «моделирующий блок опроса» — состоит из шагового переключателя, стандартного самобалансирующегося потенциометра и передающего реохорда. К одному блоку опроса при помощи гибких кабелей может присоединяться до 20 различных датчиков. Сигналы датчиков по очереди преобразуются в положение движка реохорда, а затем с помощью специального преобразователя переводятся в четырехзначный цифровой код. Код поступает в 4 ячейки запоминающего устройства, а оттуда передается для пробивки телеграфным кодом на ленте. Кроме датчиков, к блоку опроса можно подключать до 6 потенциометров, где можно вручную устанавливать величины, которые нельзя получить от датчиков (например, калорийность топлива). В состав системы входит периодизатор, управляющий последовательностью работы отдельных узлов. На перфоленте, кроме данных испытания, пробиваются команды для вычислительной машины, номера испытаний, отметки времени и т. п. Для системы ДАТАК были разработаны специальные датчики, не влияющие на работу котла и имеющие нужные рабочие диапазоны. Описан анализатор фирмы «Бейли», использованный для выполнения кислородного анализа проб газа из 9 отводных трубок. В систему ДАТАК входит 200 реле. За 6 недель эксплуатации первой модели системы было проведено 322 контрольных цикла. Система работала без сбоев. Оценивается точность работы ДАТАК. Обработка данных проводилась на цифровой вычислительной машине ДАТАТРОН (DATATRON), имеющей запоминающее устройство на магнитном барабане на 4000 10-разрядных слов и вспомогательные запоминающие устройства на магнитных лентах с общей емкостью 400 000 10-разрядных слов. Для сокращения времени вычислений коррекция данных не производилась. Итоговые результаты вычислений печатались на бланках, а все рабочие и ряд промежуточных результатов пробивались на перфоленте и передавались в Спрингдейл.

В. А. Брик

9387. Цифровые вычислительные машины — вместо логарифмических линеек. Сато (Digital computers— those crazy slide rules. Sato Nobuo), Electr. West, 1957, 19, № 15, 88—90 (англ.)

Описываются возможности использования электронных цифровых вычислительных машин для решения задач энергетики. В качестве примеров рассматриваются следующие задачи, решавшиеся на машине ИБМ-650 и других машинах: анализ распределения токов и напряжений в сложной электрической сети, расчет динамической устойчивости энергосистем, анализ коротких замыканий в энергосистеме, вычисление потерь в электрической сети и др. Отмечается, что применение вычислительных машин в электроэнергетике имеет большое значение.

В. А. Брик

9388. Цифровое электронное управление траекторией. Розенберг (Digital electronic path control. Rosenberg Jack), Automat. Control, 1957, 4, № 4, 22—25 (англ.)

Описывается цифровая вычислительная машина, используемая на заводе ECS в Лос-Анжелосе (США) для управления работой вертикально-фрезерного 24-дюймового станка.

Машина состоит из собственно вычислительного блока и электронного управляющего устройства. Вычислительный блок переводит программу работы фрезерного станка в цифровую форму и записывает ее на магнитной ленте. Электронное управляющее устройство преобразует цифровую информацию в команды движения по трем взаимно перпендикулярным осям. Программа составляется с учетом того, какой станок производит работу (в данном случае фрезерный станок), какова точность обработки на этом станке, что обрабатывается, какие приборы и приспособления находятся на участке работы, где и как эти приборы и приспособления укреплены на столе станка.

Приводятся методы программирования и обращается внимание на необходимость тщательной проверки правильности составления ее. Сообщается, что идет работа по уменьшению габаритов описываемой машины, повышению надежности и увеличению пределов регулирования. Машина может быть применена и для управления другими станками различной мощности.

И. С. Колтыпин

9389. Как поставить задачу управления на вычислительной машине, входящей в состав системы автоматического управления. Джеймс, Боксенбом (How to establish the control problem for an on line computer. James Edward W., Boksenbom Aaron S.), Control Engng, 1957, 4, № 9, 148—159 (англ.)

Рассматриваются четыре метода формулировки задачи, которую должна решать вычислительная машина,

входящая в состав системы автоматического управления процессом, для того чтобы ее выходные данные были эквивалентны соответствующим параметрам процесса. Последнее является условием эффективного управления. Перечисленные методы суть: а) аналитический подход; б) статистическое исследование; в) исследование опытных данных; г) использование матричного метода описания взаимодействий между переменными многоконтурных систем.

Для управления процессами может служить вычислительная машина, способная обрабатывать достаточное количество материала, достаточно быстро выдавать результаты и вырабатывать сигналы управления. Одним из принципиальных препятствий на пути использования таких машин является трудность определения характеристик процесса и соответствующих функций управления. А. В. Шилейко

9390. **Картина событий в области автоматического управления** (Control events camera), Automat. Control, 1955, 3, № 4, 6—7 (англ.)

Иллюстрированный очерк о различных событиях в области машинного счета и автоматического управления. Рассказывается о состязании между эстрадным мастером быстрого счета и машиной УНИВАК, авиационном тренажаре фирмы «Белл» (Bell Aircraft), быстродействующем термисторе, обнаруживающем инфракрасное излучение менее чем за 2 *мсек*, высокочастотном транзисторе фирмы «Белл Телефон Лабораторис» (Bell Telephone Laboratories) и т. д.

9391. **От выхода управляющей машины к воздействию на процессы. Солзер** (From controller output to process actuation. Salzer John M.), Control Engng, 1957, 4, № 9, 183—189 (англ.)

Рассматриваются различные исполнительные элементы и усилители, осуществляющие управление процессом в соответствии с выходными величинами вычислительной машины, входящей в состав системы автоматического управления. Для частного случая цифровой вычислительной машины рассматриваются методы построения преобразователей цифровых величин в аналоговые. Библ. 10 назв. А. В. Шилейко

9392. **Использовать аналоговую или цифровую вычислительную машину для управления процессами? Стаут** (Analog or digital computer for process control? Stout T. M.), IRE Trans. Automat. Control, 1957, № 3, 3—7 (англ.)

Рассматривается вопрос о выборе типа вычислительной машины для целей управления химическими процессами. Описываются основные способы использования вычислительных машин в составе систем автоматического управления и основные характеристики обоих типов машин. Приводятся примеры использования вычислительных машин для управления распределением электроэнергии, процессами гидрации, процессами очистки нефти и для управления процессами химического производства. Библ. 8 назв. А. В. Шилейко

См. также: 9257, 9258, 9267, 9278

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абрамович С. В. 9244
Агафонова А. К. 8492
Адян С. И. 8524
Айзерман М. А. 8887
Акушский И. Я. 9354, 9355, 9356
Александров А. Д. 8432
Александров И. А. 8745
Александров П. С. 8476
Алпатов В. В. 8443, 8444
Альбрехт Ф. 8805
Ангелов С. А. 9283 К
Аржаных И. С. 8906
Аронов Р. А. 8440

Б

Баженов Г. М. 9278
Бакельман И. Я. 8853
Баранцев Р. Г. 8872
Баренблатт Г. И. 8894
Бахвалов Н. С. 9250
Бекташи Т. Г. 8824 Д
Белкина М. Г. 8975
Белый Б. Н. 8514
Берман Д. Л. 8727
Берман С. Д. 8585
Бескин Н. М. 8495
Бобров А. А. 8707, 9050
Больсен Е. М. 8518
Бондарев А. Л. 9177
Бронштейн И. Н. 8448 К
Бубенников А. В. 9198
Бэдэнеску И. Н. 8439

В

Ведерников В. И. 9219
Векуа И. Н. 8476
Виленкин Н. Я. 8962
Виноградова Н. М. 8512
Волков Е. А. 9248
Вркоч И. 8819

Г

Гагаев Б. М. 8711
Гагуа М. Б. 8769
Гайдук Ю. М. 8501
Гаткин Н. Г. 9279
Гахов Ф. Д. 8431
Гегелиа Т. Г. 8771
Гермаидзе В. Е. 8818
Гинзбург Ю. П. 9003
Глазман И. М. 8788
Глатенок В. Д. 8453
Гнеденко Б. В. 8450
Голубева К. И. 9273
Горская З. Д. 8555
Гофман И. Э. 8449
Грибулин В. А. 8515

Д

Данилов В. Л. 8901
Данилюк П. М. 9181, 9182, 9183
Дан Сун-ши 8746
Дикий Л. А. 9259
Долидзе Д. Е. 8900
Дорф П. Я. 8505, 8506
Деев В. М. 8905

Е

Евграфов М. А. 8755
Еремин С. А. 8756

Ж

Жаутыков О. А. 8828
Железнов Е. И. 8798
Житомирский Я. И. 8869

З

Загорский Т. Я. 8865
Задирака К. В. 8822
Задорожний А. М. 9193
Захарченко А. Ф. 9146
Зельдович Я. Б. 8894
Зерагия П. К. 9252
Зимин В. И. 9260
Зубов В. И. 8795
Зуховицкий С. И. 9021

И

Іванов С. І. 9256
Инада 9348
Искандеров Р. И. 8472
Ишлинский А. Ю. 8477

К

Калинин С. В. 8812
Камалов М. К. 9080
Караниколов Хр. 8786
Каргаполов М. И. 8586
Карпенко Б. И. 8482
Катков Г. Ф. 9218
Келдыш М. В. 8476
Киро С. Н. 8470
Кисима 9347
Клямко Э. И. 9310
Кобаяси С. 9272
Коваль П. И. 9253
Комиссарук А. М. 9215
Кондо 9347
Красносельский М. А. 8993
Красовский Н. Н. 8818
Кривошеин Л. Е. 9263
Кручкович Г. И. 9221
Крылов В. И. 9269
Кузьмина Г. В. 8744
Курош А. Г. 8564
Курцвейль Я. 8819
Кутыев К. М. 8597

Л

Лаврентьев М. А. 8476
Лахути Д. Г. 8532
Лебедев С. А. 9371 К
Левин Б.Ю. 8489
Левшенко Б. Т. 8668
Лемлейн В. Г. 9227
Летов А. М. 8814
Либер А. Е. 9225
Лобанов И. Б. 8464
Лобачев С. В. 8916
Лунская Л. Н. 9370 К
Любимов В. В. 8585
Ляпунов А. А. 9363, 9366
Ляшко А. Д. 8926

М

Мамузић З. 8657—8659
Манолов С. 8886
Марков О. О. 9265
Мартынюк А. Е. 8925
Маруашвили Т. И. 9258
Махарадзе Л. 8627, 8628
Мацкин М. С. 8447
Мецховришвили Ш. С. 8903
Милованова Л. Н. 8500
Михаиловић Д. 8782
Моисеев Н. Д. 8892
Монахов Г. Д. 9310
Морев И. А. 8765
Мочалин А. И. 8883 Д
Мухин И. С. 9366
Мысовских И. П. 9262

Н

Назаров Н. А. 9173
Невский В. А. 8445
Нейфах Г. М. 9197
Некрашэвіч І. Г. 8471
Нестеренко М. И. 9178
Нечаев Г. К. 9274
Никольский С. М. 8426
Новак И. П. 8463
Новат В. И. 8889

О

Окунева К. Б. 9339

П

Павловић Д. 8457
Панов Д. Ю. 9366
Парасюк О. С. 8477
Плись А. 8804
Поваров Г. Н. 8642
Подшевкін Ю. В. 8654
Пожарицкий Г. К. 8810
Покало А. К. 8950
Положий Г. Н. (Положій Г. М.) 8913, 8914
Полубояринов А. К. 8895
Прохоров Ю. В. 9035
Прудников В. Е. 8467
Пу Бао-мин 8752
Пулькин С. П. 8874
Путята В. Й. 8462
Пятецкий-Шапиро И. И. 8763, 8764

Р

Рапопорт И. М. 9279
Расулов М. Л. 8835
Резницкая К. Г. 8866
Репин Ю. М. 8813
Рогожин В. С. 8742
Родов А. М. 8983
Рождественский Б. Л. 8878
Рутицкий Я. Б. 8993
Рыбин П. П. 8912, 8917

С

Сабиров М. С. 8472
Савбо В. И. 8509
Садовский Л. Е. 8594
Саульев В. К. 9249, 9251
Секерж-Зенькович Я. И. 8896
Семендяев К. А. 8448 К
Сергеев С. О. 8562
Сидоров Ю. В. 8834
Симонов Н. И. 8493 К
Синдо 9348
Скорняков Л. А. 8564, 9238
Скоробогатько В. Я. 9256
Слободянский М. Г. 8789
Смирнов В. И. 8468
Соболев С. Л. 8836
Соболевский П. Е. 8838, 8884 Д
Соколов Т. Н. 9331
Соловьев А. Д. 8755
Софронов И. Д. 8918
Старжинский В. М. 8817
Сташевская В. В. 8793
Стеллецкий И. В. 8638
Стяжкин Н.И. 8532
Субханкулов М. А. 8736
Суворов Н. П. 8502
Судзуки 9234
Суетин П. К. 8739
Супруненка Д. А. 8471
Сухина И. А. 9194, 9195

Т

Такэда 8454
Тесленко І. Ф. 8452
Тихомиров Р. И. 8508
Тоёда 8622
Томашев Б. И. 8523 Д
Томић М. 8731
Траутман А. 8929
Тузов А. П. 8815

У

Устименко М. П 9027

Ф

Фёдараў Ф. І. 8471
Федоров А. И. 9170 К
Фещенко С. Ф. 9279
Филатов А. Н. 8898
Финн М. 9035

Х

Халилов З. И. 8837
Хан Хеп Гон 8670
Хаттори 8622
Хаяси 9347
Хилькевич Э. К. 8466, 8519 К
Хинчин А. Я. 9047

Ц

Цейтин Г. С. 8530
Цитланадзе Э. С. 8924
Цодыкс В. М. 8705

Ч

Чайкина З. С. 8791
Черников С. Н. 8589
Чехонадский Н. А. 9147
Чечин М. Н. 8434
Чугунов В. Д. 8901

Ш

Шварц А. С. 8698 Д
Шевело В. Н. 8477
Шестопал Г. А. 9363
Шкіль М. І. 8806
Шнеерсон М. С. 8766
Шнейдмюллер В. И. 8623
Шостак Р. Я. 8729
Шрагин И. В. 8992
Штраус А. В. 8790, 9002
Шустеф Ф. М. 8516, 8517

Щ

Щербаков Д. И. 8489

Э

Эйдельман С. Д. 8867
Эрдниев П. М. 8522 Д
Эскин Г. И. 9021

Ю

Юдина Н. В. 8513

Я

Яглом А. М. 8521 К
Яглом И. М. 8521 К
Якубович В. А. 8821

A

Ahmad M. 8750, 8751
Alaci V. 8932
Allamigeon A.-C. 9230
Alterman Z. 9132
Altman M. 9023
Ambrose W. 9223
Anders G. 8475
Andersen A. F. 8951
Anderson R. L. 9059
Araki S. 8693
Aronszajn N. 8858, 8994
Arsove M. G. 8772
Artzy R. 8607
Asami T. 8753
Askovitz S. I. 8510
Asplund E. 8575
Atkinson F. V. 8809
Auslander M. 8634.
Azumaya G. 8619

B

Bail J. H. 9386
Bailey H. R. 8811
Bailey N. T. J. 9162, 9163
Balada F. 8487
Bambrough B. 9296 К
Bancroft H. 9169
Barnes G. 9358
Barry P. D. 8748
Bartholomay A. F. 8687
Basch A. 8480
Baumslag G. 8591
Baxter G. 9033, 9036
Beer S. 9123
Beesack P. R. 8944
Behnke H. 8499
Békéssy A. 9280
Bell M. 8955
Bellert S. 8981
Bellivier A. 8491
Bellomi C. 8646, 8647
Benay J. 9353
Bennett B. M. 9076, 9083
Berberian S. K. 9012
Bereis R. 9192
Bergman S. 8852
Berkes J. 9188
Bernstein R. I. 9153
Bers L. 8851
Bertolini F. 8945
Bhonsle B. R. 8972
Bielecki A. 8780, 8781
Bieri H. 9245
Bilinski S. 9191
Billingsley P. 9089
Binet F. E. 9059
Birch B. J. 8551
Blachman N. M. 8982
Blackett D. W. 8626
Blambert M. 8738
Blanuša D. 9232
Blasbalg H. 9152
Block H. D. 8942, 8943
Blum J. R. 9094
Bobeck A. H. 9311
Bogdănescu V. 8855
Boksenbom A. S. 9389
Booth A. D. 9338, 9372 К
Booth K. V. 9372 К
Borel E. 9053 К, 9054 К
Bose B. N. 8956
Braĭman F. 8957, 8959
Brauner H. 9192
Breitenberger E. 8934
Breny H. 9142
Brock J. E. 9379
Broĭda V. 8910
Brown J. A. 8497
Brown R. L. 9057
Bruhat F. 8723
Buĭcliu G. 9186
Burgess D. A. 8534
Burniat P. 9205
Burns L. F. 9340
Bychawski Z. 8915

C

Callahan F. P. 8715
Carlitz L. 8545, 8953, 8560, 8961, 8973
Carlsson T. 9359
Carr A. J. 9185
Cartan H. 8723
Cassels J. W. S. 8547
Castagnetto L. 9261
Castaldo D. 8574
Chak A. M. 8980
Chang L. C. 9075
Charzyński Z. 8747
Chaundy T. W. 8964
Chen Kuo-tsai 8601
Cherin A. A. 9321
Chomsky N. 9367
Choquet G. 8986
Chow Wei-Liang 9199
Chu Pei-chang 8873
Cinquini S. 8920—8922
Ciucu G. 9038
Collatz L. 8651
Colombo G. 8801
Comstock G. E., III 9316
Connolly T. G. 9103 К
Cook J. M. 9049
Cooke K. L. 8777
Corazza G. C. 8984
Crichley W. A. 9373
Curtis M. L. 8686
Czerwiński Z. 9055

D

Danguy L. 8566
Darwin J. H. 9069
Das M. N. 9073
Dasher B. J. 8577
Davison B. 9159
Deaux R. 9174
De Baun R. M. 9060
DeCote R. 9336
Dedò M. 9213
Deltheil R. 9053 К
Denes P. 9368
Derman C. 9046
Derwidué L. 8571
De Smet A. 9115
Devinatz A. 9005
De Zuani U. 9352
Dhen W. 9328, 9345
Dijkstra E. W. 9282 К
Doornbos R. 9093
Douglas J., Jr 8871
Duijvestijn A. J. W. 8650
Dumitrescu D. 8441
Duparc H. J. A. 8541, 8542, 8558
Du Plessis N. 8770
Durbin J. 9098
Durix 8930
Dvoretzky A. 8704
Dye H. A. 9019

E

Eda Y. 8537, 8538
Edwards D. B. G. 9312
Eilenberg S. 8633, 8635. 8636
Eisenpress H. 9378
Eller G. von 9184
Ellis J. W. 8987
Engel J. H. 9137
Epstein H. 9322
Erdélyi A. 8876
Ergen W. K. 8816
Euler K. 8494 К
Eyraud H. 8720

F

Fantappiè L. 8754, 8833
Farquharson R. 9106
Fasching G. 9109
Favard J. 9270
Federer W. T. 9097
Fell J. M. G. 9015
Feller E. H. 8632
Fenyő I. 8908, 8919 К
Fernandez Avila F. J. 8708—8710
Fieller E. C. 9099
Finn R. 8899
Finney D. J. 9064, 9161
Fisz M. 9075
Foguel S. R. 9004
Foias C. 9007
Følner E. 9020
Fontányi A. 9149
Ford G. C. 8792
Forrester A. 8692
Forsythe G. E. 8503, 9268
Frank V. 9350
Frasch H. 9179
Fraser A. S. 9160
Freudenthal H. 8442
Friedman A. 8864
Friedrichs K. O. 9026
Frisch H. L. 9133
Frölicher A. 8695, 8696
Fry D. B. 9368
Fuka J. 8424
Fulton C. M. 8608

G

Gaier D. 8948
Gallarati D. 9201—9203
Gambill R. A. 8811
Ganea T. 8689, 8690
Ganelius T. 8726
García Roca R. 9284 К
Garcia Santesmases J. 9641
Gaschütz W. 8588
Gautsch O. 9135
Gauts hi W. 9275
Geissler D. 9276
Germain P. 9334
Germer H. 9204
Gettings H. W. 9323
Ghizzetti A. 8701, 8702
Gill S. 9384
Gillis P. P. 9105
Ginsburg S. 8718
Girault M. 8946 Д
Githens J. A. 9292
Gjunter N. M. 8882 К
Gleason A. M. 8688
Godeaux L. 8429, 9209, 9211
Goetz B. E. 9116
Goldhagen E. 8877
Good I. J., 9092
Goodstein R. L. 8529
Gorn S. 9286
Granas A. 9022
Grauert H. 8760—8762
Graves L. M. 8714 К
Gravett K. A. H. 8598
Griffiths H. B. 8722
Grothendieck A. 8985
Grün O. 8593
Grundy P. M. 9071, 9072
Grunsky H. 8740, 8741
Gugenheim V. K. A. M. 8691
Guggenheimer H. 8433
Guglielmino F. 9214
Gulotta B. 9037
Gundelach V. G. 9360
Gupta O. 8539
Gyires B. 8572

H

Hage W. T. 9386
Hahn W. 8774
Haimo F. 8595
Hajkr O. 8939
Haldane J. B. S. 9077
Hamburger L. 8868
Hanner O. 8676
Hansen W. 9382
Harada M. 8637
Harmuth H. F. 9257
Harris H. E. 9330
Hartley H. O. 9099
Hattori A. 8618
Haubold K. 9190
Hawthorne F. 9172
Hayashi Y. 8684, 8685
Healy M. J. R. 9171

Heinrich H. 9264
Heins M. 8757
Hennig T. 9343
Herz C. S. 8952
Hetz W. 9052
Higgins T. J. 8734
Hiramatu H. 9231
Hodges W. A. 9326
Hoffman G. R. 9319
Hoffman H. T. 9386
Hogben N. 9357
Homma T. 9039
Honda N. 9070
Hongo E. 9010
Hooke R. 9061, 9062
Horvath W. J. 9336
Howald M. 8609
Hsu L. C. 8941
Huber A. 9365
Hufford G. 9024
Hummel J. A. 8854
Huppert B. 8600
Huron R. 9053 К
Hüsser R. 8958
Huyberechts S. 9105

I

Infeld L. 8927, 8928
Ionescu Tulcea C. 9017
Irwin J. O. 8488
Iséki K. 8661—8667, 8669
Ishaq M. 8579
Ishihara S. 9228
Itard J. 8459
Izbicki H. 8652

J

Jackson J. E. 9095
Jackson J. R. 9112
Jacobsthal E. 8567
Jaffard P. 8596
James A. T. 9079
James E. W. 9389
Jánossy L. 9128
Jeh G. C. K. 8860
Jensen A. 9168
Jessop W. N. 9117
John P. W. M. 9140
Jones C. E. 9386
Jones P.S., Ed 8451

K

Kabeš K. 9342
Kacner A. 8911
Kamat A. R. 9081
Kanold H.—J. 8535
Karlin S. 9043
Kasahara S. 8669
Kaul R. N. 9217
Kendall D. G. 9044
Kerstan J. 8680, 8681
Kertész A. 8624
Khan N. A. 8582
Kieffer L. 8425
Kilburn I. 9319
Kintner P. 9322
Kitabatake S. 9144
Klapka J. 8486
Klass P. J. 9295
Kneale S. G. 8715
Kolmogoroff A. 9028
Komaty Y. 8829—8831
Kraus L. 8909
Kreyszig E. 8832
Krzyzanski M. 8881 К
Kudo T. 8693
Kuipers L. 9107
Kullback S. 9100
Kumar R. 8977
Kurepa G. 8717
Kurth R. 8784
Kurzweil J. 8807, 8823
Kyle R. H. 8653

L

Lagrange J. 8940
Lahiri B. K. 8936
Lamotte M. 9102 К
Lamperti J. 9025
Lang S. 9199
Lánský M. 8998
Lasala J. de 9119
Lasota A. 8847
Lauwerier H. A. 8856
Lawrance R. B. 9318
Lawton B. 8550
Leboutet L. 9087
Lee Ween-ching 8724
Legrand J. 8937
Lehmer E. 8557
Leja F. 8699
Leonard J. C. 9124
Leone F. C. 9085
Lepage T. H. 8879
Leroy F. 8933
Leslie R. T. 9059
Levi F. W. 8436
Lewis D. J. 8553
Lewy H. 8827
Liebert F. 8511
Ling Ling 8873
Lipkin H. J. 8816
Lipton S. 9285, 9377
Loeb J. 9167
Long C. T. 8548
Loomis L. H. 9009
Lord F. M. 9067
Lorenzen P. 8435, 8437
Lotkin M. 8949
Lotze A. 8625
Lovass-Nagy V. 8880
Lowdenslager D. B. 8989
Ludford G. S. S. 8860
Łukaszewicz J. 9063
Lumer G. 9008

M

McAuley L. F. 8678
McCarthy J. P. 9176
McCracken D. D. 9381
McGregor J. L. 9043
McGregor W. K. 9340
Macintyre A. J. 8737
McKenzie L. 9138
Mackey G. W. 8603
Maclane G. R. 8703
McLusky G. J. R. 9346
Macrobert T. M. 8954, 8971
Mager V. 8859
Mall J. 9180
Mallick D. 8897
Mamuzić P. 8565.
Mamúzić Z. 8656
Mandau S. R. 9171
Mansfield M. J. 8679, 8682
Marathe C. R. 8580, 8581
Marcus S. 8706
Mařík J. 8700
Martinek J. 8860
Marziani M. 8907
Mason S. J. 8644
Masuda K. 8611
Masuyama M. 9101
Mather S. 9185
Matschinski M. 9134, 9239—9242
Matsuyama N. 8947
Mauldon J. G. 9041
Mazumoto H. 8830
Meadows H. E., Jr 8577
Meisel W.—D. 8697 Д
Mendelson M. J. 9321
Menger K. 9237
Menšik M. 8481
Merli L. 8787
Meyerhoff A. J. 9314
Meyers L. F. 8997
Michael E. 8660
Michalak E. M. 8734
Michel J. G. L. 9349
Mikolás M. 8546
Miller K. S. 9153
Minorsky N. 8800
Miranda A. B. de 8592
Miranker W. L. 8861
Mirsky L. 8578
Mirtes B. 9344
Mishoe L. I. 8792
Mishra R. S. 9220
Mitrinović D. S. 8504
Mitrinović O. 8561
Moessner A. 8556
Mogyoródi J. 9130
Moisil G. C. 8478
Moldovan E. 8938
Montebello C. 8984
Montgomery D. 8602
Moór A. 9216
Moore J. C. 8691
Moran P. A. P. 9158
Morawetz C. S. 8875
Morita K. 8631
Moroni S. 9362
Morse M. 8995
Mott T. E. 8935
Moustafa M. D. 9029
Mrówka S. 8671—8675
Murakami H. 8863
Murdoch D. 8584 К
Murphy B. B. 9337
Muto Y. 9222, 9226
Mycielski J. 8604

N

Nagahara T. 8616
Nagao H. 8635
Nakano N. 8612
Nakayama T. 8633, 8635, 8636
Naslin P. 8649
Natucci A. 8455, 8456
Nelson R. T. 9112
Németh G. 9130
Neugebauer C. J. 8712, 8713
Neumann B. H. 8590
Newlander A. 8848
Newman M. 8544
Nicholson G. E., Jr 9068
Nijenhuis A. 8695, 8696
Nirenberg L. 8848
Nitsche J. C. C. 8850
Nöbauer W. 8599
Nohel J. A. 8816
Nolin L. 8531
Noll W. 8899
Nomizu K. 9229
Northcott D. G. 8629
Norton D. A. 8606

O

Obrechkoff N. 8549
Oderfeld J. 9074
Okubo T. 9233
Olsson I. 8888
Opial Z. 8808
O'Shea S. 8725

P

Palais R. S. 8688
Palamà G. 8960
Pardubský B. 9148
Paria G. 8902
Parodi M. 8568—8570, 8733
Pars L. A. 8783
Patterson E. M. 8620, 8621
Pawlak Z. 9287
Pearl M. H. 8576
Pearson E. S. 9099
Pęczalski M. 8520 К
Pekeris C. L. 9132
Pendleton R. A. 9318
Pennisi L. L. 8778, 9267
Peremans W. 8641
Peretz R. 9333
Perry R. L. 8735
Pfefferkorn W. 8904
Phan Tan Hoang 9236
Philipson C. 9086, 9164
Phillips R. S. 9019
Piesch J. 9155
Pisot C. 8988
Polášek J. 8742
Pólya G. 8794
Popa I. 8479
Porter V. J. 9315
Prékopa A. 8890, 8891, 9129
Prins H. J. 9093
Prochorow J. 9028
Pu P. M. 8752
Puig Adam P. 8498
Putnam C. R. 9000

R

Radu N. C. 9040
Ragab F. M. 8969, 8970
Rain D. 9335
Rao C. R. 9058
Redheffer R. 8730
Rees D. H. 9071
Reid W. T. 8826
Rellich F. 9001
Rényi A. 9042, 9131
Reuter D. 8507
Reuter G. E. H. 9044
Révész P. 8891
Revuz A. 9030
Reynolds G. E. 9277
Rider P. R. 9066
Righi R. 8648
Risser R. 9054 К
Rizza G. B. 8767
Robinson A. 8525—8527
Robison G. B. 8639
Rogers H., Jr. 9051
Romain J. 9224
Romejko A. 9056
Roşculeţ M. N. 8768
Rosenberg J. 9388
Rosenberg R. M. 8820
Rosenblatt H. M. 9100
Rosenlicht M. 9208
Ross E. L. 9095
Rossmann F. 9364
Roth L. 9206
Rudin M. E. 8677, 8719
Russell D. W. 9340
Russo Frattasi A. 9118
Ruubel A. 9196

S

Sadowski W. 9063
Salzer J. M. 9391
Samuel P. 8617, 8630
Sansone G. 8483
Saran S. 8965—8968
Sargeaunt M. J. 9329
Sarkadi K. 9149
Sathe Y. S. 9081
Sato N. 9387
Schäffer K.—A. 9088
Schenkman E. 8587
Schmidt J. 8640
Schoenberg I. J. 8732
Schutte H. J. 8610
Schwabhäuser W. 8528
Schwartz L. 8839—8846
Schweisheimer W. 9369
Sedmak V. 8716
Segal I. E. 9018
Segedin C. M. 8893
Seidlerova I. 8474
Sengupta H. M. 8936
Serre J.—P. 8694
Severi F. 9210, 9212
Sevrin A. 9175
Shannon C. E. 9150
Shapiro H. N. 9026
Shapiro J. M. 9032
Shaw D. H. 9320
Shimogaki T. 8990, 8991
Shiowitz M. 9321
Shiskin J. 9378
Sibuya Y. 8775
Sideriades L. 8802

Sierpiński W. 8540
Sigstam K. 8888
Silverstone H. 9082
Sinogowitz U. 8651
Sispanov S. 8885
Sittig J. 9122
Slater J. K. W. 9120
Sluckin W. 9103K
Smart D. R. 8999
Smiałkówna H. 8747
Smith J. E. 9298
Smith K. T. 8994
Smith S. M. 9077
Snapper E. 8613—8615
Sneyers R. 9166
Somerville P. N. 9065
Soom E. 9126
Špaček L. 8742
Spencer D. C. 8849
Srivastava H. M. 8974
Srivastava K. J. 8963.
Stein C. 9084, 9096
Stein E. M. 8749
Stein K. 8759
Stein S. 9247
Stein S. K. 8606, 8608
Stengel J. 9139
Sternberg S. 8799
Stevens W. L. 9143
Stiefel E. 9385
Stipanić E. 8458
Stojaković M. 8573
Stone M. M. 9320
Stout T. M. 9392
Sugiyama H. 9144
Suzuki Y. 9234
Swerling P. 9151
Swift C. J. 9288
Székely G. 9136, 9145

T

Tachikawa H. 8631
Takács L. 9127, 9131. 9157
Takagi M. 8645
Takasu T. 9235
Tanaka M. 8536
Tarumoto K. 8773
Tchakaloff L. 9271
Terracini A. 8465
Thimm W. 8758
Thire C. 8563 K
Thirkettle G. L. 9104 K
Thron W. J. 8728
Tinbergen J. 9111
Tôki Y. 8773
Tominaga H. 8616
Topp C. W. 9085
Török F. 8890
Tortrat A. 9048
Tóth K. 9280
Townsend R. 9309
Transue W. 8995
Traynard C.—E. 9054 K
Treves F. 8862
Tsao Chia Kuei 9091
Tsuji K. 9011
Tweedie M. C. K. 9078

U

Udrescu V. 9187
Ugrin-Šparac D. 8552
Umegaki H. 9013, 9014
Urbanik K. 8996

V

Vajda S. 9114
Valentine F. A. 9246
Van der Waerden B. L. 8533
Vandiver H. S. 8557
Varga R. S. 9266
Vas E. 9149
Vernotte P. 8438
Vidav I. 9006
Ville J. A. 9154
Vitásek E. 9254
Vodička V. 8857, 8870
Volpato M. 8923
Vries H. de 8592

W

Wagner K. 8721
Wakulicz A. 9287
Walker J. 9332
Wall C. T. C. 8559
Wall H. S. 8931
Wallace A. H. 9207, 9243
Walsh J. E. 9031
Walter L. 9324
Wang Yuan 8543
Wardrop J. G. 9113
Watanabe H. 9045
Watson-Watt R. 9361
Weinberg R. S. 9110
Weinblum G. P. 9281
Weiner S. 9059
Weiss G. H. 9141
Weiss L. 9090, 9094
Welsh H. F. 9315
Weston J. D. 8655
Wheldon H. J. 9104 K
Whiteman A. L. 8554
Whittaker E. T. 8485
Whyburn G. T. 8683
Wigner E. P. 8583
Wijngaarden A. van 9282 K
Wijsman R. A. 9156
Wilkens A. 8785
Wilkins R. E. 9318
Wintner A. 8776, 8803
Wolff P. de 9121
Wolk E. S. 8639
Wolstenholme P. 9319
Wright F. B. 8605
Wuu Jwo-chun 8796
Wuyts P. 8976

Y

Yates F. 9072, 9285
Yen Ti 9016
Yett F. R. 8825 Д
Yoshihiro T. 8978
Youla D. C. 9034

Z

Zant J. H. 8496
Zappa G. 9200
Zbornik J. 8779
Zemanian A. H. 8979
Ziemba S. 8797
Ziermann M. L. 9165
Zoutendijk G. 9108

Технический редактор *Р. М. Денисова*